Aufgabe 1 Studentische Lösung!

a) Knotenregel: Der Betrag des Stroms der in einen Knoten hineinfließt ist gleich dem Strom der hinausfließt.

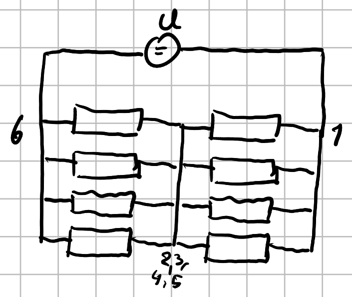
$\sum_n I_n = 0A$.

Maschenregel. Die Spannung entlang einer Masche ist 0.

$\sum_n U_n = 0\,V$

b) Nach der Symetrie des Systems fließt über R_{25}, R_{45}, R_{34} und R_{23} kein Strom. Sie können weggelassen werden

Ersatzschaltbild:



$\Rightarrow R_{ges} = \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}R = \frac{1}{2}R$

c) $I_{ges} = \frac{U}{R_{ges}} = 2\frac{U}{R}$

$I_{12} = \frac{1}{4} I_{ges} = \frac{1}{2}\frac{U}{R}$

Nach Symetrie ist $I_{23} = 0\,A$.

d) Es kann die gleiche Vereinfachung wie in b gemacht werden.

$C_{ges} = \frac{1}{2}(4C) = 2C$

Es handelt sich um eine Paralelschaltung von 4 Kondensatoren $\hat{=}$ 4C

Diese 4 Kondensatoren werden dann einmal in Reihe geschaltet, wodurch sich $C_{ges} = \frac{1}{2}(4C)$ ergibt.

Aufgabe 2

a) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

Man integriert über einen Quader um die Platte der höhe und tiefe h und Dicke q.

Aufgrund der Symmetrie ist das Feld nur in x-Richtung.

=> Die zur Platte orthogonalen Seiten des Quaders werden nicht vom E-Feld durchflossen.

$$E = \frac{1}{2h^2} \int_A \vec{E} \, d\vec{a} = \frac{1}{2h^2} \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dv = \frac{1}{2h^2 \varepsilon_0} \int_V \rho \, dv = \frac{1}{2\cancel{h^2} \varepsilon_0} \cancel{h^2} d\rho = \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}$$

b) Damit die Kugel in Ruhe ist muss die wirkende Kraft in Richtung des Fadens zeigen. Die Kraft ist $\begin{bmatrix} Eq \\ mg \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \alpha \stackrel{!}{=} \arctan\left(\frac{Eq}{mg}\right)$

Aufgabe 3

a) Wir integrieren über einen Zylinder mit Radius r. ∂V sei die Oberfläche.

Nach der Symetrie ist das E-Feld immer in radialer Richtung.

Für $r \leq r_2$ gilt.

$$E = \underbrace{\frac{1}{2\pi r L}}_{\text{Mantel-fläche}} \int_{\partial V} \vec{E} \, d\vec{n} = \frac{1}{2\pi r L} \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dv = \frac{1}{2\pi r L \varepsilon_0} \int \rho \, dv = \frac{Q_1}{2\pi r L \varepsilon_0}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi r L} \hat{e}_r$$

Analog gilt für $r > r_2$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi r L \varepsilon_0} \int \rho \, dv \, \hat{e}_r = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi r L \varepsilon_0} \hat{e}_r$$

b) Wird der Außenleiter geerdet, schirmt er das E-Feld außerhalb des Kabels ab.

$\Rightarrow \vec{E} = 0 \frac{V}{m} \; \forall r \geq r_2$

$0 \stackrel{!}{=} \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi r L \varepsilon_0} \Rightarrow Q_1 = -Q_2$

$$\phi(r_1) = -\int_{r_2}^{r_1} \vec{E} \, d\vec{r} = +\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1}{2\pi r L \varepsilon_0} \, dr = \frac{Q_1}{2\pi r L \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} = \frac{Q_1}{2\pi r L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

c) $\frac{C}{L} = \frac{\frac{Q_1}{U}}{L} = \frac{Q_1}{LU} = \frac{Q_1}{L\,\varphi(r_1)} = \frac{Q_1}{L \frac{Q_1}{2\pi r L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi r L \varepsilon_0}{L \ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi r \varepsilon_0}{\ln(r_2/r_1)}$

Aufgabe 4

a) Es handelt sich um einen Spannungsteiler:

