Experimentalphysik II Elektrodynamik

Christian Huber

18. Juli 2009

1 Elektrostatik

1.1 Coulomkraft und E-Feld

Die Kraft zwischen zwei Ladungen ist gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q \cdot Q \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Sind mehrere diskrete Ladungen vorhanden, so wird die Vektorsumme gebildet. Hierbei sitzt q im Nullpunkt des Koordinatensystems.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n \hat{r}_n}{r_n^2}$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung führen wir die Ladungsdichte ρ für Volumina bzw. σ für Flächen ein. Die Gesamtladung ergibt sich dann zu $Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV$, bzw. $Q = \int_A \sigma(\vec{r}) dA$.

Die Kraft auf eine Ladung q bezüglich einer Ladungsverteilung ist dann

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R} - \vec{r}}{\mid \vec{R} - \vec{r} \mid^3} \rho(\vec{r}) dV$$

Wir können eine Größe einführen, die unabhängig von der Ladung q ist. Diese Größe ist das elektrische Feld und es gilt $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

Das E-Feld einer homogen geladenen Platte beträgt $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Das E-Feld zwischen zwei unterschiedlich geladenen Platten (Plattenkondensator) beträgt dann das doppelte, also $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Außerhalb des Kondensators ist das Feld 0, da sich die Felder der positiven und negativen Platte gerade ausgleichen.

1.2 Elektrischer Kraftfluss und Gaußscher Satz

Man definiert den elektrischen Kraftfluss durch eine Oberfläche als $\phi_{el} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$. D.h. der Kraftfluss gibt an, wie stark das Feld ist, dass senkrecht durch die Fläche geht. Für jede umschlossene Ladung gilt außerdem $\phi_{el} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$. Dies ergibt sich aus der Verallgemeinerung des Flusses der von einer Punktladung erzeugt wird. Nach dem Gaußschen Satz gilt $\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\vec{E} dV = \phi_{el} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$. D.h. es gilt $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Die Divergenz von $\vec{E}$ gibt die Quellstärke an. D.h. die Ladung selber ist die Quelle des E-Feldes. Mit dem Gaußschen Satz kann man elegant E-Felder verschiedener Geometrien berechnen, indem man geschlossene Flächen um die Ladungen legt.

1.3 Das Potential

Bewegt man eine Ladung in einem E-Feld, so muss man Arbeit verrichten

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Da das E-Feld konservativ ist, ist es ein Potentialfeld und wir können ein Potential finden mit $-\mathrm{grad}\phi = \vec{E}$. Dieses Potential erhält man durch Integration $\phi(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s}$. Die oben berechnete Arbeit können wir also auch leichter erhalten als $W = q \cdot (\phi(P_2) - \phi(P_3)) = q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \cdot U$. Hierbei ist U die Spannung. Sie ist die Potentialdifferenz zwischen den Punkten P_1 und P_2 . Das Potential im unendlichen wird meist zur Normierung auf 0 gesetzt. Jedoch ist es auch in einigen Fällen angebracht das Potential der Erde 0 zu setzen.

Setzt man unsere Erkenntnisse vom Gaußschen Satz ein, so erhält man $\mathrm{div}\vec{E} = -\mathrm{divgrad}\phi = -\triangle\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Diese Gleichung heißt Poissongleichung und lässt uns zumindest numerisch für jede Ladungsverteilung E-Feld und Potential bestimmen.

1.4 Multipole

Wenn wir E-Feld und Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung berechnen wollen, können wir das Integral oft nicht mehr richtig lösen. Wir können jedoch die Ladungsverteilung "taylorentwickeln". D.h. wir denken uns die Gesamtladung als Addition eines Monopols, eines Dipols, eine Quadrupols usw, deren Felder sich überlagern. Dieser Ansatz stellt eine gute Näherung für große Entfernungen zur Ladungsverteilung dar, weil E-Feld und Potential von Multipolen mit höherer Potenz im Nenner vom Abstand abhängen, also schneller gegen 0 gehen.

1.4.1 Der Dipol

Für den Dipol definiert man das Dipolmoment:$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$, wobei $\vec{d}$ der Vektor von der negativen zur positiven Ladung ist. D.h. das Dipolmoment zeigt ebenfalls in diese Richtung. Für das Potential ergibt sich $\phi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$, d.h. das Potential ist 0 auf auf der Mittelsenkrechten der beiden Ladungen ist fällt im Vergleich zum Potential einer Punktladung mit $\frac{1}{R^3}$, statt nur mit $\frac{1}{R}$. Das E-Feld erhält man durch Gradientenbildung zu $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3}(3p\hat{R}\cos\theta - \vec{p})$.

Im homogenen elektrischen Feld wirkt im allgemeinen ein Drehmoment auf einen Dipol der Stärke $\vec{D} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = Q \cdot \vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Die potentielle Energie eines Dipols beträgt $W_{pot} = Q\phi_1 - Q\phi_2 = Q(\phi_1 - \phi_2) = Q \cdot U = Q \cdot \vec{E} \cdot \vec{d} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

Aus dieser Gleichung sieht man natürlich, dass die potentielle Energie minimal wird, wenn die Dipolachse parallel zum E-Feld ist.

In einem inhomogenen Feld existiert eine resultierende Translationskraft $\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla\vec{E}$. Wobei $\nabla\vec{E}$ ein Tensor ist.

1.4.2 Multipolentwicklung

Wie oben schon angedeutet, stellt man bei einer Multipolentwicklung eine Ladungsverteilung als Summe von Multipolen dar. Der Monopol gibt dabei die gesamte Ladung in der Ladungsverteilung an und ist z.B. für Ionen der führende und damit wichtigste Term. Für Ionenverbindungen, die neutral sind, z.b. Kochsalz entfällt der Monopolterm, dafür ist dann der Dipolterm führend.

1.5 Leiter im E-Feld

Setzt man einen Leiter einem elektrischen Feld aus, so wirkt auf die darin befindlichen Ladungsträger eine Kraft, die sie verschiebt, solange bis das Feld im Inneren gerade aufgehoben ist. Folglich ist das Innere eines Leiters, durch den keinen Strom fließt, feldfrei. Die Ladung muss deshalb an der Oberfläche des Leiters sitzen, da sie im Leiter ja ein Feld erzeugen würde, dass die anderen Ladungen wiederum verschiebt.

