Aufgabe 1:

(12 Punkte)

a) Aufgrund der Symmetrie gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 = I_3 = I_{10} = I_{11} = I_{12} && (1)\\ I_4 &= I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = I_9 \;. && (1) \end{aligned}$$

b) Knotenregel: Verzweigen sich mehrere Leiter ausgehend aus einem gemeinsamen Kontaktpunkt, so ist die Summe der einlaufenden gleich der Summe der auslaufenden Ströme,

$$\sum_k I_{\mathrm{ein},k} = \sum_i I_{\mathrm{aus},i} \;,$$

oder

$$\sum_k I_k = 0 \;, \qquad (1)$$

wenn man I_{ein} und I_{aus} mit verschiedenen Vorzeichen versieht.

Maschenregel: In einem geschlossenen Stromkreis ist die Summe aller Verbraucherspannungen U_k gleich der Generatorspannung U_0,

$$U_0 = \sum_k U_k \;,$$

oder

$$\sum_k U_k = 0 \;, \qquad (1)$$

wenn die Vorzeichen aller Spannungsabfälle entsprechend dem Gradienten beim einmaligen Durchgang durch die Masche gesetzt werden.

Mit den Kirchhoffschen Regeln erhält man

$$\begin{aligned} U_0 &= U_3 + U_4 + U_{10} && (1)\\ I_0 &= I_1 + I_2 + I_3 && (1)\\ I_3 &= I_4 + I_5 && (1) \end{aligned}$$

c) Wir ersetzen die Spannungen mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes

$$U = R \cdot I \qquad (1)$$

und wenden die Ergebnisse aus (a) an:

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{R} &= 2I_1 + I_4 && (\tfrac{1}{2})\\ I_0 &= 3I_1 && (\tfrac{1}{2})\\ I_1 &= 2I_4 && (\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

d) Eliminieren von I_4 ergibt

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{R} &= \frac{5}{2} I_1 && (\tfrac{1}{2})\\ I_0 &= 3I_1 && (\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

und einsetzen der zweiten in die erste Gleichung

$$\frac{U_0}{R} = \frac{5}{6} I_0 \, . \qquad \frac{1}{2}$$

Demzufolge gilt für den Ersatzwiderstand

$$R_E = \frac{U_0}{I_0} = \frac{5}{6} R \, . \qquad 1$$

Aufgabe 2: **(12 Punkte)**

a) Die Energie W_1 ist gegeben durch

$$W_1 = Q\,E_2\,l \, . \qquad 1$$

Im Magnetfeld ändert sich die Energie der Teilchen nicht, daher ist

$$W_2 = W_1 \, . \qquad \frac{1}{2}$$

b) Im Magnetfeld wirkt auf Teilchen der Masse m und Ladung Q die Lorentzkraft

$$\vec{F}_B = Q\,\vec{v} \times \vec{B} \, . \qquad 1$$

Mit den gegebenen Richtungen für $\vec{F}_B$, $\vec{B}$ und $\vec{v}$ aus der Zeichnung sowie der Rechten-Hand-Regel ist die Ladung negativ. Da Magnetfeld und Geschwindigkeit senkrecht zueinander stehen, folgt ½

$$F_B = Q\,v\,B \, . \qquad \frac{1}{2}$$

Die Zentrifugalkraft F_Z bei der Kreisbewegung der Teilchen mit Radius $r = d/2$ ist

$$F_Z = \frac{2m\,v^2}{d} \, . \qquad 1$$

Mit der kinetischen Energie

$$W_1 = \frac{1}{2} m v^2 \qquad 1$$

folgt dann unter Verwendung von (a)

$$F_Z = \frac{4Q\,E_2\,l}{d} \qquad 1$$

und wegen $F_B = F_Z$

$$Q\,v\,B = \frac{4Q\,E_2\,l}{d} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4E_2\,l}{B\,d} \, . \qquad 1$$

