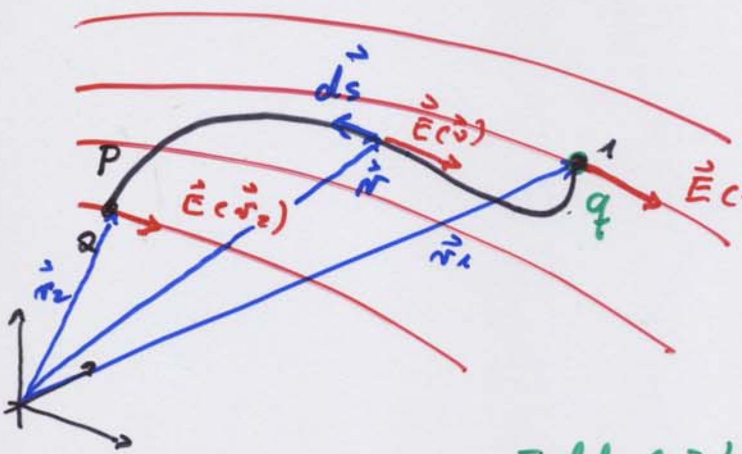
C) Arbeit und Potentielle Energie in Elektrostatischen Feldern

Bewegung von Ladung q im el. Feld von $1 \to 2$:

$$W = \int_{1,P}^{2} \vec{F}\, d\vec{s} = q \int_{1}^{2} \vec{E}\, d\vec{s}$$



Für $W_{12} > 0$: Feld leistet Arbeit
q gewinnt kin. Energie
verliert pot. Energie.

$W_{12} < 0$: q gewinnt pot. Energie
verliert kin. Energie

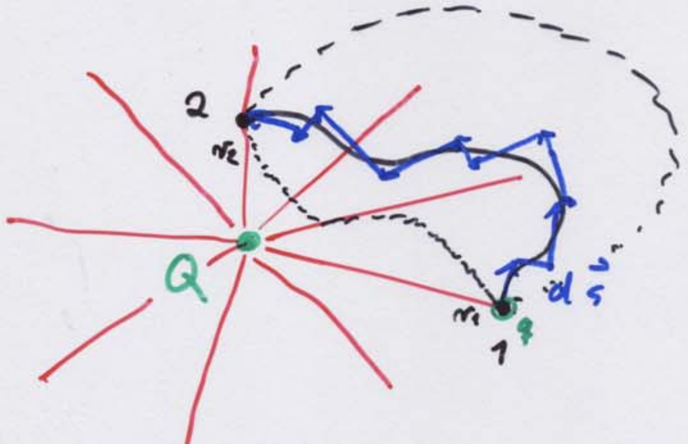
Beispiel Coulombfeld

a) Arbeit

$$W = q \int_1^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, d\vec{r}$$

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



Nur Wegkomponente von $\vec{e}_r$, die $\parallel d\vec{s}$ ist, führt zur Arbeit.

b) Potentielle Energie

$$E_p(\vec{r}) \equiv \int_{\vec{r}}^{\infty} q\,\vec{E}\,d\vec{s}$$

Coulombfeld : $E_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot q$

c) Potential:

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{E_p(\vec{r})}{q}$$

Coulombpotential: $V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Physikalisch relevant sind Differenzen in E_p bzw. V

Spannung $\quad U \equiv V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$

Energiediff. $\quad \Delta E_p = -q \cdot U$

$$= -\Delta E_k$$

Energie / Spannungseinheiten:

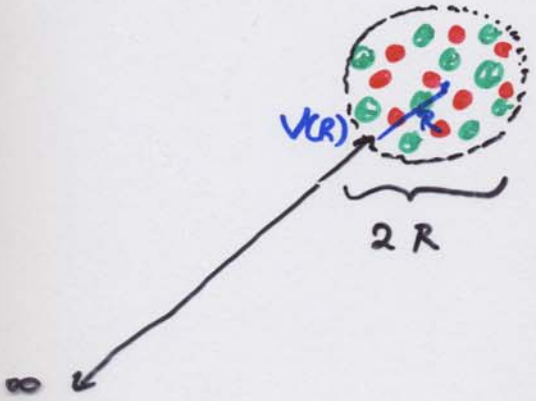
$[U] = 1\,V$

$[E] = 1\,eV$ Elektronvolt

Energie einer Elementarladung (zB Elektron, Proton), die in 1V Spannung beschleunigt wurde

$\hat{=} 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J$

Beispiel : 1. El. Potential auf Oberfläche eines Goldatomkerns

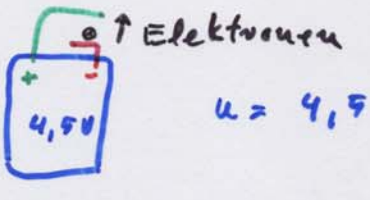


$$Q = Z \cdot e$$
$$= 79\, e$$
$$= 79 \cdot 1{,}6\, 10^{-19}\, C$$

$$R = 6{,}6 \cdot 10^{-15}\, m$$

$$\Rightarrow \quad V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} = 1{,}7 \cdot 10^{7}\, V$$

2. Beschleunigung im elektr. Potential



$$u = 4{,}5\, V$$

$$\left\{ \Delta E_{kin} = - \Delta E_{pot} \right\}$$

$$\Delta E_k = - \Delta E_p$$
$$= e \cdot u$$
$$= 4{,}5\, eV$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_e v^2$$

