

Physik II: Elektrodynamik

bei Prof. Dr. Georg Weiß

Mitschrieb von Johannes Fischer

Sommersemester 2010

Stand: 21.10.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Beobachtete Phänomene	5
1.1.1	Pioniere der Elektrodynamik	5
1.2	Elektrodynamik ist...	5
1.3	Basisgröße Stromstärke	6
1.4	Ladungen und Ströme	6
1.4.1	Millikan-Versuch (1909)	6
1.4.2	Ladungserhaltung	7
1.4.3	Coulombsches Kraftgesetz	8
1.5	Die Spannung	9
1.6	Das Ohmsche Gesetz	10
1.7	Die Kirchhoffschen Regeln	10
1.7.1	1. Kirchhoffsche Regel, Knotenregel	10
1.7.2	2. Kirchhoffsche Regel, Maschenregel	11
2	Grundlagen der Elektrostatik	13
2.1	Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential	13
2.1.1	Der Feldbegriff	13
2.1.2	Superpositionsprinzip	13
2.1.3	Das elektrische Potential	15
2.1.4	Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential	17
2.1.5	Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld	21
2.1.6	Braunsche Röhre	21
2.2	Elektrische Verschiebungsdichte und Gaußscher Satz	21
2.2.1	Fluss eines Vektorfeldes	21
2.2.2	Materie im elektrischen Feld	21
2.2.3	Influenz	22
2.3	Der Kondensator und seine Kapazität	26
2.4	Die Energie des elektrischen Feldes	29
2.5	Isolatoren im Feld	30
2.5.1	Die Verschiebungspolarisation	31
2.5.2	Die Orientierungspolarisation	32
2.5.3	Elektrischer Dipol im inhomogenen Feld	33
2.5.4	Relaxation	35
2.5.5	Die Dielektrizitätskonstante eines Dichten Mediums	37
2.5.6	Elektrische Polarisation in Festkörpern	39
2.5.7	Ferroelektrische Kristalle	39
2.5.8	Ende Kapitel 2, Elektrostatik	40

3	Das zeitlich konstante magnetische Feld	41
3.1	Das Magnetfeld	41
3.1.1	Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters	42
3.1.2	Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule	42
3.2	Das Ampèresche Durchflutungsgesetz	42
3.2.1	Fluss und Zirkulation eines Magnetfeldes	42
3.3	Das Biot-Savartsche Gesetz	45
3.3.1	Magnetisches Moment einer Leiterschleife	48
3.4	Die Bewegung von geladenen Teilchen im magnetischen Feld	49
3.4.1	Bahn freier geladener Teilchen	49
3.4.2	Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter	51
3.4.3	Der Hall-Effekt	51
3.4.4	Quanten Hall-Effekt	52
3.4.5	Der relativistische Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern	53
3.5	Materie im Magnetfeld	55
3.5.1	Permeabilität	55
3.5.2	Diamagnetismus	56
3.5.3	Paramagnetismus	56
3.5.4	Ferromagnetismus	57
3.5.5	Anwendung der magnetischen Feldgleichung in Materie	59
3.6	Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder	62
3.6.1	Induktionsverschiebungen	62
3.6.2	Die Lenzsche Regel	63
3.6.3	Elektrische Generatoren	64
3.6.4	Die Selbstinduktion	65
3.6.5	Energieinhalt des magnetischen Feldes	66
4	Elektrische Schaltkreise	69
4.1	Grundlegende Schaltkreise	69
4.1.1	Einfache Beispiele (noch ohne C und L)	69
4.1.2	Beispiele mit L und C	70
4.2	Schwingkreise	73
4.3	Wechselstromschaltkreis und -widerstände	74
4.3.1	Zeigerdiagramm	77
5	Elektromagnetische Wellen	79
5.1	Der Verschiebungsstrom	79
5.2	Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form	81
5.2.1	Integralsatz von Gauß	82
5.2.2	Integralsatz von Stokes	82
5.3	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen	83
5.3.1	Wellengleichungen aus den Maxwellgleichungen abgeleitet (im Vakuum)	84
5.4	Energiedichte einer elektromagnetischen Welle und der Poynting-Vektor	86
5.5	Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum	86
5.6	Der Skin Effekt	87
5.7	Der Hertzsche Dipol	88
6	Konstanten	91

Kapitel 1

Einführung

1.1 Beobachtete Phänomene

- Blitze
- Reibungselektrizität

Griechen: $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$ *élektron* „Bernstein“

1.1.1 Pioniere der Elektrodynamik

- Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)
- Luigi Galvani (1737-1798)
- Alessandro Volta (1745-1827)
- André-Marie Ampère (1775-1836)
- Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
- Hans Christian Ørsted (1777-1851)
- Georg Simon Ohm (1789-1854)
- Michael Faraday (1791-1867)
- Werner von Siemens (1816-1892)
- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)
- James Clerk Maxwell (1831-1879)
- Heinrich Hertz (1857-1894)
- Albert Einstein (1879-1955)
- Richard Feynman (1918-1988)

1.2 Elektrodynamik ist...

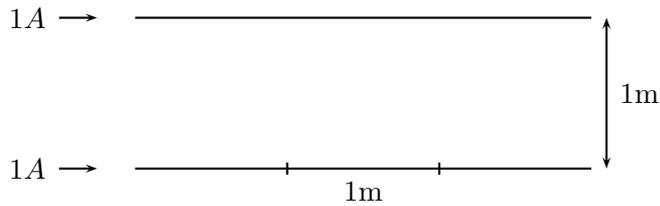
Berechnung elektrodynamischer Felder, erzeugt durch ruhende oder bewegte Ladungen.