Auf diesem Prinzip beruht auch der Van-de-Graaf Generator, bei dem über ein Transportband Ladung ins Innere einer Hohlkugel gebracht wird. Die Ladung wird sofort auf die Außenseite gebracht, da sie im Inneren ein E-Feld erzeugen würde, was aber nicht sein kann, denn wir können im Inneren eine Gaußsche Fläche erdenken, die keine Ladung umschließt, wo folglich also auch das E-Feld 0 sein muss. Das ist das Prinzip des Faradayschen Käfigs.

Wir haben festgestellt, dass eine geladene Platte ein homogenes E-Feld erzeugt, nähert man einer solchen Platte, die die Ladung Q trägt eine weiter Platte, so wird auf dieser die Influenzladung $-Q$ auf der zugewandten Seite erzeugt (weil das Innere ja feldfrei sein muss). Auf der abgewandten Seite sitzt also die Ladung $+Q$, diese fließt jedoch ab, wenn man die Platte mit der Erde verbindet. So haben wir einen Plattenkondensator erhalten. Obwohl die Ladungsdifferenz $2Q$ beträgt, haben wir im Endeffekt nur einmal Q bewegt, deswegen tauchen in allen folgenden Gleichungen nur einmal Q auf. Aus unserer früheren Betrachtun wissen wir, dass das E-Feld zwischen den Platten $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ beträgt. Das E-Feld ist also proportional zu Q und wegen $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ist dann auch $U \propto Q$. Dadurch können wir eine Konstante C einführen, mit $Q = CU$. Dabei ist C ein Maß dafür wieviel Ladung bei gegebener Spannung auf dem Kondensator sitzt. C ist die Kapazität.

1.5.1 Plattenkondensator

Das Potential erhält man aus der Poissongleichung: Im Inneren sitzt keine Ladung, also sagt die Poissongleichung $\triangle\phi = 0$, dass ϕ eine lineare Funktion sein muss. Es ist $\phi(x) = -\frac{U}{d}x + \phi_1$. Das E-Feld erhält man durch Gradientenbildung zu $\vec{E} = \frac{U}{d}\hat{x}$. Für die Kapazität benötigen wir noch $E = \frac{Q}{A\epsilon_0} \Rightarrow Q = EA\epsilon_0$. Dann ist $C = \frac{Q}{U} = \frac{EA\epsilon_0}{dE} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$.

1.5.2 Kugelkondensator

Ein Kugelkondensator besteht aus konzentrischen Hohlkugeln. Wir wissen vom Gaußschen Satz, dass sich innerhalb der kleinen und außerhalb der großen Kugel kein E-Feld befindet, dort ist also das Potential konstant. Zwischen den Kugeln haben wir das E-Feld einer Punktladung im Mittelpunkts, also $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Das Potential ist dann also $\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ und die Spannung ist $U = \phi_2 - \phi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. Der Quotient ist dann $C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^{-1} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{a-b}$.

Hieraus lässt sich die Kapazität einer einzigen Kugel berechnen. Diese nimmt man als die Kapazität eines Kugelkondensators an, bei dem die zweite Kugel unendlich weit weg ist und das Potential 0 hat. Dann haben wir also als Kapazität für b gegen unendlich also als $C = 4\pi\epsilon_0 a$.

1.5.3 Schaltung von Kondensatoren

Schaltet man Kondensatoren parallel, so herrscht natürlich an allen die gleiche Spannung. Die Ladungen der einzelnen Kondensatoren addieren sich, sodass gilt: $C = \sum_i \frac{Q_i}{U} = \sum_i C_i$.

Schaltet man Kondensatoren hintereinander, so addieren sich die pro Kondensator abfallenden Spannungen zur Gesamtspannung auf $U_0 = \sum_i U_i$. Damit gilt $\frac{U}{Q} = \sum \frac{U_i}{Q} = \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$. Dabei sitzt auf jeder Kondensatorfläche die gleiche Ladung.

1.6 Energie im E-Feld

Lädt man eine Kugel nach und nach mit Ladung auf, so muss man Energie aufwenden, da die Ladung vom Unendlichen zu einem Ort höheren Potentials gebracht werden muss. Für eine infinitesimale Ladung benötigt man die Energier $dW = dq \cdot U = dq \cdot \frac{Q}{C}$. Die gesamte Arbeit, die verrichtet werden muss um allgemein einen Kondensator mit der Ladung Q aufzuladen ist das Integral $\int dq \cdot \frac{Q}{C} = W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$. Diese Formel gilt ganz allgemein. Genauso allgemein gilt die Formel für die Energiedichte, auch wenn sie hier nur für den Plattenkondensator hergeleitet wird. Im Plattenkondensator gilt: $C = \epsilon_0\frac{A}{d} \Rightarrow W = \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{A}{d}U^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{A}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 AdE^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 VE^2$. Also gilt für die Energiedichte: $\rho = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.

1.7 Dielektrika

Füllt man einen Kondensator mit Dielektrika (Isolatoren) so ändern sich einige Eigenschaften. Allgemein kann man sich wahrscheinlich merken, dass für alle Größen dort wo ein ϵ_0 steht nun noch ein ϵ dazukommt. Betrachten wir aber schrittweise, was passiert. Im Isolator sind die Ladungen nicht frei beweglich, also wird keine Influenzladung abgetrennt, wie es in einem Leiter der Fall wäre. Jedoch können die Ladungen geringfügig gegeneinander verschoben werden, wodurch viele Dipole entstehen. Diese erzeugen ein E-Feld, dass dem äußeren E-Feld entgegengerichtet ist und es damit schwächt. Das E-Feld wird also um den Faktor $\frac{1}{\epsilon}$ kleiner, da die Spannung proportional ist muss sie auch um $\frac{1}{\epsilon}$ kleiner werden. Da die Ladung auf den Kondensatorplatten gleich bleibt (zumindest bei abgetrennter Spannungsquelle), muss sich die Kapazität um dem Faktor ϵ erhöhen. Es wird Zeit einige neue Begriffe zu definieren: Beginnen wir mit der Polarisation. Diese gibt an, wie stark ein Dielektrikum polarisiert ist. Jeder einzelne Dipol im Dielektrikum wird durch sein Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$ charakterisiert. Als Polarisation definiert man nun die Vektorsumme der Dipolmomente pro Volumen. $\vec{P} = \frac{1}{V}\sum \vec{p_i}$. Im homogenen Feld werden alle Dipole in die gleiche Richtung ausgerichtet, damit können wir den Betrag der Polarisation leicht angeben als $P = \frac{n}{V} \cdot p = N \cdot q \cdot d$. Hierbei ist N die Anzahl an Dipolen pro Volumen. Die Polarisation ist zudem gleich der Flächenladungsdichte ($\sigma_{pol} = \frac{Q_{pol}}{A} = \frac{N \cdot d \cdot A \cdot q}{A} = N \cdot q \cdot d = P$)der Polarisationsladungen auf der Oberfläche. Im Dielektrikum selber gleichen sich die aneinandergrenzenden Dipole ladungstechnisch aus.