Paralelschaltung $R \| C \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C}$

$$\hat{A}(\omega) = \boxed{\frac{R\|C}{(R\|C) - R - C}} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R}+i\omega C}}{\frac{1}{\frac{1}{R}+i\omega C} + R - \frac{i}{\omega C}} = \frac{\frac{1}{1+i\frac{\omega}{\omega_0}}}{\frac{1}{1+i\frac{\omega}{\omega_0}} + 1 - i\frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(1 - i\frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{1}{3 + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{3 - i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |\hat{A}(\omega)| = \frac{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}{3}\right)$$

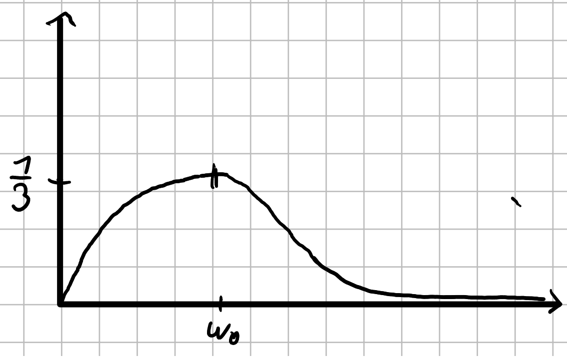
b)

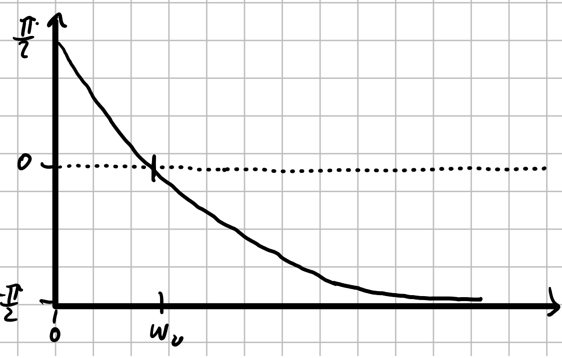
$$\lim_{\omega\to\infty} |\hat{A}(\omega)| = \left|\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{3 + i\underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}_{\to\infty}}\right| = 0 \qquad \lim_{\omega\to\infty} \varphi = \lim_{\omega\to\infty} \arctan\left(\frac{\overbrace{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}^{\to -\infty}}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega\to 0} |\hat{A}(\omega)| = \left|\lim_{\omega\to 0} \frac{1}{3 + i\underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}_{\to -\infty}}\right| = 0 \qquad \lim_{\omega\to 0} \varphi = \lim_{\omega\to 0} \arctan\left(\frac{\overbrace{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}^{\to\infty}}{3}\right) = +\frac{\pi}{2}$$

$\frac{1}{3 + i\underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}_{\to\infty}}$ wird maximal, wenn $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow |\hat{A}(\omega_0)| = \frac{1}{3}$

$\arctan\left(\frac{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}}{3}\right)$ hat eine Nullstelle, wenn $\omega = \omega_0$.





Aufgabe 4

a) $Q(t) = Q_0 \, e^{-\frac{1}{RC} t}$ $\qquad C = \frac{A}{d} \varepsilon_0 \quad \text{mit } A = \pi r_0^2$

$I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t}$

b) $E = \frac{Q(t)}{Cd} \Rightarrow j_v = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\dot{Q}(t)}{Cd} = \varepsilon_0 \frac{I(t)}{Cd}$

$I_v(t) = \pi r_0^2 \, j_v = \frac{\pi r_0^2}{Cd} \varepsilon_0 I(t) = \frac{A \varepsilon_0}{\frac{A}{d} \varepsilon_0 d} I(t) = I(t)$

$\Rightarrow I_v(t) = I(t)$

c) Sei $S(r)$ ein Kreis mit Radius r und $\partial S(r)$ sein Rand.

Nach der Drehsymetrie ergibt sich:

$H(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial S(r)} \vec{H}(r) \, d\vec{r} = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(r)} \text{rot } \vec{H}(r) \, d\vec{n} = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(r)} j_v \, dr$

$\Rightarrow$ für $r \leq r_0$: $H(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(r)} j_v \, dr = \frac{1}{2\pi r} j_v \pi r^2 = \frac{r}{2\pi r_0^2} I$

für $r \geq r_0$: $H(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(r)} j_v \, dr = \frac{1}{2\pi r} I$

d) $S = |\vec{E}(r_0) \times \vec{H}(r_0)| = \frac{Q(t)}{Cd} \cdot \frac{1}{2\pi r_0} I(t) = \frac{U(t) I(t)}{d \, 2\pi r_0}$

Sei O die Mantelfläche des Kondensators.

$\Rightarrow P = \int_O S \, do = 2\pi r_0 l \cdot S = U(t) I(t) \stackrel{\wedge}{=}$ Verlustleistung des Widerstands.