Berechnung von Kräften aufgrund elektromagnetischer Felder.

fundamental:

Maxwellsche Gleichungen
Satz von Differentialgleichungen
oder Integralgleichungen

1.3 Basisgröße Stromstärke



$$\frac{\text{Kraft}}{\text{m Länge}} = \frac{1}{5.000.000} \text{N}$$

1.4 Ladungen und Ströme

Ladung ist eine Eigenschaft von Materie, bewirkt elektromagnetische Kräfte
 Symbol der Ladung: Q

Es existieren zwei Sorten:

- positive Ladung +
- negative Ladung -

Eigenschaften:

- gleichartig: abstoßend
- verschieden: anziehend

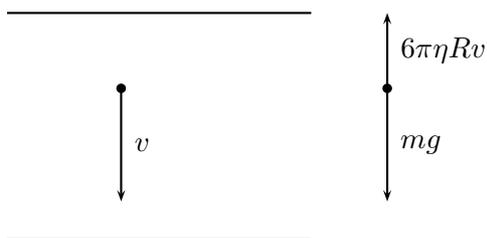
Ladung tritt in der Natur gequantelt auf.

$$Q = n \cdot e \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C (Coulomb)}$$

1.4.1 Millikan-Versuch (1909)

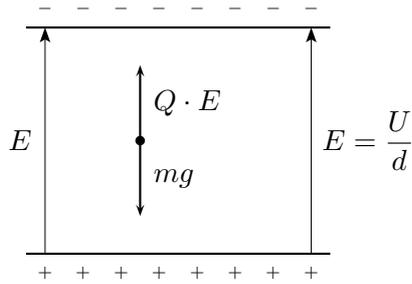
Öltröpfchen im Plattenkondensator

keine angelegte Spannung:



gedämpfter Fall im Schwerfeld der Erde mit bekanntem η , Radius, $m \cdot g$

angelegte Spannung:



Spannung so, dass das Tröpfchen schwebt, d.h. Gleichgewicht ohne Kräfte

$$\implies Q \cdot \frac{U}{d} = m \cdot g$$

$$\implies Q = n \cdot e \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

damals: $e = 1,604 \pm 0,005 \cdot 10^{-19} \text{C}$

Grund für die Ladungsquantelung: Ladung ist Eigenschaft von Elementarteilchen

- Elektron e^- : $Q = -e$
- Positron e^+ : $Q = +e$
- Proton p : $Q = +e$
- Neutron n : $Q = 0$
- Neutrino ν : $Q = 0$
- Photon γ : $Q = 0$
- Quarks u, c, t : $Q = \frac{2}{3}e$
- Quarks d, s, b : $Q = -\frac{1}{3}e$

Quarks treten nur in gebundenen Kombinationen auf, sodass $Q = 0, \pm e$

Kräfte sind groß verglichen mit Gravitation

z.B. elektrostatische Kraft zwischen zwei Protonen ist 10^{36} mal größer als Gravitationskraft zwischen ihnen

Ladungen $+e$ und $-e$ sind betragsmäßig sehr gleich

$$(e^- - e^+) < 10^{-20}e$$

1.4.2 Ladungserhaltung

Im abgeschlossenen System ist die Ladung eine Erhaltungsgröße

- mikroskopisch bei Elementarprozessen

$$n \longrightarrow p + e^- + \nu$$

$$\text{Ladung: } 0 \longrightarrow +e - e 0$$

Die Gesamtladung ändert sich nicht: $\sum_i Q_i = 0$ vorher und nachher.

- makroskopisch bei Strömen

!SKIZZE FEHLT!

Zeitliche Änderungen der Ladung während des Zeitintervalls Δt in einem Teilbereich sind durch Ströme gegeben.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

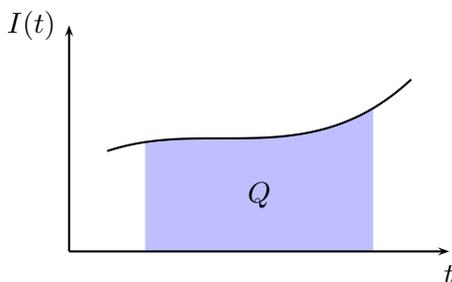
oder

$$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

Umkehrung:

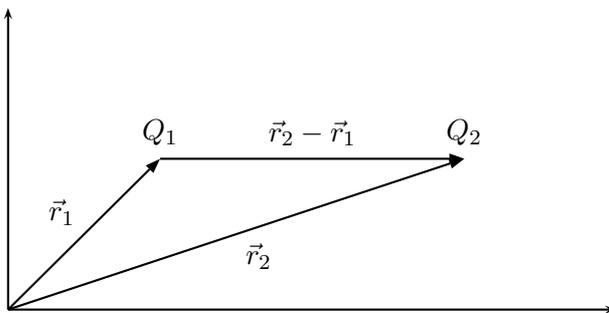
$$Q(t) = Q(t_0) = \int_{t_0}^t I(t') dt'$$

Ladung ist Fläche unter dem Strom als Funktion der Zeit.



Einheiten: $[Q] = [I][t] = As =: C$

Kraft zwischen stehenden, punktförmigen Ladungen Q_1 und Q_2



1.4.3 Coulombsches Kraftgesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

\vec{F} ist die Kraft, die Q_1 auf Q_2 ausübt.

Ähnlichkeit mit Gravitationsgesetz:

- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab.
- Ungleichen Ladungen ziehen sich an.

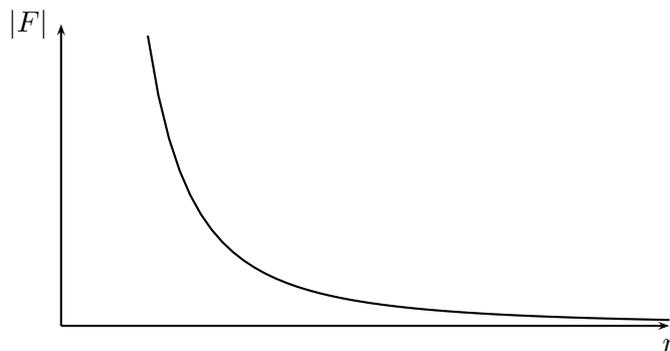
Vorfaktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ist festgelegt durch Konvention der Basiseinheiten.
 ϵ_0 ist eine Naturkonstante.

Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

$$[\epsilon_0] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

grafisch:



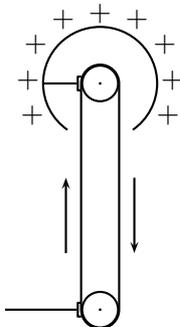
Zusatz-Bemerkung:

Kraft auf bewegte Ladung in einem magnetischen Feld: Lorentzkraft $\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$

1.5 Die Spannung

Um Ladungen verschiedenen Vorzeichens zu trennen, muss Arbeit verrichtet werden.

Van de Graaff-Generator:



Die Spannung ist ein Maß für die aufgewandte Ladungstrennarbeit.

Definition:

$$U = \frac{W}{Q}$$

z.B. zwei Punktladungen:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} d\vec{r}$$

Spannung ist also Arbeit pro Ladung

Damit ergibt sich die Dimension der Spannung

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{\text{J}}{\text{As}} = \frac{\text{Ws}}{\text{As}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} =: \text{V}$$

Sind positive und negative Ladungen getrennt an zwei Orten, so spricht man von einer Spannung zwischen diesen Orten (Punkten), Polen. Werden die Pole miteinander verbunden, so fließt aufgrund der anziehenden Kräfte (z.B. Coulombkraft) ein Strom.

In elektrisch leitenden Festkörpern (z.B. Metalle) herrscht Elektronenüberschuss am „Minuspol“, Elektronenmangel am „Pluspol“. Obwohl Elektronen tatsächlich vom Minuspol zum Pluspol fließen, definiert man die technische Stromrichtung:

In passiven Bauelementen fließt der Strom von „Plus“ nach „Minus“.

Beim Ladungstransport wird mechanische Arbeit verrichtet.

$$W = Q \cdot U, \text{ falls } U = \text{const.}$$

$$\rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot U$$

$$\Leftrightarrow P = I \cdot U$$

P ist die Leistung, $[P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} = \text{AV}$, also Arbeit pro Zeit.

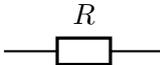
1.6 Das Ohmsche Gesetz

Für viele Systeme, besonders Metalle, findet man folgenden Zusammenhang, der hier nur phänomenologisch eingeführt wird, Spannung und Strom.

$$U = R \cdot I \quad U \sim I$$

R ist der Ohmsche Widerstand

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{V}}{\text{A}} =: \Omega \text{ (Omega)}$$

Symbol: 

Ein makroskopischer Widerstand ist mit einer mikroskopischen Dämpfung und somit Dissipation verbunden.

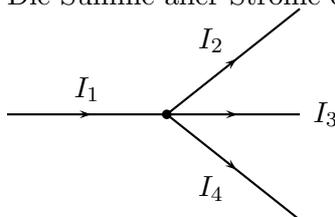
$$\begin{aligned} P &= U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} \\ &= I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R \end{aligned}$$

! Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung kann aber auch ganz anders aussehen. Z.B. Halbleiterdiode (Exponentialgesetz). Widerstand R hängt i.A. von der Temperatur ab.

1.7 Die Kirchhoffschen Regeln

1.7.1 1. Kirchhoffsche Regel, Knotenregel

Die Summe aller Ströme eines Stromknotens ist Null.



In Δt muss gleich viel Ladung zu- wie abfließen, damit ein stationärer Zustand (Fließgleichgewicht) herrscht.

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4$$

1.7.2 2. Kirchhoffsche Regel, Maschenregel

Die Summe aller treibenden Spannungen in einer Masche ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle in der gleichen Masche. Hierbei werden Quellen positiv und Spannungsabfälle negativ gezählt.

$$\sum_i U_i = 0$$

Kapitel 2

Grundlagen der Elektrostatik

2.1 Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential

2.1.1 Der Feldbegriff

Wir wollen eine physikalische Größe f mit

$$f = f(x, y, z, t)$$

als Feld bezeichnen. Bei explizit ortsabhängigen Feldern spricht man von inhomogenen Feldern.

- Ist f ein Vektor, so ist es ein Vektorfeld.
- Ist f ein Skalar, so ist es ein Skalarfeld.

Definition: elektrische Feldstärke

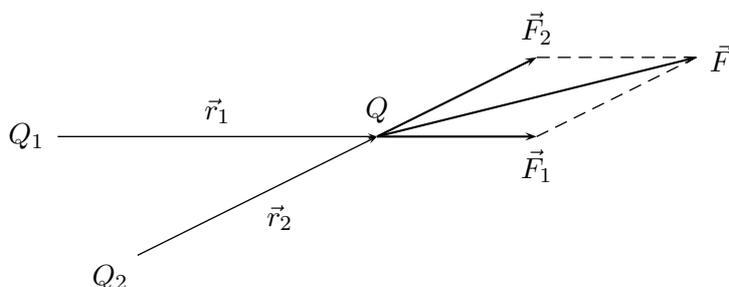
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad \vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

Daraus resultiert die Feldstärke der Ladung Q_1 nach dem Coulombgesetz:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

2.1.2 Superpositionsprinzip

Die experimentelle Beobachtung zeigt, dass sich elektrostatische Kräfte additiv überlagern. Z.B. Coulombkraft von zwei Punktladungen Q_1, Q_2 auf eine Probeladung Q :



Mit der Definition:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

gilt damit auch

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{Q_2}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right)$$

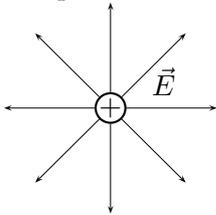
Elektrostatische Felder überlagern sich additiv. Nichttriviales Prinzip!