Für kleine E-Felder (also auch kleine Verschiebungen d) gilt ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Größen: $\vec{p} = \alpha\vec{E}$. Hierbei ist α die Polarisierbarkeit und ist vom Material abhängig. Sie gibt an, wie stark für ein gegebenes E-Feld das Dipolmoment und damit dann potentiell auch die Polarisation ist.

Für die Stärke des E-Felds im Dielektrikum muss jetzt nicht nur die Flächenladungsdichte des äußeren Kondensators beachtet werden, sondern auch die Ladungsdichte auf der Oberfläche des

Dielektrikums. Diese ist wie bereits gesagt gleich der Polarisation und damit gilt für das E-Feld.

$$E_{Diel} = \frac{\sigma_{Ges}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{Vak} - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} = E_{Vak} - \frac{P}{\epsilon_0}$$

Wichtig zu beachten ist hier, dass wegen $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$ die Polarisation parallel zum E-Feld ist. Aber da das Dipolmoment von der negativen zur positiven Ladung zeigt, ist das E-Feld, dass durch diesen Dipol erzeugt wird gerade entgegengerichtet. Die Polarisation selber ist aber vom E-Feld im Dielektrikum abhängig, wegen $\vec{P} = N \cdot \vec{p} = N \cdot \alpha \cdot \vec{E}_{Diel}$. Setzt man das in die E-Feld Gleichung ein können wir umformen:

$$\vec{E}_{Diel} = \vec{E}_{Vak} - \underbrace{\frac{N\alpha}{\epsilon_0}}_{\chi} \vec{E}_{Diel} \Rightarrow \vec{E}_{Diel} = \frac{\vec{E}_{Vak}}{1+\chi}$$

Da aber auch $E_{Diel} = \frac{E_{Vak}}{\epsilon}$ ist gilt $\epsilon = 1 + \chi$. Das heißt, dass ϵ angibt, wie die E-Felder im Vakuum und im Dielektrikum zusammenhängen. Die dielektrische Suszeptibilität χ gibt hingegen an, wie stark ein Dielektrikum in einem E-Feld polarisiert ist.

Wir kennen bereits den Zusammenhang $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Im Dielektrikum kommt hier noch die Polarisationsladungsdichte hinzu: $\mathrm{div}\vec{E}_{Diel} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0}$. Nun entspricht aber gerade die Polarisationsladungsdichte der negativen Divergenz der Polarisation (das kann man ähnlich herleiten, wie das E-Feld). Also können wir schreiben $\mathrm{div}\vec{E}_{Diel} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\mathrm{div}\vec{P}}{\epsilon_0}$. Wir multiplizieren mit ϵ_0 und formen um:

$$\mathrm{div}\left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho = \mathrm{div}\vec{D}$$

ρ bezeichnet hier nur die freie Ladungsdichte, hat also nichts mit der Polarisationsladungsdichte zu tun. Die steckt schon in $\vec{P}$ mit drin. $\vec{D}$ heißt die dielektrische Verschiebungsdichte. Für ein Stück Isolator in einem Kondensator ist zum Beispiel an der Grenzfläche von Isolator zur Luft $\rho = 0$. Also muss $\vec{D}$ innen uns außen gleich sein, sonst wäre die Divergenz nicht 0. Da außen $\vec{P} = 0$ ist finden wir den Zusammenhang $\vec{E}_{außen} = \vec{E}_{innen} + \frac{\vec{P}_{innen}}{\epsilon_0}$.

Wir können $\vec{D}$ auch anders schreiben. Wegen $\vec{P} = \epsilon_0 \left(\vec{E}_{Vak} - \vec{E}_{Diel}\right)$ können wir einsetzen $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{Diel} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}_{Diel} + \epsilon_0 \vec{E}_{Vak} - \epsilon_0 \vec{E}_{Diel} = \epsilon_0 \vec{E}_{Vak} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}_{Diel}$

Der Zusammenhang $\vec{E}_{Vak} = \epsilon \cdot \vec{E}_{Diel}$ gilt nur für den senkrechten Anteil des E-Feldes gegen die Oberfläche des Dielektrikums. Der tangentielle Anteil bleibt gleich, weil man sonst auf einem geschlossenen Weg innerhalb des Dielektrikums parallel zur Oberfläche mit Rückweg außerhalb des Dielektrikums Energie gewinnen würde, was nicht sein kann. Es gilt also $\vec{E}_{Vak\|} = \vec{E}_{Diel\|}$.

Für den senkrechten Teil ändert sich die dielektrische Verschiebungsdichte nicht, weil mit ρ die gesamte Ladung gemeint ist, und diese ja unabhängig davon ist, ob wir uns im Dielektrikum befinden, oder außerhalb. Wegen $\vec{D}_{Vak\perp} = \vec{D}_{Diel\perp} \Rightarrow \vec{E}_{Vak\perp} = \epsilon\vec{E}_{Diel\perp}$

Wir haben gesehen, dass die Energiedichte im elektrischen Feld $\rho_{el} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED$ ist. Da durch ein Dielektrikum die Kapazität eines Kondensators geändert wird, gilt mit Dielektrikum $W_{Diel} = \frac{1}{2}C_{Diel}U^2 = \epsilon\frac{1}{2}CU^2 = \epsilon \cdot W_{Vak}$. Die Energie wird also größer. Für die Energiedichte gilt dann $\rho_{Diel} = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 ED$. Die allgemeine Form für die Energiedichte lautet also $w = \frac{1}{2}ED$, weil in D gerade die Information über das Dielektrikum steckt.

2 Der elektrische Strom

2.1 Fundamentale Begriffe

Die wichtigste Größe ist die Stromstärke I. Sie gibt die Ladungsmenge an, die pro Zeit senkrecht durch eine Fläche geht. $I = \frac{dQ}{dt}$. In dieser Definition ist die Stromstärke ein Skalar.