Zudem erhält man

$$Q\,v\,B = \frac{2m\,v^2}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{m} = \frac{2v}{B\,d} \, , \qquad 1$$

so dass nach Einsetzen von v folgt

$$\frac{Q}{m} = \frac{8E_2\,l}{B^2 d^2} \, . \qquad 1$$

c) Die Teilchen in H_1 erfahren keine Kraft mehr, wenn für die Lorentzkraft gilt

$$Q\,(\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \, . \qquad 1$$

Demgemäß ist die Richtung von $\vec{E}_1$ senkrecht sowohl zu $\vec{B}$ als auch $\vec{v}$. In der Zeichnung entspricht das der Richtung von S_2 nach S_1 in der Papierebene. Für den Betrag E_1 gilt ½

$$E_1 = v\,B = \frac{4E_2\,l}{d} \, . \qquad 1$$

Aufgabe 3: **(12 Punkte)**

a) Mit den komplexen Widerständen für Kapazität und Induktivität

$$Z_C = -i\,\frac{1}{\omega C} \quad , \quad Z_L = i\omega\cancel{C}L$$ 1 1

ist die Übertragungsfunktion gegeben durch

$$\underline{A} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C + Z_L} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC}\,.$$ 1

Die Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\underline{A} = \frac{1-\omega^2 LC}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} - i\,\frac{\omega RC}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$ 1

so dass

$$A = \sqrt{\underline{A}\,\underline{A}^*} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$ 1

und

$$\tan\varphi = \frac{\Im(\underline{A})}{\Re(\underline{A})} = -\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC}\,.$$ 1

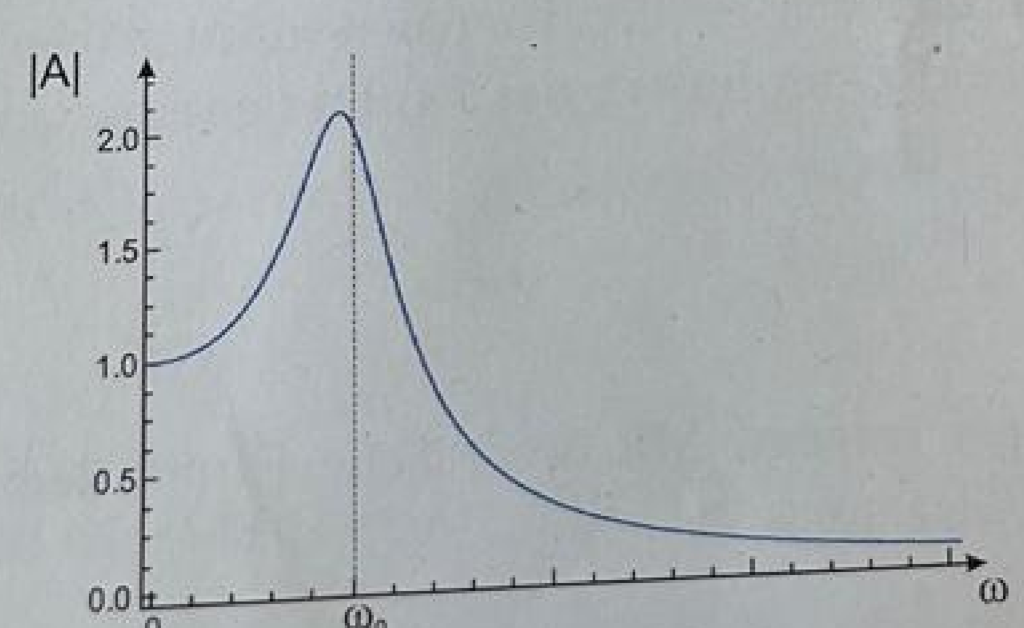
Bei der Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ wird der Nenner von A minimal und $\tan\varphi \Rightarrow \mp\infty$. 1