Dreierkräfte, Kräfte, die nur zwischen drei Teilchen/ Objekten auftreten, sind damit ausgeschlossen.

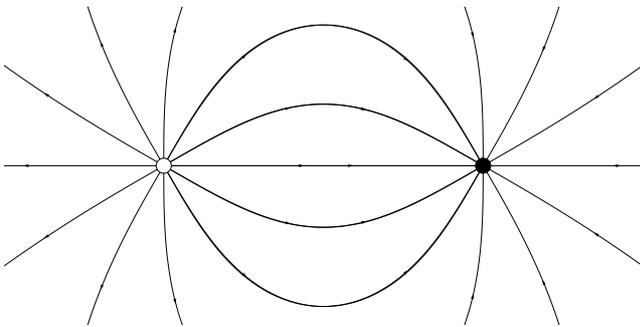
Zur Visualisierung von Feldern allgemein, insbesondere der elektrischen Feldstärke, werden Feldlinien verwendet. Sie sind folgendermaßen definiert:

- Feld zeigt tangential zu den Feldlinien
- Feldlinien kreuzen sich nicht (wegen Eindeutigkeit)
- Feldliniendichte ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke an diesem Ort
- Der Richtungspfeil zeigt von + nach -

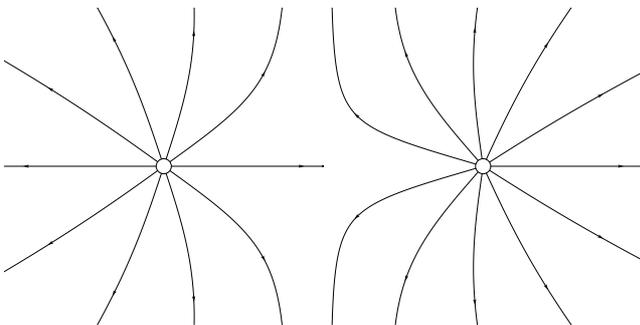
Beispiel: Feld einer Punktladung.



Beispiel: Feld zweier ungleichnamiger Punktladungen

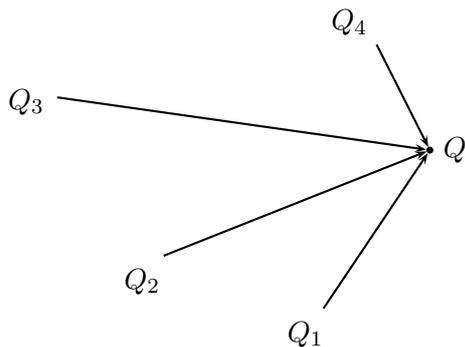


Beispiel: Feld zweier gleichnamiger Punktladungen



Beispiel: homogenes elektrisches Feld **SKIZZE FEHLT!**

Gesamtkraft vieler Ladungen auf eine Ladung Q :



Kontinuierliche Ladung

SKIZZE FEHLT!

elektrisches Feld am Ort \vec{R}

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) dV$$

Kraft auf die Probeladung q am Ort \vec{R}

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}(\vec{R})$$

Bemerkung: Das elektrische Feld einer Punktladung divergiert $\sim \frac{1}{r^2}$ für $r \rightarrow 0$. Wir müssen annehmen, dass alle realen Ladungsträger eine endliche Ausdehnung besitzen.

2.1.3 Das elektrische Potential

Um eine Ladung Q im Feld einer anderen vom Ort \vec{r}_1 zu einem Ort \vec{r}_2 zu bringen, müssen wir die Arbeit W_{12} verrichten.

$$W_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = -Q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

mit der Potentialdifferenz $U_{12} = \frac{W_{12}}{Q}$

$$U_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Beispiel: Coulombsches Feld einer Punktladung

$$\text{mit } |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$U_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

kommen wir aus dem Unendlichen ($r_1 = \infty$)

$$U_{\infty 2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2}$$

Diese Größe hängt nur vom momentanen Ort der Ladung ab: Wir wollen sie als Potential $\varphi(r_2)$ dieses Ortes bezeichnen.

$$\varphi(r_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2}$$

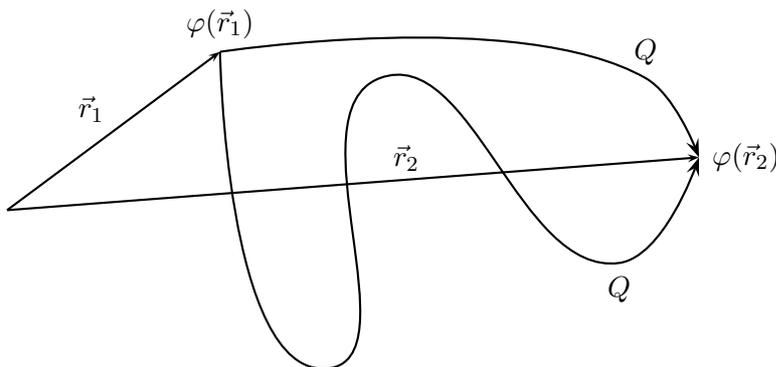
Wir können die Spannung U_{12} somit als Potentialdifferenz

$$U_{12} = \varphi(r_2) - \varphi(r_1)$$

schreiben.

Können wir die elektrische Feldstärke \vec{E} als Funktion von φ ausdrücken?

Zunächst können wir feststellen, dass obiges Arbeitsintegral W_{12} und damit die Potentialdifferenz U_{12} unabhängig vom Weg ist.



Wir sehen damit sofort die Analogie zum Zusammenhang zwischen potentieller Energie und konservativen Kraftfeldern aus der Mechanik.

$\vec{F}(\vec{r}) = Q \cdot \vec{E}(\vec{r})$ ist ein konservatives Kraftfeld.

zunächst eindimensional oder umgekehrt

$$\varphi(x) = - \int_{\infty}^x E(x') dx' \quad E(x) = - \frac{d\varphi}{dx} \text{ mit } \varphi(\infty = 0)$$

in drei Dimensionen

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Das heißt das elektrische Potential $\varphi(\vec{r})$ entspricht dem negativen Wert der Arbeit, um eine positive Einheitsladung in einem elektrischen Feld vom Unendlichen nach \vec{r} zu führen.