Die Information über die Orientierung steckt in der Stromdichte $\vec{j}$. Sie gibt die Raumverteilung und Richtung des Stromes an. Man erhält die Stromstärke über folgenden Zusammenhang $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$. Für eine zu $\vec{j}$ senkrechte Fläche vereinfacht sich das Integral zu $I = j \cdot A$.

Betrachten wir nun einen Leiter mit n Ladungsträgern pro Volumeneinheit. Für den Strom ergibt sich dann

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nq \cdot dV}{dt} = nq \cdot \frac{d(\vec{A} \cdot \vec{s}(t))}{dt} = n \cdot q \cdot \vec{A} \cdot \vec{v}$$

und die Stromdichte ist $\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v} = \rho_{el} \cdot \vec{v}$ mit der Ladungsdichte $\rho_{el} = n^+ \cdot q^+ + n^- \cdot q^-$, wobei hier die Summe aus den positiven und negativen Ladungen gebildet wurde. Allgemein ist die Stromdichte also $\vec{j} = n^+ \cdot q^+ \cdot \vec{v}^+ - n^- \cdot q^- \cdot \vec{v}^-$. Da sich normalerweise die negativen Ladungsträger in die entgegengesetzte Richtung zu den positiven Ladungsträgern bewegen, tragen sie doch wieder positiv zur Stromdichte bei, weil ihre Ladung ja ebenfalls negativ ist und mit der negativen Geschwindigkeit zusammen wieder plus ergibt.

2.2 Hinführung zum Ohmschen Gesetz

Im Leiter ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger nicht besonders hoch. Ansich erfahren die Ladungsträger durch ein E-Feld zwar eine Kraft und damit eine Beschleunigung, aber die Erfahrung zeigt uns, dass die Ladungsträger deswegen ja nicht immer schneller durch den Leiter heizen, sondern eine recht konstante Geschwindigkeit bewahren. Diese Geschwindigkeit heißt Driftgeschwindigkeit und ist dadurch bedingt, dass die Ladungsträger (im Folgenden meist Elektronen) mit den festen Ladungen kollidieren und dabei ihre kinetische Energie wieder verlieren. Zwischen zwei Stößen liegt die mittlere Zeit τ. Damit ergibt sich:

$$\vec{j} = nq \cdot \vec{v}_D = nq \cdot (\vec{a} \cdot \tau) = nq \cdot \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \tau \right) = nq \cdot \left(\frac{q \cdot \vec{E}}{m} \cdot \tau \right) = \frac{n \cdot q^2 \cdot \tau}{m} \cdot \vec{E} = \sigma_{el} \cdot \vec{E}$$

Die Stromdichte hängt also direkt linear mit dem E-Feld zusammen. Der Proportionalitätsfaktor σ_{el} heißt elektrische Leitfähigkeit und ist materialabhängig. Logisch ist, dass er größer ist für eine größere Ladungsdichte der Ladungsträger und eine größere mittlere Zeit (längere Beschleunigungsstrecke) und umgekehrt proportional zur Masse der Ladungsträger ist. Für die Driftgeschwindigkeit haben wir damit zudem folgenden linearen Zusammenhang gezeigt:

$$\vec{v}_D = \frac{q \cdot \tau}{m} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma_{el}}{nq} \cdot \vec{E} = u \cdot \vec{E}$$

Hierbei heißt $\underline{u}$ die Beweglichkeit der Ladungsträger.

2.3 Das Ohmsche Gesetz

Ansich ist die Gleichung $\vec{j} = \sigma_{el} \cdot \vec{E}$ bereits das Ohmsche Gesetz. Denn für einen homogenen Leiter gilt $U = E \cdot L$ und damit für die Stromstärke

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = j \cdot A = \sigma_{el} \cdot E \cdot A = \frac{\sigma_{el} \cdot A}{L} \cdot U = \frac{1}{R} \cdot U$$

Wir sehen also folgenden wichtigen Zusammenhang $R = \frac{1}{\sigma_{el}} \cdot \frac{L}{A} = \rho_s \cdot \frac{L}{A}$. Der Widerstand R ist also zum einen von einer Materialkonstante $\rho_s = \frac{1}{\sigma_{el}}$ abhängig, die spezifischer Widerstand heißt und natürlich umso größer ist, je kleiner die Leitfähigkeit σ_{el} ist und zum anderen von der Geometrie des Leiters. Längerer Leiter bedeutet größerer Widerstand und größerer Querschnitt kleinerer Widerstand. Völlig intuitiv.

Mit diesem Wissen können wir das Potentialgefälle in einem Leiter berechnen. Denn bei Stromfluss ist das Potential nicht mehr konstant im Leiter, sondern nimm linear ab.

$$U(x) = I \cdot R(x) = I \cdot \rho \frac{x}{A} = I \cdot R \cdot \frac{x}{L} = U_0 \cdot \frac{x}{L}$$

2.4 Die Joulesche Wärme

In einem stromdurchflossenen Leiter gibt es Reibungsverluste. Während die Ladungen das Potentialgefälle U durchlaufen erhalten sie die Energie $E = U \cdot q$, d.h. die Leistung beträgt $P = \frac{dE}{dt} = U \cdot \frac{dq}{dt} = U \cdot I$ für konstante Spannung. Rückwärts wird dann also die Arbeit $W = \int_{t_1}^{t_2} U \cdot I \cdot dt$ verrichtet. Diese Energie geht in Wärme über, da sie durch Reibung verloren geht.

2.5 Die Kirchhoffschen Regeln

Mit den Kirchhoffschen Regeln ist es möglich die Strom- und Spannungsverhältnisse in einem Netzwerk von Leitern auf ein lineares Gleichungssystem zurückführen, dass gelößt werden kann.

- Erste Kirchhoffsche Regel: An einem Knotenpunkt ist die Summe aller Ströme $\sum_k I_k = 0$. Das ist klar, weil im Knoten keine Ladung verloren gehen kann.
- Zweite Kirchhoffsche Regel: In einem geschlossenen Stromkreis ist die Summe aller Spannungen $\sum_k U_k = 0$. Andernfalls könnte durch den Stromkreis Energie gewonnen werden. Hierbei definiert man sich eine Generatorspannung als positiv. An einem Verbraucher fällt immer eine negative Spannung RI ab. Liegen weitere Spannungsquellen im Stromkreis, so werden solche positiv gewertet, die in die gleiche Richtung gehen, wie die Generatorspannung.