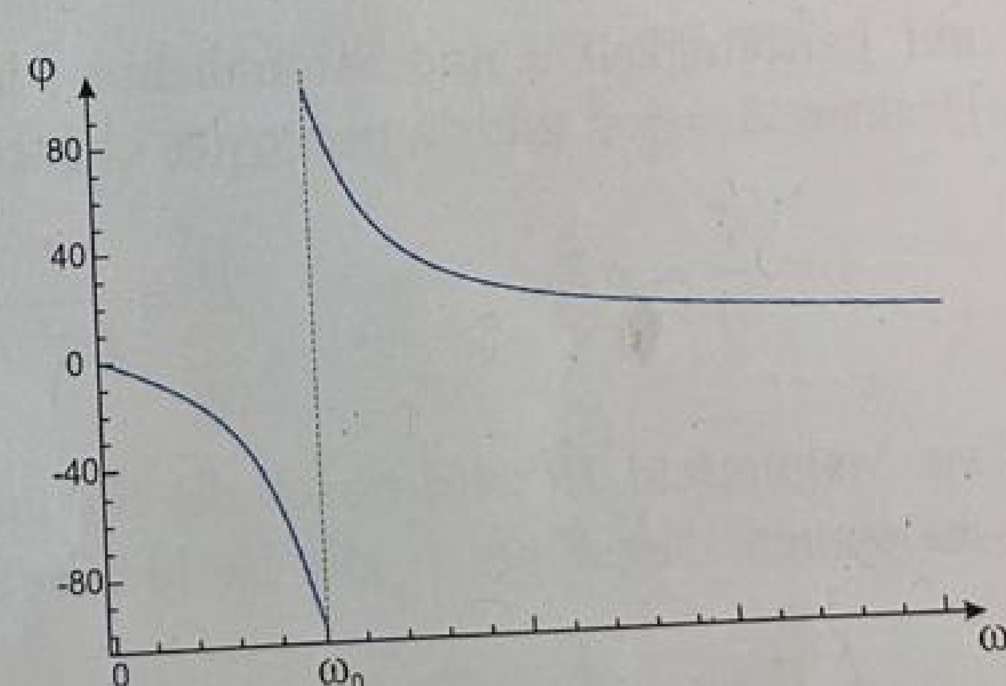
b) Verhalten von A:

- Für $\omega \to 0$ wird $Z_C \to \infty$ und $Z_L \to 0$. Der Spannungsabfall findet vollständig am Kondensator statt. Es wird $A \to 1$ für $\omega \to 0$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega \to \infty$ wird $Z_C \to 0$ und $Z_L \to \infty$, so dass der Spannungsabfall vollständig an der Spule stattfindet. Entsprechend wird $A \to 0$ für $\omega \to \infty$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega = \omega_0$ wird der Nenner von A minimal und A kann nahe ω_0 unter geeigneten Umständen ein (lokales) Maximum aufweisen. $\frac{1}{2}$

Verhalten von φ:

- Für $\omega = 0$ wird $\tan\varphi = 0$, also $\varphi = 0°$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega \to \infty$ wird $\tan\varphi \to 0$, also $\varphi \to 0°$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega = \omega_0$ wird $\tan\varphi = \mp\infty$, die Phase φ macht also einen Sprung von $-\pi/2$ nach $+\pi/2$. $\frac{1}{2}$





1 1

Aufgabe 4: **(12 Punkte)**

a) Es gelten die Formeln

$$
\begin{aligned}
B &= \mu_0 \mu H = \mu_0 (H + M) && \text{½ ½}\\
M &= \chi H && \text{1}\\
\mu &= 1 + \chi && \text{1}
\end{aligned}
$$

b) In der Spule sind

$$
\begin{aligned}
H &= nI && \text{1}\\
M &= \chi n I && \text{½}
\end{aligned}
$$

Für ein isotropes magnetisches Material mit Volumen $V = A \cdot h$ in einem homogenen Feld B gilt mit $\vec{M} \,||\, \vec{B}$ ½

$$
\begin{aligned}
W &= -MVB && \text{1}\\
&= -\chi H \cdot Ah \cdot \mu_0 H \\
&= -\mu_0 (\mu - 1) A\, n^2 I^2\, h && \text{1}
\end{aligned}
$$

c) Für die magnetische Kraft auf das Ferrofluid gilt

$$F_{\mathrm{m}} = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}h} = \mu_0 (\mu - 1) A\, n^2 I^2 \,. \qquad \text{1 1}$$

Für die Gewichtskraft des überstehenden Fluid gilt mit der Erdbeschleunigung g und der Masse m

$$F_{\mathrm{g}} = mg = \rho g A h \,. \qquad \text{½ ½}$$

Im Gleichgewicht gilt dann

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{g}} &= F_{\mathrm{m}} && \text{1}\\
\rho g A h &= \mu_0 (\mu - 1) A n^2 I^2 \\
\Rightarrow \qquad h &= \frac{\mu_0 (\mu - 1) n^2}{\rho g} \cdot I^2 \,. && \text{1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5: **(12 Punkte)**

a) Das ohmsche Gesetz lautet

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad \text{1}$$

mit Leitfähigkeit σ und Stromdichte $\vec{j}$ in Richtung von z. Mit der Querschnittsfläche des Drahtes $A = \pi r_0^2$ gilt dann für das elektrische Feld E im Innern des Drahtes entlang z:

$$j = \frac{I}{A} = \sigma E \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{I}{\pi r_0^2 \, \sigma} \,. \qquad \text{1}$$

