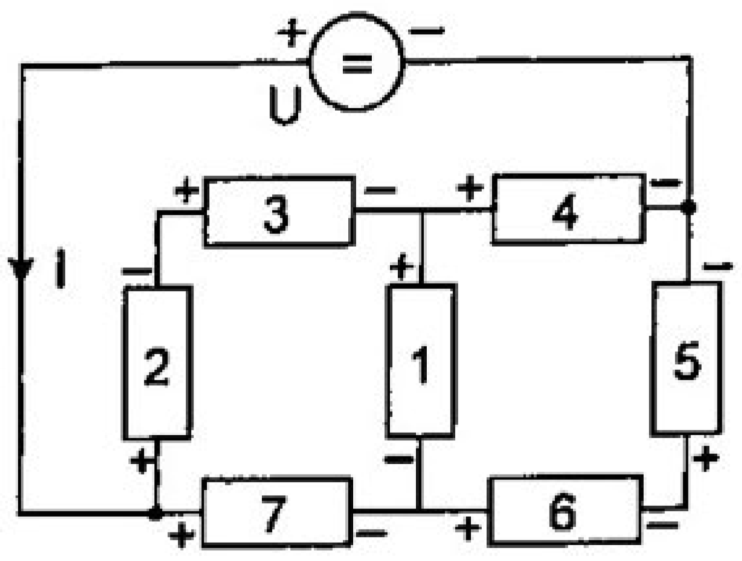
Aufgabe 1: **(12 Punkte)**

a) Aufgrund der Symmetrie gilt

$$\begin{aligned} I_4 &= I_7 && \tfrac{1}{2} \\ I_2 &= I_5 && \tfrac{1}{2} \\ I_3 &= I_6\,. && \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Zusammen mit I_1 und dem Gesamtstrom I müssen also 5 unabhängige Gleichungen aufgestellt werden.

b) Aufgrund von Knotenregel und Maschenregel gelten



$$\begin{aligned} I_3 &= I_2 && 1 \\ I_3 &= I_1 + I_4 && 1 \\ I &= I_2 + I_7 && 1 \\ 0 &= U_2 + U_3 + U_1 - U_7 && 1 \\ U &= U_2 + U_3 + U_4\,. && 1 \end{aligned}$$

Zu beachten ist hier insbesondere, dass die Vorzeichen für U_1 und I_1 konsistent gewählt werden. Die Gleichungen mit den Spannungen führen mit $U_i = R_0 I_i$ nach Division durch R_0 zu

$$\begin{aligned} I_7 &= I_2 + I_3 + I_1 && \tfrac{1}{2} \\ \frac{U}{R_0} &= I_2 + I_3 + I_4\,. && \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Unter Verwendung von Symmetrie und $I_3 = I_2$ folgt

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + I_4 && (1) \quad \tfrac{1}{2} \\ I &= I_2 + I_4 && (2) \quad \tfrac{1}{2} \\ I_4 &= 2I_2 + I_1 && (3) \quad \tfrac{1}{2} \\ \frac{U}{R_0} &= 2I_2 + I_4\,. && (4) \quad \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Einsetzen von I_1 aus Gl. (1) in Gl. (3) führt zu

$$I_4 = \frac{3}{2} I_2 \qquad \tfrac{1}{2}$$

und Einsetzen dieser Beziehung in Gln. (2) und (4)

$$\begin{aligned} I &= \frac{5}{2} I_2 && \tfrac{1}{2} \\ \frac{U}{R_0} &= \frac{7}{2} I_2 && \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

und dieses schließlich zu

$$I = \frac{5}{7}\frac{U}{R_0}\,.$$

Mit $I = U/R_\mathrm{E}$ erhalten wir also

$$R_\mathrm{E} = \frac{7}{5} R_0\,. \qquad 1$$

Aufgabe 2: **(12 Punkte)**

a) Für eine Punktladung Q' am Ort $\vec{r}\,' = 0$ ist das von ihr erzeugte elektrische Feld am Ort $\vec{r}$ mit $r = |\vec{r}|$ gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'}{r^3}\cdot\vec{r}$$ (1)

und im allgemeinen Fall für $\vec{r}\,' \neq 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')\ .$$ (1)

Mit $Q' = \rho_0\,\mathrm{d}V'$ und Integration über das homogen geladene Kugelvolumen V erhält man