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi$$

zur Erinnerung: $\text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$

mit Nabla-Operator $\vec{\nabla}$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

noch einmal Einheiten:

$$\text{Potential } [\varphi] = \text{V} = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{W}}{\text{A}}$$

$$\text{potentielle Energie } [W_{pot}] = [Q \cdot \varphi] = \text{C} \cdot \text{V}$$

$$\text{elektrisches Feld } [\vec{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Das Linienintegral des elektrostatischen Feldes über eine geschlossene Kurve ist Null:

$$\oint_C \vec{E} \, d\vec{r} = 0$$

Die Zirkulation des elektrostatischen Feldes ist Null, das elektrostatische Feld ist wirbelfrei.

Zahlenbeispiele für \vec{E} :

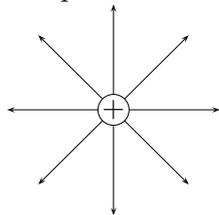
Interplanetarer Raum	$10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{C}}$
Zündung bei trockener Luft	$\sim 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$
in Atomen	$10^9 \frac{\text{N}}{\text{C}}$
in Kernen	$\sim 5 \cdot 10^{20} \frac{\text{N}}{\text{C}}$

2.1.4 Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential

u.A. $\oint_c \vec{E} \, d\vec{r} = 0$

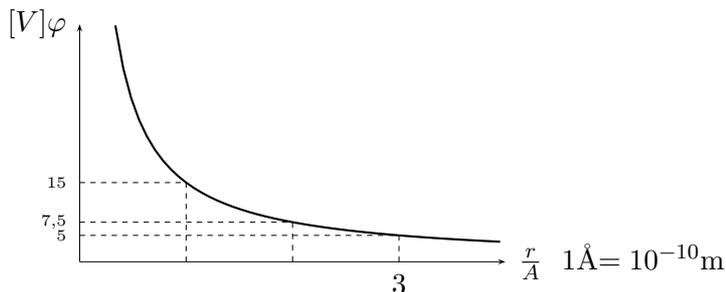
und $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\vec{\nabla} \varphi$

Beispiel: Punktladung



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

z.B. $Q = +e$ (Proton)



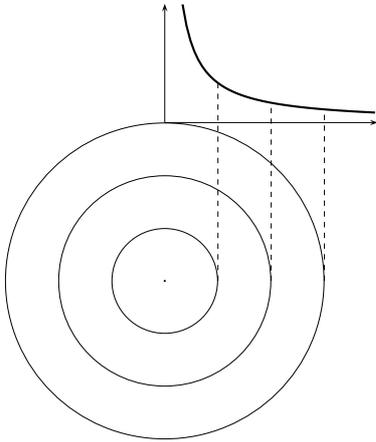
Veranschaulichung durch Äquipotentiallinien (Äquipotentialflächen):

Auf Äquipotentialflächen herrscht immer gleiches Potential ($\varphi = \text{const.}$), d.h. der Potentialunterschied bei Bewegung auf einer Äquipotentialfläche ist Null, $\Delta\varphi = 0$

d.h. $\vec{E} \, d\vec{r} = 0$, $d\varphi = 0$

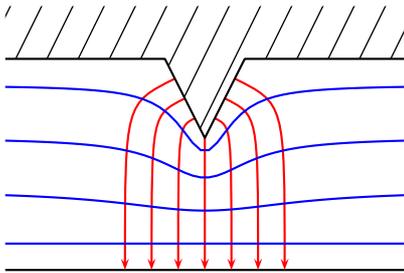
d.h. $d\vec{r} \perp \vec{E}$

Beide Beschreibungsweisen des elektrischen Feldes, also durch die elektrische Feldstärke \vec{E} und andererseits durch das elektrische Potential φ , sind gleichberechtigt.



Äquipotentiallinien sind Kugelschalen bei Punktquellen. Wird Ladung auf Äquipotentialflächen verschoben, ist die Verschiebungsarbeit $W_{AB} = 0$

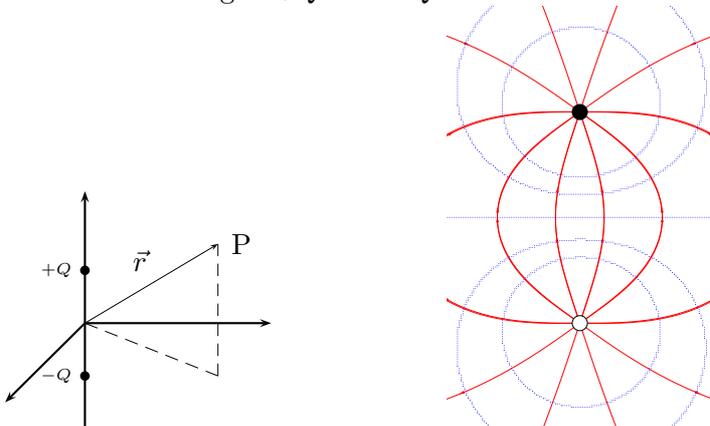
- Die elektrischen Feldlinien stehen immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen.
- Oberflächen von Leitern (Metalle) sind Äquipotentialflächen $\Rightarrow \vec{E} \perp$ Oberfläche.
SKIZZE FEHLT!
- Äquipotentiallinien und elektrischen Feldlinien einer metallischen Spitze



in der Nähe der Spitze sind die Äquipotentiallinien dicht.
 \Rightarrow elektrische Feldstärke, elektrische Kraft sind groß. Anwendungen:

- Blitzableiter
- Geigerscher Spitzenzähler (Elementarteilchenphysik)
- Feldelektronenmikroskop