Hieraus ergeben sich die Rechenregeln für parallele und serielle Widerstände. Bei Reihenschalten haben wir $U_0 = \sum_{k=1} U_k = \sum_{k=1} IR_k = I \sum_{k=1} R_k$. Die Einzelwiderstände addieren sich also.

Bei parallelen Widerständen verwenden wir die erste Kirchhoffsche Regel $\frac{U}{R} = I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, d.h $\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$.

3 Statische Magnetfelder

Magnetfelder werden von Permanentmagneten oder einem stromdurchflossenen Leiter erzeugt. Wieder können wir uns die Felder durch ihre Feldlinien vorstellen. Die äquivalente Größe zum E-Feld ist hier das B-Feld, dass in jedem Raumpunkt Stärke und Orientierung des Magnetfelds angibt (die äquivalente Größe in der Elektrodynamik ist die Stromdichte). Wie auch bei E-Feld und Stromdichte kann man den zugehörigen Fluss durch eine Fläche mithilfe der Integration über die Fläche erhalten $\phi_{mag} = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}$. Er gibt an, wie groß der Betrag der Magnetfeldlinien senkrecht zur Fläche A ist.

Da keine magnetischen Monopole existieren, können die Magnetfeldlinien nirgends "entspringen", d.h. es muss gelten div$\vec{B} = 0$. Desweiteren sind Magnetfeldlinien stets geschlossen. Auch hieran erkennt man die obige Gleichung, denn es muss für eine geschlossene Oberfläche gelten $\oiint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div}\vec{B} \cdot dV = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{B} = 0$.

Ein B-Feld ist nicht rotationsfrei (das Feld um einen stromdurchflossenen Leiter ist stets tangential), folglich ist das Integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0$. Dazu mehr im nächsten Kapitel. Wir betrachten zunächst B-Felder im Vakuum.

3.1 Berechnen von B-Feldern

B-Felder können prinzipiell auf 2 Art und Weisen berechnet werden. Entweder mit dem Ampèreschen oder dem Biot-Savart-Gesetz. Die Gesetzte lauten

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times \hat{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$$

bzw für dünne Leiter kann man bereits über $\vec{j}$ integrieren und erhält $\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \int \frac{\hat{e}_{12} \times d\vec{s}}{r_{12}^2}$. Hierbei bezeichnet $\vec{r}_1$ den Ortsvektor des Punktes, an dem wir das B-Feld berechnen wollen. $\vec{r}_2$ bezeichnet des Ort eines infinitesimalen Volumenelements. Der Vektor $\vec{r}_{12}$ zeigt vom Punkt 2 zum Punkt 1, es gilt also $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. $d\vec{s}$ bezeichnet ein infinitesimales Streckenelement entlang des Leiters, also nicht wie beim Ampèreschen Gesetz das Element eines Weges außerhalb auf dem wir integrieren.

Für das Ampèresche Gesetz gibt es keine wirkliche Herleitung, es ist experimentell gefunden. Die Konstante ist $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$. Es besteht ein Zusammenhang zwischen c, ϵ_0 und μ_0.Es gilt $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Aus dem Ampèreschen Gesetz folgt eine Maxwellgleichung, denn es gilt

$$\mu_0 \cdot I = \mu_0 \cdot \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \overset{Stokes}{=} \int_F \text{rot}\vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \text{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

Mithilfe des Ampèreschen Gesetzes lassen sich das B-Feld eines stromdurchflossenen Leiters und einer schlanken Spule berechnen:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \overset{\text{weil tangential}}{=} \int_0^{2\pi} B \cdot r \cdot d\varphi = 2\pi B r = \mu_0 \cdot I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \qquad \text{für den Leiter}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^L B \cdot ds = N \cdot \mu_0 \cdot I \Rightarrow B = \frac{N}{L} \cdot \mu_0 \cdot I = n \cdot \mu_0 \cdot I$$

Das Biot-Savart Gesetz benötigt man z.b. um das B-Feld in der Mitte einer einzelnen Leiterschleife zu berechnen. Der Vektor $\vec{r}_{12}$ beschreibt also immer den Vektor vom Außenkreis zum Mittelpunkt. Damit steht $\hat{e}_{12} \times d\vec{s}$ senkrecht auf der Kreisfläche und $\hat{e}_{12}$ und $d\vec{s}$ stehen stets senkrecht aufeinander. Also ist das Integral:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{ds}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2} \cdot d\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot r}$$

Für einen Punkt auf der Mittelsenkrechten mitteln sich die Komponenten von $\vec{B}$, die nicht parallel zur Mittelsenkrechten sind bei der Integration weg, denn das Kreuzprodukt zeigt für diesen Fall in Richtung des radialen Kreisvektors, der bei einer Integration über den gesamten Kreis, wegen der sin und cos Abhängigkeit 0 ergibt.

Für das B-Feld parallel zur Mittelsenkrechten überlegen wir zuerst, was $\mid \vec{r}_{12} \times d\vec{s} \mid$ ist. Es ist $r_{12} = R \cdot \frac{1}{\tan\alpha}$, wenn α der Winkel, den der Radius mit $\vec{r}_{12}$ einschließt ist. Da wir von dem Kreuzprodukt einen sin in den Zähler bekommen gilt $\mid \vec{r}_{12} \times d\vec{s} \mid = R \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$ Von dem B-Feld interssiert uns ja wie bereits gesagt, nur die senkrechte Komponente, d.h es ist $dB_{\parallel} = dB \cdot \cos\alpha$. Dann erhalten wir:

$$B(z) = \int dB_{\parallel} = \int dB \cdot \cos\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{R}{r_{12}^3} ds = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_{12}^3} \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r_{12}^3} \cdot R^2 \cdot 2\pi = -\frac{\mu_0 I \cdot R^2}{4\pi (R+h)^{\frac{3}{2}}}$$

In einem Helmholtzspulenpaar wird das Feld von zwei Spulen überlagert, sodass sich auf der Mittelsenkrechten ein Feld der Stärke $B = B(z + \frac{d}{2}) + B(z - \frac{d}{2})$ bildet. Unter der Helmholtzbedingung, dass der Abstand der Spulen gleich deren Radius ist, ergibt eine Taylorentwicklung, dass sich die B-Feldstärke im Abstand von der Mitte der beiden Spulen erst in der 4. Potenz ändert und damit für kleine Auslenkungen aus der Mitte nahezu konstant ist. Der Wert ist dann $B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{4\pi \left(R + \frac{d}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

3.2 Die Lorentzkraft

Auf eine bewegte Ladung in einem B-Feld wirkt eine Kraft, die proportional zu deren Ladung, der Geschwindigkeit und dem B-Feld selbst ist. Die Kraft steht immer senkrecht auf Bewegungsrichtung und B-Feld. Es gilt:

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

bzw. wenn auch ein E-Feld vorhanden ist

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Diese Kraft wird als Lorentzkraft bezeichnet.