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}V'\ .$$ (1)

b) Die erste Maxwellsche Gleichung lautet

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho\ .$$ (1)

Der Mittelpunkt der Kugel sei im Ursprung des Koordinatensystems. Mit dem Gaußschen Satz

$$\int_V \operatorname{div}\vec{D}\,\mathrm{d}V = \int_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}\,,$$

worin A die geschlossene Fläche A des Volumens V darstellt, folgt bei Integration über V

$$\int_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V\ .$$ (1)

Aufgrund der Kugelsymmetrie der Ladungsverteilung hängt die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ nur vom Radius r ab und zeigt in die radiale Richtung. Wählen wir für die Integration ein im Ursprung zentriertes Kugelvolumen V mit Radius r, dann zeigt der Normalenvektor der Oberfläche A ebenfalls in die radiale Richtung und es gilt (1)

$$\int_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} = \int_A D(r)\,\mathrm{d}A = D(r)\,4\pi r^2\ .$$ (½)(½)

Für die Integration über die Ladungsdichte betrachten wir zwei Fälle:

$$r \leq R:\ \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \rho_0\frac{4}{3}\pi r^3$$ (1)

$$r > R:\ \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \rho_0\frac{4}{3}\pi R^3$$ (1)

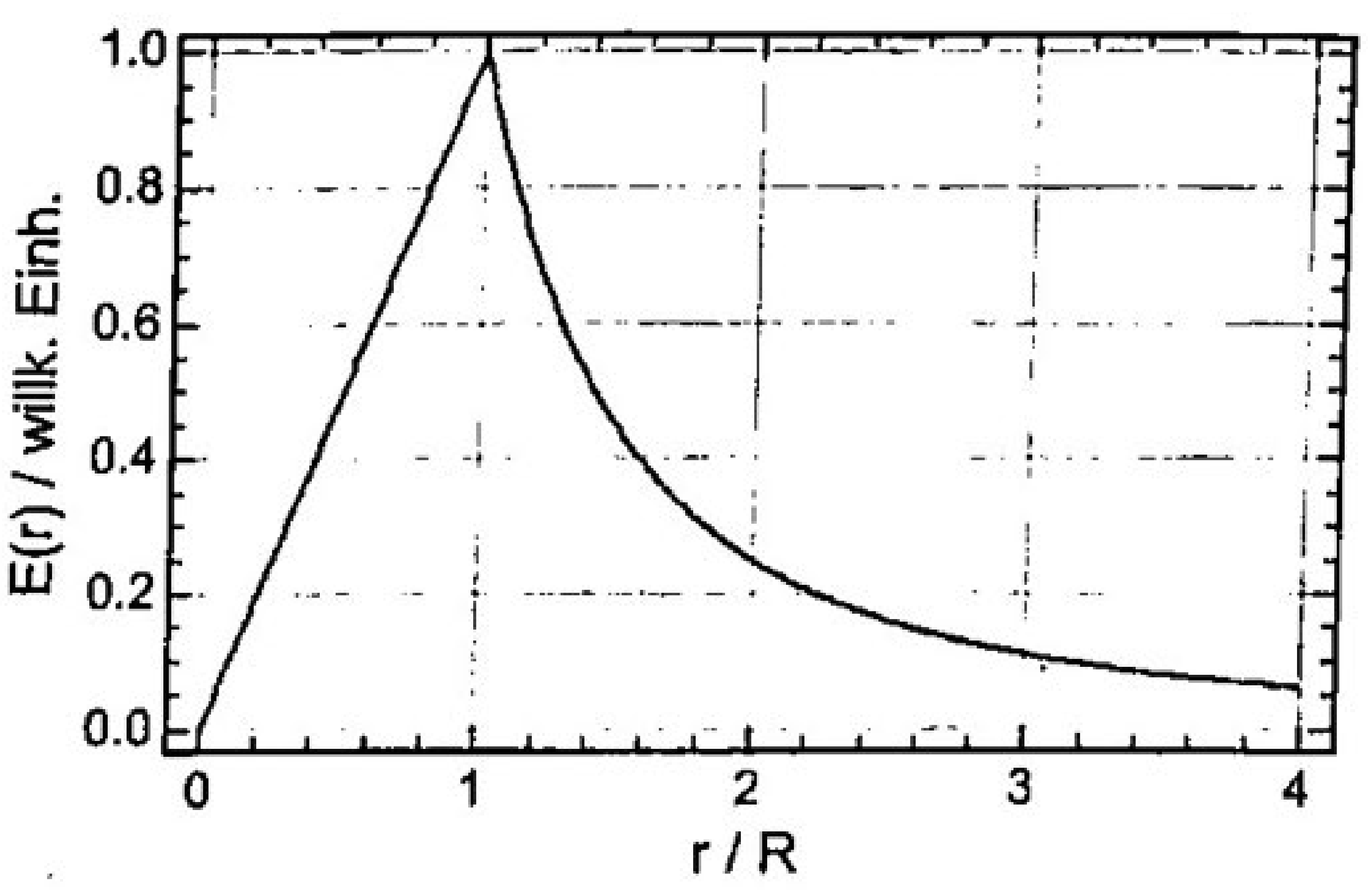
Demzufolge erhalten wir mit

$$D = \epsilon_0 E$$

die Lösung

(1)
(1)

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{3\epsilon_0}r & ;r \leq R \\ \dfrac{\rho_0}{3\epsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2} & ;r > R \end{cases}$$