Beispiel: Potential und Feldstärke eines elektrischen Dipoles
zwei Punktladungen $+Q$ und $-Q$ im Abstand d auf der z -Achse eines Koordinatensystems



$\varphi(x, y, z)$ Potential am Ort P

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} + \frac{-Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \frac{d}{2})^2}} \right]$$

in größerer Entfernung vom Dipol:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 \mp zd + \frac{d^2}{4} \right)^{-1/2} = \left[r^2 \left(1 \mp \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right) \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{zd}{2r^2} \right)$$

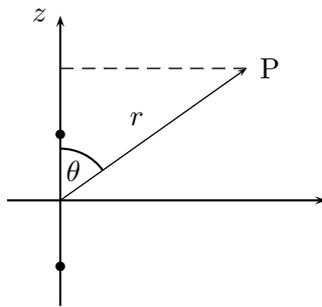
mit $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2}$ für $x \ll 1$ und $\frac{d^2}{4r^2} \rightarrow 0$ für $r \gg d$

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qdz}{r^3}$$

Das Produkt $Q \cdot \vec{d}$ wird als Dipolmoment \vec{p} bezeichnet.

Definition: $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$. Vektor zeigt von $-$ nach $+$.

mit $\frac{z}{r} = \cos \theta$:



$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

elektrisches Feld: $E = -\text{grad } \varphi$ mit $\vec{p} = (0, 0, p)$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

Fernfeld: $\varphi \sim \frac{1}{r^2}$

$E \sim \frac{1}{r^3}$

zweiatomige Moleküle:

HCl, H⁺ Cl⁻ $p_{\text{HCl}} = 3,43 \cdot 10^{-30}$ Cm

→ Die Energieskala der Elementarteilchenphysik.

Ein Elementarteilchen mit der Elementarladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ erhält beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1V eine Energiezunahme von 1 Elektronenvolt = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}$

! Schon bei moderaten Spannungen muss relativistisch gerechnet werden.
relativistischer Massenzuwachs:

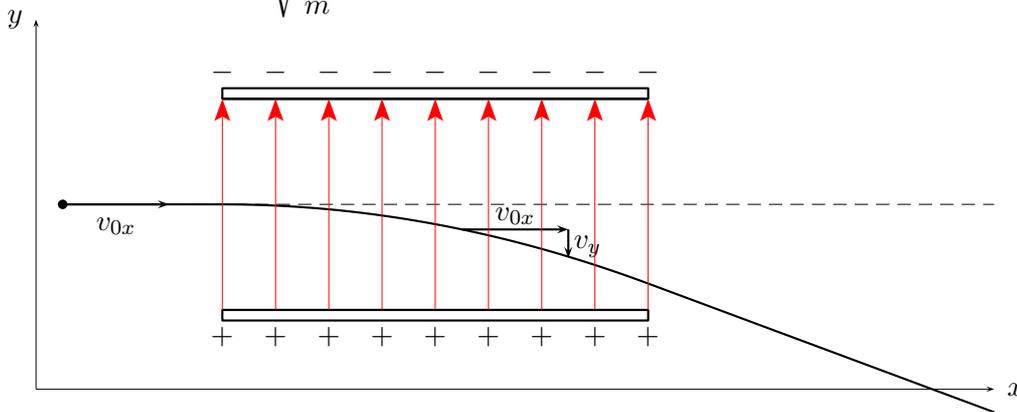
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mit $E_{\text{kin}} = mc^2 - m_0c^2$

$$QU = (m - m_0)c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Bewegung eines Teilchens quer zum elektrischen Feld.

z.B. e^- mit $v_{0x} = \sqrt{\frac{2e}{m} \cdot U_a}$



analog zum horizontalen Wurf \Rightarrow Wurfparabel

!SKIZZE FEHLT!

Dipolmomente lassen sich vektoriell addieren.

Induzierte Dipole:

z.B. H-Atom:

ohne \vec{E} -Feld

mit \vec{E} -Feld

SKIZZE FEHLT! SKIZZE FEHLT!

$$\vec{p} = 0$$

$$\vec{p} = e \cdot \vec{\delta}$$

Allgemein: $\vec{\delta}$ hängt von \vec{E} -Feld ab.

$$\vec{p} = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}$$

α heißt atomare Polarisierbarkeit

Zahlenbeispiele:

α (10^{-24}cm^3) (10^{-30}m^3)	H	He	Li	C	Na
	0,66	0,21	9,3	1,5	27

2.1.5 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

$$\begin{array}{l|l} \vec{F}_{\text{el}} = m\vec{a} & \rightarrow \vec{a} = \frac{Q}{m}\vec{E} \\ Q \cdot \vec{E} = m\vec{a} & \end{array}$$

Im homogenen Feld ist \vec{a} konstant. Kinetische Energie nimmt auf Kosten potentieller Energie zu, entsprechend der Potentialdifferenz entlang des Beschleunigungsweges.

$$\Delta E_{\text{kin}} = \Delta E_{\text{pot}} \quad \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -Q(\varphi_1 - \varphi_2) = Q \cdot U$$

$$\frac{1}{2}mv_2 = Q \cdot U \quad , \text{ falls } v_0 = 0$$

2.1.6 Braunsche Röhre

FETTE SKIZZE FEHLT!

2.2 Elektrische Verschiebungsdichte und Gaußscher Satz

2.2.1 Fluss eines Vektorfeldes

!SKIZZE FEHLT!

z.B. Geschwindigkeit einer Wasserströmung

$\vec{v}(\vec{r})$, ρ Teilchendichte

$\vec{j}(\vec{r}) = \rho \cdot \vec{v}(\vec{r})$ Stromdichte

Teilchendichte pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement $d\vec{A}$:

$$d\Phi = \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \quad , \text{Skalarprodukt}$$

zur Fläche senkrechte Komponente von \vec{j} trägt bei.