In einem Leiter befinden sich natürlich viele bewegte Ladungen, sobald eine Spannung anliegt, also muss auf den Leiter ebenfalls eine Lorentzkraft wirken. Die Geschwindigkeit ist die Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D$ mit $n \cdot q \cdot \vec{v}_D = \vec{j}$. In einem Leiter befinden sich in einem Leiterstück dL Ladungen mit Gesamtladungsbetrag $dq_{Ges} = n \cdot q \cdot A \cdot dL$. Setzen wir diesen Ausdruck für q_{Ges} in die Lorentzkraft ein, so erhalten wir

$$d\vec{F} = dq_{Ges} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = n \cdot q \cdot A \cdot dL \cdot \left(\vec{v}_D \times \vec{B}\right) = A \cdot dL \cdot \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) = I \cdot dL \cdot \left(\hat{e}_{Strom} \times \vec{B}\right) = I \cdot \left(d\vec{L} \times \vec{B}\right)$$

Bei Integration über die gesamte Leiterlänge ergibt das dann, $\vec{F}_L = I \cdot \left(\vec{L} \times \vec{B}\right)$.

3.2.1 Die Hallspannung

Auf die Elektronen in einem Leiter wirkt eine Lorentzkraft, wenn dieser sich in einem B-Feld befindet. Dadurch werden sie in eine Richtung abgelenkt, wodurch Ladung getrennt wird. Das geschieht solange, bis die resultierende Kraft verschwindet, also bis gilt $q \cdot \vec{E} = -q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ Dadurch ensteht zwischen den Leiterenden eine Spannung mit

$$U_H = E \cdot d = -v \cdot B \cdot d = -\frac{I \cdot B \cdot d}{n \cdot q \cdot A} = -\frac{I \cdot B}{n \cdot q \cdot h}$$

Wenn gilt $A = d \cdot h$.

3.3 Materie im Magnetfeld

Genau wie im Fall eines Dielektrikums in einem elektrischen Feld, hat auch Materie in einem B-Feld einen wesentlichen Einfluss auf das Feld. Dies soll im Folgenden behandelt werden. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe, die jedoch auch sehr ähnlich zu dem elektrischen Fall sind.

3.3.1 Der magnetische Dipol

Wir haben gesehen, dass eine Leiterschleife ähnlich wie ein Stabmagnet wirkt. Wir definieren, das magnetische Dipolmoment als

$$\vec{p}_{mag} = I \cdot \vec{A}$$

Hier ist $\vec{A}$ der Flächennormalenvektor, dessen Länge der Flächeninhalt der Leiterschleife ist. Seine Richtung ist so gewählt, wie die Richtung des erzeugten B-Felds. Also entsprechend der rechten Handregel.

Eine erste Analogie zum elektrischen Fall ergibt die Betrachtung des Drehmoments im äußeren B-Feld. Für eine rechteckige Leiterschleife mit den Seitenkanten a, b wirkt das Drehmoment um eine Mittelachse

$$\vec{D} = 2 \cdot \frac{\vec{b}}{2} \times \vec{F}_L = \vec{b} \times (I \cdot \vec{a} \times \vec{B}) = I \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{B} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{p}_{mag} \times \vec{B}$$

Im elektrischen Fall lautete die enstprechende Gleichunge $\vec{D} = \vec{p}_{el} \times \vec{E}$. Entsprechend erhält man auch die potentielle Energie als $W_{pot} = -\vec{p}_{mag} \cdot \vec{B}$ und die resultierende Kraft im inhomogenen B-Feld als $\vec{F} = \vec{p}_m \cdot \mathrm{grad}(\vec{B})$

3.3.2 Erregung, Magnetisierung, Suszeptibilität usw.

Bringt man ein Stoff in ein B-Feld beispielsweise einer schlanken Spule, so ändert sich das B-Feld. Wir hatten für das Feld früher gefunden $B_0 = n \cdot I \cdot \mu_0$. Dieser ändert sich nun zu $B = \mu \cdot B_0 = \mu\mu_0 \cdot I \cdot n$. Man möchte eine Größe haben, die unabhängig von dem Material ist, dazu definiert man die magnetische Erregung $\vec{H}$.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$$

Das Ampèresche Gesetz wird unter der Verwendung von $\vec{H}$ zu $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$, bzw $N \cdot I$ falls es sich um mehrere Leiterschleifen handelt.

Der Grund für die Veränderung des B-Felds ist leicht zu erklären. Je nach verwendetem Material befinden sich im Inneren bereits magnetische Dipole, welche jedoch willkürliche Richtungen haben, oder durch das äußere B-Feld werden Dipole induziert. Im ersteren Fall werden die Dipole dann durch das äußere Feld ausgerichtet und können so einen effektiven Beitrag zum B-Feld leisten. Ob die Dipole in Richtung des B-Felds oder antiparallel ausgerichtet werden hängt vom Material ab. Die Effekte sind logischerweise stärker, wenn die Dipole schon permanent vorhanden sind und nicht erst induziert werden müssen.

Man definiert nun die Magnetisierung als die Summe der Dipolmomente pro Volumen also $\vec{M} = \frac{1}{V}\sum \vec{p}_m$. Für eine zufällige Orientierung der Dipole ist die Magnetisierung also gleich zu 0. Falls die Magnetisierung existiert so trägt sie zum B-Feld bei und es gilt:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Da die resultierende Magnetisierung jedoch erst durch die bestehende magnetische Erregung zustande kommt, hängt sie direkt von ihr ab und das Experiment bestätigt für nicht zu große Feldstärken einen linearen Zusammenhang $\vec{M} = \chi_{mag} \cdot \vec{H}$. Wobei hier χ_{mag} die magnetische Suszeptibilität ist. Damit können wir die obige Gleichung auch schreiben als:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_{mag}\vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_{mag}) \cdot \vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}$$

Die letzte Identität stammt aus dem Vergleich mit $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0\mu}$. Es gilt also der Zusammenhang $1 + \chi_{mag} = \mu$. Die Werte der Suszeptibilität sind im allgemeinen sehr klein.