(1)

Aufgabe 3: **(12 Punkte)**

a) Der Stab bildet mit den Schienen und dem Verbindungsstück einen geschlossenen Leiterweg, der die Fläche

$$A = b \cdot d$$ $\frac{1}{2}$

umschliesst. Die Länge d ist darin die Strecke der Schienen vom Verbindungsstück zum Stabkontakt. Die Fläche A wird vom Magnetfeld unter dem Winkel α durchsetzt. Der magnetische Fluss Φ ist wegen der Homogenität von B daher

$$\Phi = \int_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A} = \vec{A}\,\vec{B} = B\,b\,d\,\cos\alpha\ .$$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Wenn sich der Stab mit der Geschwindigkeit v entlang der Schienen bewegt, gilt

$$v = \dot{d}$$ $\frac{1}{2}$

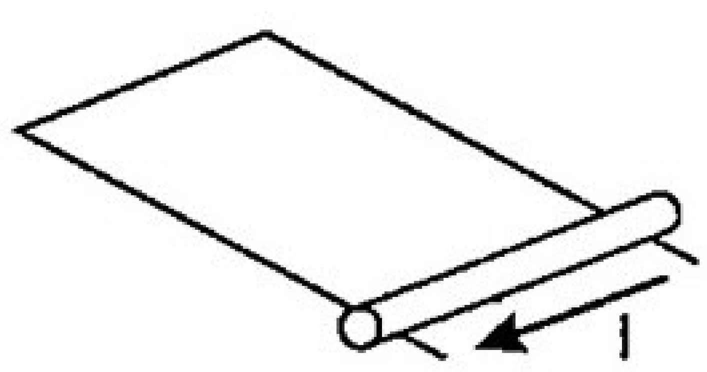
und es wird eine Spannung

$$|U_{\text{ind}}| = |\dot{\Phi}| = B\,b\,v\,\cos\alpha$$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

in die Stromschleife induziert. Diese Spannung erzeugt im Stab mit Widerstand R einen Strom I,

$$I = \frac{|U_{\text{ind}}|}{R} = \frac{B\,b\,v}{R}\cos\alpha\ .$$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Die Umlaufrichtung des Stroms muss derart sein, dass sie der Ursache der Induktion entgegenwirkt (Lenzsche Regel), in diesem Fall also der Bewegung des Stabs. Die Lorenzkraft auf den Stab $\vec{F}_L = I\,\vec{b} \times \vec{B}$ ist damit der Bewegungsrichtung entgegengesetzt, was nach der Rechte-Hand-Regel einer Stromrichtung in Uhrzeigerrichtung entspricht.