Gesamtfluss Φ durch eine geschlossene Fläche:

$$\Phi = \oint_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

misst die Ergiebigkeit einer Wasserquelle Q , die sich innerhalb F befindet.

!SKIZZE FEHLT!

Analogie: elektrische Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes.

2.2.2 Materie im elektrischen Feld

Leiter (Metalle)

- Influenz
- Verschiebung freier Ladungsträger
- das Leiterinnere ist Feldfrei $E = 0$

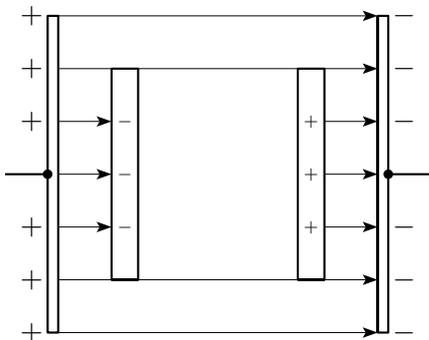
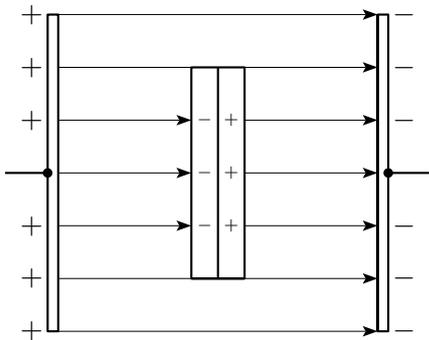
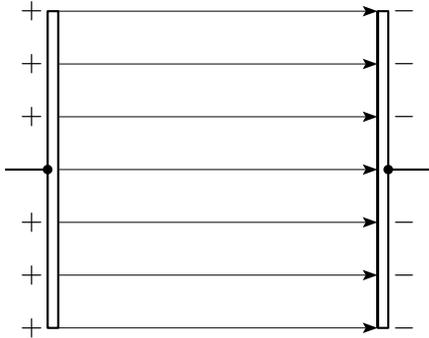
Nichtleiter

- Polarisation, s.u.
 - Dipolherzeugung oder Ausrichtung
 - elektrisches Feld in Innern ist erniedrigt
- $$E_{\text{innen}} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot E_{\text{außen}}$$

ϵ_r ist Materialkonstante (s.u.)

2.2.3 Influenz

Im Leiterinnern ist $\vec{E} = 0$
(Gedanken)Experiment:



SKIZZE FEHLT!

Flächenladungsdichte:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$$

= elektrische Verschiebungsdichte

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \text{ im Vakuum}$$

für ein Flächenelement $d\vec{A}$ ist

$$dQ = \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \text{mit} \quad |\vec{D}| = \sigma$$

Elektrische Feldlinien bilden einen elektrischen Fluß $d\Phi$ auch Flächenelement $d\vec{A}$

$$d\Phi = \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

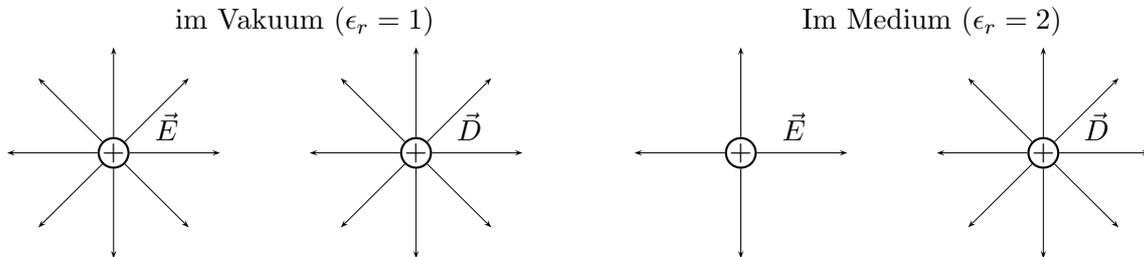
(weitere) Definitionen der elektrischen Verschiebungsdichte \vec{D}

$$\Phi = \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V dQ = Q$$

mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ Im Vakuum

und $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ in vielen Materialien (s.u.)

\vec{D} - und \vec{E} -Feld einer Ladung Q



$$\epsilon_0 = \frac{D}{\epsilon_r E} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

Die elektrische Feldkonstante ϵ_0 gibt an, welche Ladungsdichte σ (in $\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$) von der Feldstärke $E = \frac{V}{\text{m}}$ gebunden wird.

Beispiele:

1. Feld einer Punktladung Q:



$$\oint_{\text{Kugel-OF}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Aus Symmetriegründen ist \vec{E} parallel zu $d\vec{A}$ und $|\vec{E}|$ auf der Kugeloberfläche ist überall gleich.

$$\rightarrow E(\vec{r}) \cdot A(\vec{r}) = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

= Coulombsches Kraftgesetz $\sim \frac{1}{r^2}$!

Der Gaußsche Satz und das Coulombsche Gesetz sind äquivalente Darstellungen der Elektrostatik

Feldverteilung \longleftrightarrow Ladungsverteilung

2. In Beispiel 1 wird nirgends davon Gebrauch gemacht, dass die Ladung punktförmig ist, für jede kugelsymmetrische Ladungsverteilung gilt die gleiche Überlagerung.
 \rightarrow jede kugelsymmetrische Ladungsverteilung hat bei gleicher Gesamtladung das gleiche

Außenfeld.