Man unterscheidet je nach Suszeptibilität zwischen verschiedenen Stoffen:

- Diamagnete: Sie besitzen kein permanentes Dipolmoment, d.h. die Dipole müssen induziert werden. Ihre Suszeptibilität ist betragsmäßig sehr klein und die Dipole sind anitparallel zum B-Feld ausgerichtet, sodass das B-Feld im Diamagnet kleiner ist als außerhalb.

- Paramagnete: Paramagnete besitzen ein permanentes Dipolmoment, aber ohne äußeres Magnetfeld sind die Dipole zufällig orientiert, d.h. die Magnetisierung ist 0. Das liegt an der thermischen Bewegung. Für den Grad der Magnetisierung kommt es also auf das Verhältnis zwischen der potentiellen Energie des Dipols im Feld und der thermischen Bewegungsenergie an $\Rightarrow \frac{\vec{p}_{mag} \cdot \vec{B}}{kT}$.

- Ferromagnete: Hier ist die Suszeptibilität viel größer. Außerdem bleiben die Dipole, nachdem sie einmal ausgerichtet wurden, auch wenn man das äußere Feld zurückfährt teilweise ausgerichtet, d.h. ein Teil der Magnetisierung bleibt erhalten (Remanenz). Man muss erst eine Koerzitivkraft aufbringen in Form eines entgegengerichteten Felds um die eine willkürliche Magnetisierung zu erreichen. Im Gesamten wird eine Hystereschleife durchlaufen.
  Erhitzt man einen Ferromagnet, so verliert er ab einer bestimmten Temperatur (Curie-Temperatur) seinen Ferromagnetismus, weil dann die thermische Energie zu groß wird und die Dipole aus ihrer Ordnung bringt.

3.3.3 Feldgleichungen

Wir können einige Gleichungen aufschreiben, die auch im Material gelten. Zum einen gibt es immer noch keine Monopole, also ist weiterhin div$\vec{B} = 0$, jedoch ist div$\vec{B} = \text{div}(\vec{H}\mu_0\mu) = \mu\mu_0\text{div}\vec{H} + \vec{H}\mu_0\text{grad}\mu$=0 . Für inhomogene Materialien schwankt natürlich μ und damit gilt im Allgemeinen $\vec{H} \neq 0$.

Jedoch gilt weiterhin das Ampèresche Gesetz in seiner abgewandelten Form $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = I\mu_0 = \oint \mu_0 \vec{H} d\vec{s} \Rightarrow \oint \vec{H} d\vec{s} = I$. Bzw. mit dem Stokesschen Satz gilt rot$\vec{H} = \vec{j}$. Nun ist in einem Medium, dass nicht vom Strom durchflossen wird $\vec{j} = 0$. Es folgt also rot$\vec{H} = 0$. Jetzt können wir wie beim elektrischen Feld folgern, dass also die tangentiale Komponente von $\vec{H}$ an einer Grenzfläche erhalten bleiben muss. Dann folgt aber für das B-Feld $\vec{H}_\parallel = \vec{H}'_\parallel \Rightarrow \frac{\vec{B}_\parallel}{\mu} = \frac{\vec{B}'_\parallel}{\mu'}$. Bei der senkrechten Komponente verhält es sich gerade andersherum. Weil das B-Feld beim Eintreten ins Medium nicht stärker werden darf (div$\vec{B} = 0$), muss gelten $\vec{B}_\perp = \vec{B}'_\perp \Rightarrow \mu\vec{H}_\perp = \mu'\vec{H}'_\perp$.

4 Zeitlich veränderliche Magnetfelder

Bis jetzt haben wir folgende Gleichungen gefunden um die Phänomene des Elektromagnetismus zu beschreiben. Die Betrachtung von zeitlich veränderlichen Feldern wird uns erlauben diese Gesetze zu verallgemeinern und daraus die Maxwellgleichungen abzuleiten:

$$\text{rot}\vec{E} = 0 \quad \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = -\text{grad}\phi$$

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

4.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Das Faradaysche Induktionsgesetz lautet:

$$U = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\phi}{dt}$$

oder in der differentiellen Form

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} = \iint \text{rot}\vec{E} d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} d\vec{A} \Rightarrow \text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Bis jetzt sind wir ja davon ausgegeangen, dass gilt rot$\vec{E} = 0$, nun sehen wir, dass das für den zeitlich konstanten Fall auch durchaus stimmt. Sobald sich jedoch ein B-Feld ändert wird ein E-Feld erzeugt, das verwirbelt ist. Auf diese Art und Weise entstehen Kreisströme. Ein solches E-Feld ist nicht als Gradient eines Potentials darstellbar.

Das Minuszeichen in der Gleichung verursacht, dass die Induktionsspannung immer dergestalt gepolt sind, dass sie die daraus resultierenden Kreisströme ihrer Ursache entgegenwirken. Da nämlich das E-Feld ein Wirbelfeld ist, werden Kreisströme erzeugt, die selbst ein B-Feld erzeugen. Dieses ist stehts so orientiert, dass es die ursprüngliche B-Feldänderung auszugleichen versucht.

Diesen Sachverhalt der Wirbelströme erkennt man gut am Waltenhofenschen Pendel: Es besteht aus Aluminium und pendelt durch ein Magnetfeld. Es wird sofort stark abgebremst, da es beim Eintauchen ins B-Feld den Fluss ändert. Die induzierten Kreisströme verursachen Energieverluste, wegen des Widerstandes des Aluminiums. Verwendet man ein Blech mit Schlitzen, so pendelt es wesentlich länger, da sich keine so starken Kreisströme ausbilden können.