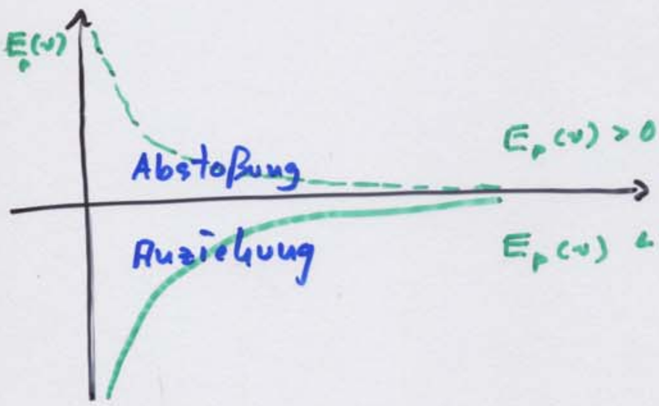
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m_e}} = 1{,}3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

2.1.7 Beispiele von Feldern, Potentialen

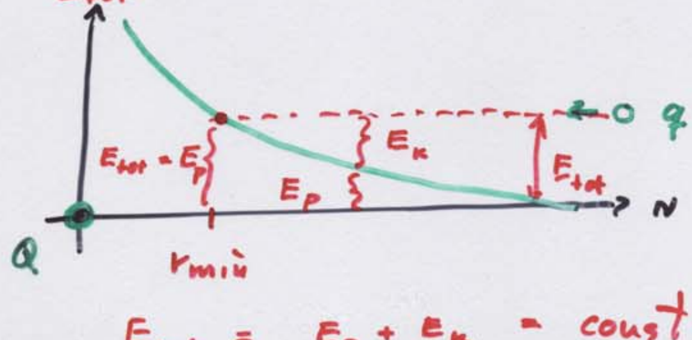
a) Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_p(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot q$$



- Abstoßender Fall



$$E_{tot} = E_p + E_k = \text{const}$$

$$E_{tot} = E_k(v) + V(r)\cdot q$$
$$= \frac{1}{2} m_q v(r)^2 + q\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- v_{max} : bei $r=\infty$:

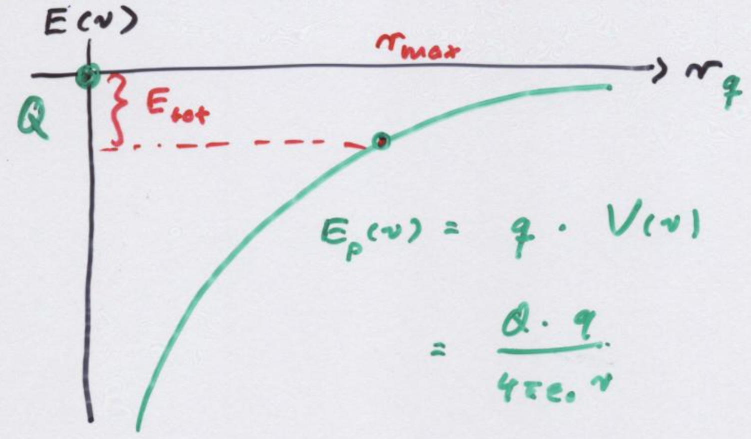
$$E_{tot} = E_k = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$
$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{m_q}}$$

- r_{min} : bei $v=0$:

$$E_{tot} = E_p = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
$$\Rightarrow r_{min} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 E_{tot}}$$

- allgemein: $E_k = E_{tot} - E_p$.

• Anziehender Fall

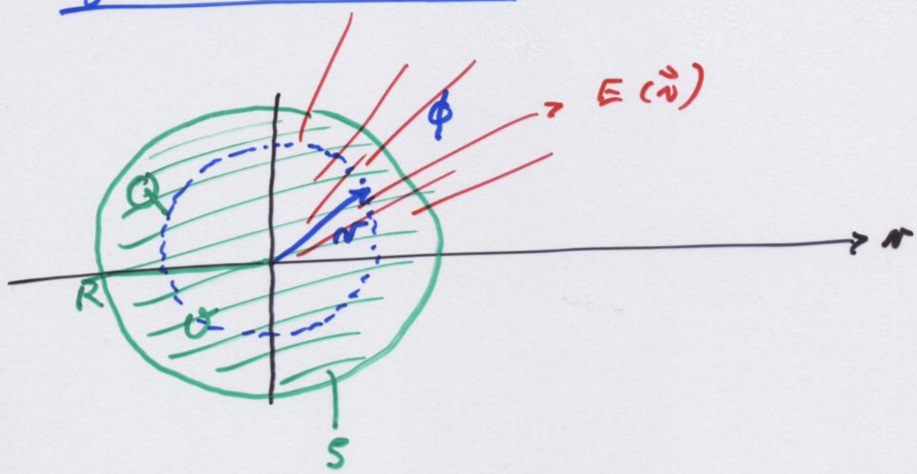


Für $E_{tot} < 0$: Gebundener Zustand

Maximaler Abstand :

$$E_{tot} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r_{max}} \Rightarrow r_{max} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 E_{tot}}$$

b) Potential, Feld einer homogen geladenen Kugel



Ladungsdichte $\varrho = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Gauß: $\phi = \dfrac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \int_{\mathcal{O}} \vec{E}\, d\vec{A}$

$= E(r) \cdot 4\pi r^2$

$\Rightarrow E(r) = \dfrac{Q(r)}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$

$Q(r) = \int \varrho \, dV = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho$

$\Rightarrow E(r) = \dfrac{\varrho \cdot r}{3 \varepsilon_0} \quad (r \leq R)$

Feldstärke