1

Auf den Stab wirkt die Lorentzkraft entgegen der Bewegungsrichtung des Stabs mit

$$F_L = I\,b\,B\,\cos\alpha$$ 1

b) Die Gravitationskraft entlang der Schienen zeigt in Bewegungsrichtung und ist vom Betrage

$$F_G = m\,g\,\sin\alpha\ .$$ 1

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet demgemäß

$$m\,\dot{v} = F_G - F_L = m\,g\,\sin\alpha - I\,b\,B\,\cos\alpha$$ $\frac{1}{2}$

$$\dot{v} = \underbrace{g\,\sin\alpha}_{p} - \underbrace{\frac{B^2 b^2 \cos^2\alpha}{mR}}_{q} \cdot v\ .$$ $\frac{1}{2}$

Für $t = 0$ gilt die Anfangsbedingung $v = 0$. Wir setzen daher an

$$v = v_e\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{v} = k\,v_e - k\,v$$ 1

mit Endgeschwindigkeit v_e. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$k = q = \frac{B^2 b^2 \cos^2\alpha}{mR} \qquad \text{und} \qquad v_e = \frac{p}{q} = \frac{m\,g\,R}{B^2\,b^2}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\,.$$ 1

c) Offenbar gilt $v_e \to 0$ wenn $R \to 0$, d.h. der Stab bleibt in Ruhe. Da für $R \to 0$ keine ohmschen Verluste für den Strom I auftreten können, ist das Ergebnis konsistent mit einer konstanten potentiellen Energie, denn bei $v_e > 0$ würde der Energieerhaltungssatz verletzt. Andererseits ist eine dauernde Ruhelage natürlich nur möglich, wenn schon ohne Bewegung ein Strom induziert wurde, der die zur Gewichtskraft entgegengesetzte Lorentzkraft erzeugt. Hier wird offensichtlich, dass die Lösung unphysikalisch ist, denn das Erzeugen des Stroms ist 1 nur durch Energieaufwand möglich, auch wenn $R = 0$, da der Strom mit einem Magnetfeld der Energie $L\,I^2/2$ verbunden ist. Folgerung: Die Vernachlässigung der Selbstinduktivität L ist nicht mehr möglich, wenn R gegen Null strebt. 1

Aufgabe 4: **(12 Punkte)**

a) Mit den komplexen Widerständen für Kapazität und Induktivität

$$Z_C = -i\,\frac{1}{\omega C} \quad , \quad Z_L = i\,\omega C$$ 1 1

ist die Übertragungsfunktion gegeben durch

$$\underline{A} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + Z_C + Z_L} = \frac{R}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\,.$$ ½ ½

Die Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\underline{A} = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - i\,\frac{R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,.$$ 1

Mit der Definition $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ werden Amplitude und Phase zu

$$A \;=\; \sqrt{\underline{A}\,\underline{A}^*} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \left[1 + \left(\frac{\omega^2/\omega_0^2 - 1}{\omega RC}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$ ½ 1

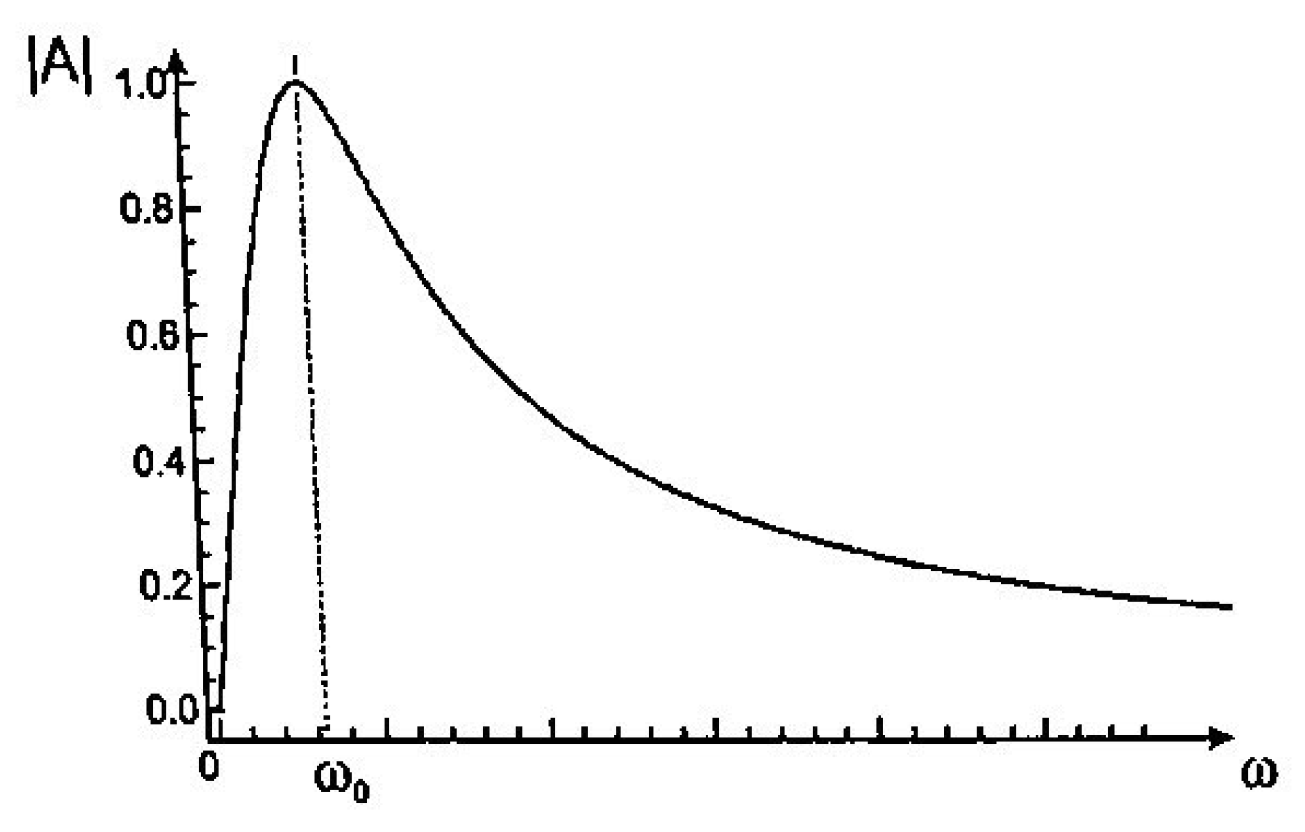
$$\tan\varphi \;=\; \frac{\Im(\underline{A})}{\Re(\underline{A})} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2/\omega_0^2}{\omega RC}\right)\,.$$ ½ 1