4.2 Selbstinduktion

Ändert man in einem Stromkreis, der eine Spule enthält die Stromstärke, so wird eine Spannung induziert, weil sich über die Stromstärke auch direkt das B-Feld ändert. D.h. wir können den momentanen Fluss schreiben als $\phi(t) = L \cdot I(t)$. Die Induktionsspannung hat damit den Wert $U = -\frac{d\phi}{dt} = -L \cdot \dot{I}$. Der Faktor L heißt Induktivität und ist für jedes Bauteil charakteristisch, so wie für einen Kondensator die Kapazität charakteristisch ist. Für eine lange Spule lässt sich die Induktivität leicht berechnen:

$$\phi(t) = \int \vec{B} d\vec{A} = N \cdot A \cdot \frac{N}{l}\mu_0\mu \cdot I = L \cdot I \Rightarrow L = \frac{N^2 A \mu_0 \mu}{l} = n^2 \mu_0 \mu A l = n^2 \mu_0 \mu V$$

Hiermit können wir einsehen, dass beim z.b. beim Einschalten eines Stromes in einem Stromkreis die Stromstärke nicht sofort ihren maximalen Wert erreicht, denn es gilt

$$U_0 = IR - U_{Ind} = IR + L\dot{I}$$

Dies ist eine lineare DGL erster Ordnung in I . Die Lösung ist nicht schwer $I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}} + \frac{U_0}{R}$. Es besteht also ein exponentieller Zusammenhang. Für den Ausschaltvorgang lautet die Lösung $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

4.3 Die Energie im B-Feld

Nach dem Ausschalten fließt immer noch ein Strom mit einer Leistung. Diese Energie muss natürlich irgendwo herkommen, sonst wäre unser geliebter EES verletzt. Wir können diese Energie, die im B-Feld stecken muss recht einfach berechnen, denn wir können einfach das zeitliche Integral der Leistung betrachten:

$$W = \int P \cdot dt = \int U_{Ind} \cdot I \cdot dt = \int -L \cdot \dot{I} \cdot I \cdot dt = \int L \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \frac{R}{L} \cdot I_0 e^{-\frac{R}{L}t} dt = \int_0^\infty R \cdot I_0^2 e^{-2\frac{R}{L}t} dt \cdot = \frac{1}{2} L \cdot I_0^2$$

Setzen wir für $L = n^2 \mu_0 \mu V$ ein, so finden wir $W = \frac{1}{2} n^2 \mu_0 \mu V \cdot I_0^2 = \frac{1}{2} HBV$, die Energiedichte ist dann foglich $w_{mag} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2$. Für das elektrische Feld hatten wir gefunden $w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2$. Damit ist die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes $w_{Ges} = w_{el} + w_{mag} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu_0 \mu}) = \frac{1}{2}(D \cdot E + B \cdot H)$

4.4 Der Verschiebungsstrom

Betrachten wir einen Stromkreis mit einem Kondensator. An diesem Stromkreis sei eine Wechselspannung angelegt, dann wird um die Leiterstücke eine ein B-Feld induziert. Wenn wir eine Gaußsche Fläche um eine Kondensatorplatte legen, dass muss gelten, dass gleich viele Magnetfeldlinien eintreten, wie austreten, sonst wäre $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ nicht erfüllt. Also muss auch zwischen den Kondensatorplatten auch ein B-Feld bestehen. Wenn wir von der Differentiellen Form des Ampèreschen Gesetzes $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$ ausgehen dürfte zwischen den Kondensatorplatten jedoch kein Strom bestehen. Also müssen wir uns eine Erklärungsmöglichkeit überlegen. Dadurch, dass wir eine Wechselspannung angelegt haben, werden auch die Kondensatorplatten stehts umgepolt und somit ändert sich auch das E-Feld zwischen den Leiterplatten. Diese zeitliche Änderung ist für das B-Feld verantwortlich. Wir können uns einen imaginären Strom zwischen den Leiterplatten folgendermaßen vorstellen mit $\sigma = \epsilon_0 \cdot E$

$$I_v = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 \vec{A} \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Und damit wäre die Verschiebungsstromdichte $\vec{j}_v = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Wenn wir diesen Verschiebungsstrom zum normalen Strom dazuaddieren, so erhalten wir eine neue differentielle Form mit $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_v)$. Wir können wegen $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ auch schreiben $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

4.5 Die Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen sind die 4 fundamentalen Gleichungen der Elektrodynamik. Sie lauten im Vakuum:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{B}}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

In Materie müssen wir einige Effekte beachten, weshalb es zweckmäßiger ist bei manchen Gleichungen die materialunabhängige Größe $\vec{D}$ und $\vec{H}$ zu verwenden:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Die erste Gleichung besagt, dass sich ändernde B-Felder geschlossene E-Felder erzeugen. Das ist einfach die differentielle Form des Induktionsgesetzes. Die zweite Gleichung besagt, dass die Quelle eine statischen elektrischen Feldes die Ladungsverteilung ist. Die dritte Gleichung ist die differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes und beschreibt damit, wie Magnetfelder von Strömen und sich ändernden E-Feldern erzeugt werden und die letzte Gleichung besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt.

5 Vergleich von elektrischen und magnetischen Begebenheiten

Vergleichsaspekt	elektrisch	magnetisch
Kraft	$\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$	$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$
Divergenz	$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div}\vec{B} = 0$
Rotation	$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$	$\text{rot}\vec{B} = I \cdot \mu_0$
Potential	$\vec{E} = -\text{grad}\phi$	$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$
materialunabhängige Größe	$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$
Dipolmoment	$\vec{p}_{el} = Q \cdot \vec{d}$	$\vec{p}_{mag} = I \cdot \vec{A}$
Polarisation/Magnetisierung	$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum \vec{p}_{el}$	$\vec{M} = \frac{1}{V}\sum \vec{p}_{mag}$
linearer Zusammenhang	$\vec{p}_{el} = \alpha\vec{E}$ $(\chi_{el} = \frac{N\alpha}{\epsilon_0})$	$\vec{p} = \chi_{mag} \cdot \vec{H}$
Suszeptibilität	$\epsilon = 1 + \chi_{el}$	$\mu = 1 + \chi_{mag}$
Potentielle Energie des Dipols	$W_{pot} = -\vec{p}_{el} \cdot \vec{E}$	$W_{mag} = -\vec{p}_{mag} \cdot \vec{B}$
Drehmoment auf Dipol	$\vec{D} = \vec{p}_{el} \times \vec{E}$	$\vec{D} = \vec{p}_{mag} \times \vec{B}$
Stetigkeit	Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig	Senkrechtkomponente von $\vec{B}$stetig
	Normalkomponente von $\vec{D}$ stetig	Tangentialkomponente von $\vec{H}$ stetig
Energiedichte	$w_{el} = \frac{1}{2}CU^2 \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED$	$w_{mag} = \frac{1}{2}LI^2 \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}HB$