Das Magnetfeld $\vec{H}$ wird durch die Stromdichte $\vec{j}$ erzeugt. Mit der Fläche F und dem geschlossenen Weg S um F gilt die Maxwellsche Gleichung

$$\oint_S \vec{H}\, \mathrm{d}\vec{s} = \int_F \vec{j}\, \mathrm{d}\vec{F} \,. \qquad \text{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \cancel{\mu_0}\, \vec{j} + \vec{j}_V$$

Als Integrationsweg wird ein Kreis mit Radius r um die Mittelachse des Drahtes und innerhalb der Querschnittsfläche A gewählt. Aus Symmetriegründen ist H unabhängig vom azimutalen Winkel φ, so dass ①

$$\oint_S \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \oint_S H\,\mathrm{d}s = H \cdot 2\pi r$$ ½

und

$$\int_F \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{F} = j \int_F \mathrm{d}F = \frac{I}{\pi r_0^2} \cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{r_0^2}\, I\ .$$ ½

Damit wird für $r \le r_0$

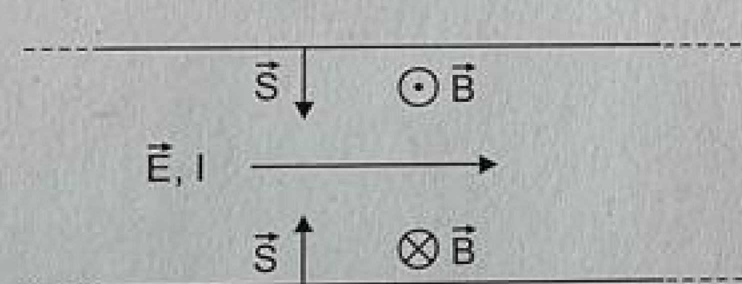
$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r_0^2} \cdot r\ .$$ ①

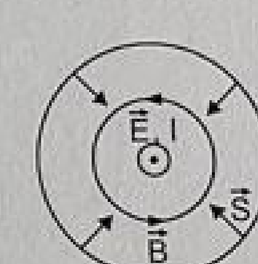
Die magnetische Flussdichte B ist entlang des Integrationswegs S gerichtet (vgl. Skizze unten). ½

b) Der Poynting-Vektor $\vec{S}$ ist gegeben durch $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Da $\vec{E} \perp \vec{H}$ gilt für den Betrag ①

$$S = E\,H \quad = \quad \frac{I}{\pi r_0^2 \sigma}\,\frac{I}{2\pi r_0^2}\, r \quad = \quad \frac{1}{2\sigma}\left(\frac{I}{\pi r_0^2}\right)^2 r\ .$$ ①

Der Vektor $\vec{S}$ zeigt senkrecht zur Oberfläche des Drahtes in die Richtung zur Mittenachse. ½





½ ½

c) An der Oberfläche des Drahtes ist die Energieflussdichte

$$S(r_0) = \frac{1}{2\sigma}\,\frac{I^2}{\pi^2 r_0^3}$$

Da $\vec{S}$ parallel ist zur Oberflächennormalen, ist die über die Länge l eintretene Leistung über die Mantelfläche $F = 2\pi r_0\, l$ des Drahtes gegeben durch

$$P = S(r_0)\,F = \frac{1}{2\sigma}\,\frac{I^2}{\pi^2 r_0^3} \cdot 2\pi r_0\, l = \frac{l}{\pi r_0^2 \sigma}\, I^2\ .$$ ①

Der ohmsche Widerstand ist mit dem spezifischen Widerstand $\rho = 1/\sigma$ und der Querschnittsfläche $A = \pi r_0^2$ gegeben durch

$$R = \rho\,\frac{l}{A} = \frac{l}{\pi r_0^2\,\sigma}\ ,$$ ①

so dass sofort folgt

$$P = R\,I^2\ .$$