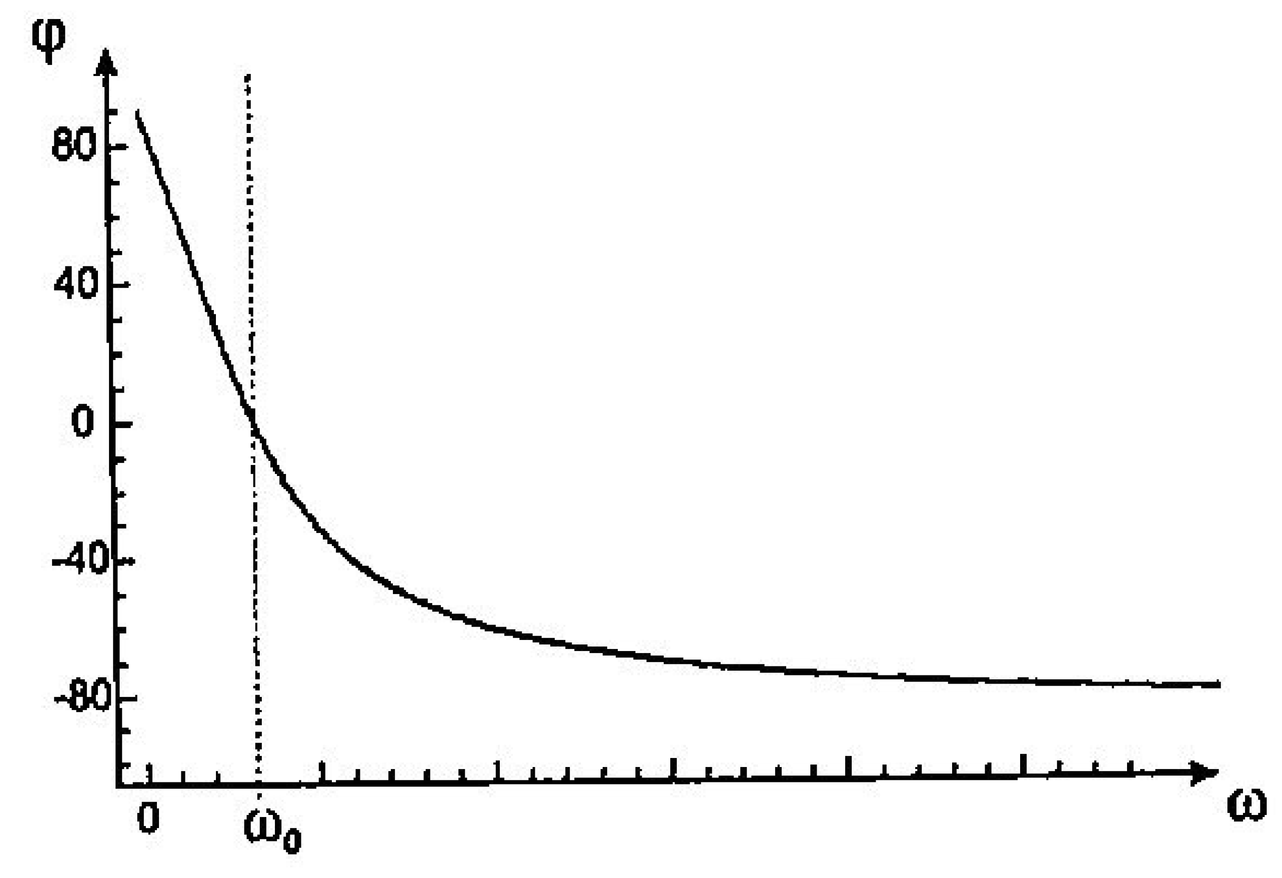
b) Verhalten von A:

- Für $\omega \to 0$ wird $Z_C \to \infty$ und $Z_L \to 0$. Der Spannungsabfall findet vollständig am Kondensator statt. Es wird $A \to 0$ für $\omega \to 0$. ½
- Für $\omega \to \infty$ wird $Z_C \to 0$ und $Z_L \to \infty$, so dass der Spannungsabfall vollständig an der Spule stattfindet. Entsprechend wird $A \to 0$ für $\omega \to \infty$. ½
- Für $\omega = \omega_0$ wird der Nenner von A minimal, also A maximal mit $A(\omega_0) = 1$. Der Spannungsabfall findet vollständig an R statt. ½

Verhalten von φ:

- Für $\omega \to 0$ wird $\tan\varphi \to \infty$, also $\varphi \to +90°$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega \to \infty$ wird $\tan\varphi \to -\infty$, also $\varphi \to -90°$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega = \omega_0$ wird $\tan\varphi = 0$, also $\varphi = 0°$. $\frac{1}{2}$





1 1

Aufgabe 5: (12 Punkte)

a) Die magnetische Flussdichte $B(t)$ ist gegeben durch

$$B(t) = \mu_0 H(t)$$ $\frac{1}{2}$

und aufgrund des sich zeitlich ändernden Magnetfelds $H(t)$ wird entsprechend der 2. Maxwellschen Gleichung

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$ $\frac{1}{2}$

ein zu $\vec{B}$ senkrechtes elektrisches Wirbelfeld $\vec{E}$ erzeugt. Dieses ist zusammengesetzt aus einer azimutalen Komponente $\vec{E}_\varphi$ und einer Komponente in radialer Richtung $\vec{E}_r$. Wegen der Zylindersymmetrie und $\operatorname{div}\vec{E} = \rho = 0$ folgt aber $\vec{E}_r = 0$, so dass nur die azimutale Komponente bleibt, $\vec{E} = \vec{E}_\varphi$. $\frac{1}{2}$

Zur Berechnung von E_φ integrieren wir über die achsenzentrierte Kreisfläche $A = \pi r^2$ senkrecht zur Spulenachse z. Mit dem Stokesschen Satz und dem Integrationsweg S entlang des Randes von A gilt dann $\frac{1}{2}$

$$\oint_S \vec{E}(r,t)\,\mathrm{d}\vec{s} \;=\; -\int_A \dot{\vec{B}}\,\mathrm{d}\vec{A}\,.$$ $\frac{1}{2}$

Aufgrund der Zylindersymmetrie des magnetischen Felds ist $\vec{E}$ nur vom Radius r abhängig. $\frac{1}{2}$ Da $\vec{E}$ zudem parallel zum Integrationsweg ist, $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{s}$, gilt im Inneren der Spule, $r \leq R$,

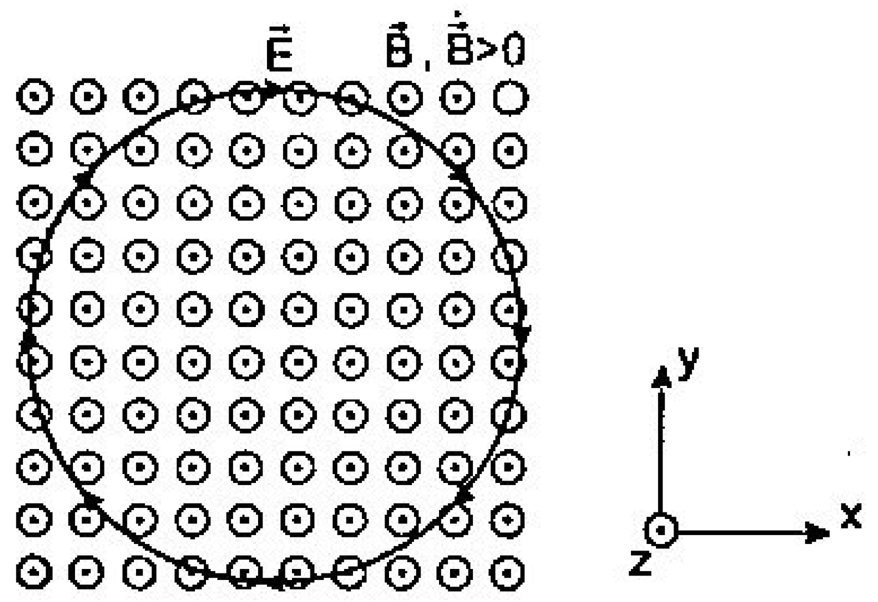
$$\oint_S \vec{E}(r,t)\,\mathrm{d}\vec{s} = E(r)\oint_S \mathrm{d}s = E(r,t)\cdot 2\pi r\,.$$ 1

Für das Integral auf der rechten Seite der Maxwellschen Gleichung gilt aufgrund der Homogenität des Magnetfeldes im Inneren der Spule mit $\dot{\vec{B}} \parallel \mathrm{d}\vec{A}$

$$\int_A \dot{\vec{B}}\,\mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \dot{H}(t)\int_A \mathrm{d}A = \frac{\mu_0 N}{l}\,\dot{I}(t)\cdot \pi r^2\,.$$ 1

Damit gilt insgesamt mit $\dot{I}(t) = \gamma$

$$E(r,t) = -\frac{\mu_0 N \gamma}{2l}\cdot r\,.$$ 1



Zeigt das Magnetfeld in die positive z-Richtung und wächst es zeitlich, $\dot{I}(t) > 0$, dann entspricht die Umlaufrichtung von $\vec{E}$ dem Uhrzeigersinn, wenn man auf das aus der xy-Ebene heraustretene $\vec{B}$-Feld schaut (vgl. Skizze). (1)

b) Die Energieflussdichte ist allgemein gegeben durch

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \ . \qquad (\tfrac{1}{2})$$

Die Felder $\vec{H}$ und $\vec{E}$ aus (a) stehen senkrecht aufeinander, so dass für den Betrag von $\vec{S}$ als Funktion von r und t innerhalb der Spule gilt

$$\begin{aligned} S(r,t) &= |E(r,t) \cdot H(t)| && (\tfrac{1}{2}) \\ &= \frac{\mu_0 N}{2l} |\dot{I}(t)|\, r \cdot |I(t)| \frac{N}{l} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 \gamma^2 r}{2l^2} \cdot t \ . && (1) \end{aligned}$$

Entsprechend der Rechte-Hand-Regel zeigt für $I > 0$ und $\dot{I} > 0$ der Energiefluss in Richtung Achse und hat nur Komponenten senkrecht zu z. Er ist proportional zu r, nimmt also mit abnehmendem Abstand zur Achse kontinuierlich ab. Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend damit, dass die magnetische Feldenergie in der Spule homogen wächst. Das anfangs homogene Feld bleibt also homogen. (1)

Die Leistung der in die Spule hineinströmenden Energie wird berechnet durch Integralbildung von $\vec{S}(r = R)$ über die Manteloberfläche M der Spule. Da der Poyntingvektor überall senkrecht auf der Mantelfläche steht und vom Betrage unabhängig vom Azimutwinkel φ ist, gilt

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_M \vec{S}(R,t)\, \mathrm{d}\vec{M} && (\tfrac{1}{2}) \\ &= S(R,t) \cdot 2\pi R l && (\tfrac{1}{2}) \\ &= \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 \gamma^2}{l} \cdot t \ . && (1) \end{aligned}$$