→ hat man ein Coulombfeld, lässt sich daraus nicht auf den Radius der kugelsymmetrischen Ladungsverteilung schließen (Durchmesser von Atomkernen)

- Der Gaußsche Satz lässt sich auf die Gravitation anwenden wegen $F_{\text{grav.}} \sim \frac{1}{r^2}$
D.h. die Gravitationswirkung auf einen Körper außerhalb der Erde kann so beschrieben werden, als ob ihre gesamte Masse im Erdmittelpunkt konzentriert wäre.
- In einem Leiter (Metall) muss im statischen Fall $E = 0$ sein. Nach dem Gaußschen Satz heißt dies, dass im Volumen eines Leiters im statischen Fall keine Ladung sein kann. Die Ladung eines aufgeladenen Leiters sitzt stets auf der Oberfläche.

gilt auch für Hohlräume

→ abschirmender Effekt

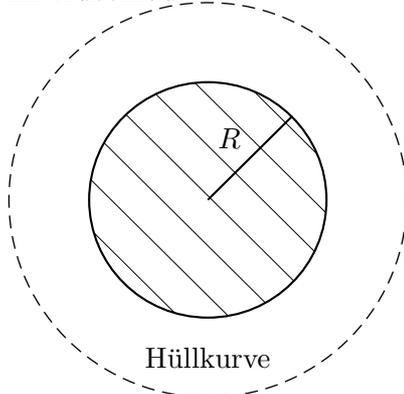
Anwendung: Faraday-Käfig, van de Graaff-Generator

Inneres eines Leiters ist feldfrei:

- Faraday-Käfig
- Faraday-Becher
- van de Graaff-Generator

- Feld einer homogen geladenen Kugel:

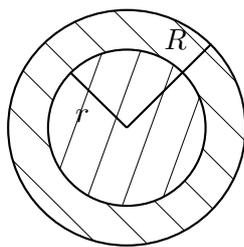
Im Außenraum:



$$\oint_{\text{KugelOF}} \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{wie Punktladung}$$

Im Innenraum:



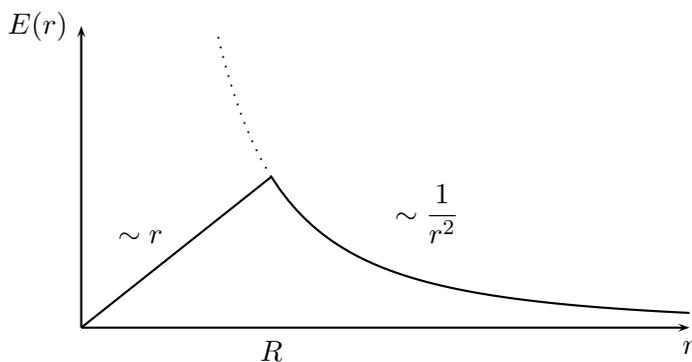
Die Kugel mit Radius r enthält die Ladung Q_r mit

$$\frac{Q_r}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3}$$

$$\oint_{\text{KugelOF}(r)} \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q_r}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$



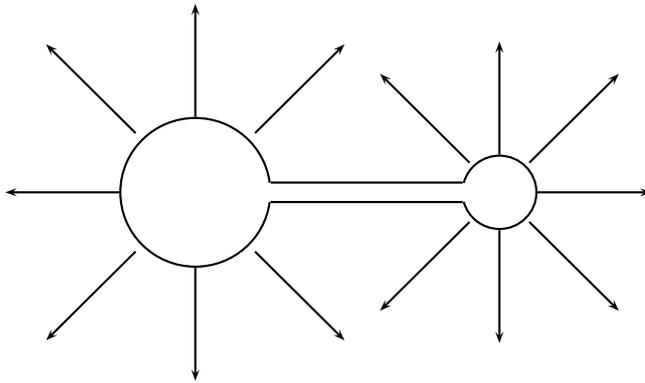
6. Feldüberhöhung an metallischen Spitzen:

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

$$\text{Kugel mit Radius } R: E_{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\varphi}{R}$$

$$\text{Potential bei } R: \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Zwei verbundene Kugeln, gleiches Potential.



Auf der Oberfläche der kleinen Kugel ist die Feldstärke größer als auf der Oberfläche der größeren.

$$E_{\perp} \sim r^{-1} \quad \text{Krümmungsradius } r$$

→ hohe Feldstärken an Spitzen

→ in Hochspannungsgeräten werden nur Bauteile mit großen Krümmungsradien verwendet.

7. Bildladung:

Feldverteilung berechnen zwischen geladenen Metallen beliebiger Form ist i.A. schwierig
→ Computer.

Bei einfachen Geometrien hilft: Metalloberflächen sind Äquipotentialflächen, \vec{E}_{\perp} Oberfläche.

z.B. Feld zwischen einer ebenen Metallplatte und einer Punktladung Q im Abstand r .

SKIZZE FEHLT!

SKIZZE FEHLT!

SKIZZE FEHLT!

Entfernung der gedachten Ladung ändert den Feldverlauf nicht.

Feld so, als wäre eine negative Ladung in gleichem Abstand hinter der Metalloberfläche.

Diese imaginäre Ladung nennt man Bildladung. Entsprechend gibt es eine Bildkraft:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2r)^2}$$

2.3 Der Kondensator und seine Kapazität

SKIZZE FEHLT!

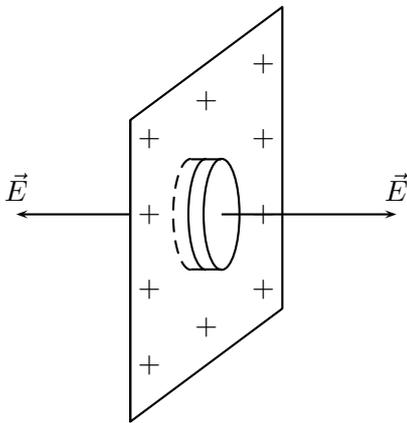
- zwei gegeneinander isolierte Leiterstücke, die entgegengesetzt geladen werden können, nennt man Kondensator.
- Der Proportionalitätsfaktor zwischen Q und U ist die Kapazität $C = \frac{Q}{U}$
- Speicherfähigkeit für Ladungen

$$\text{Einheit : } 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F}$$

Berechnung der Kapazität von Leiteranordnungen

1. ... mit dem Gaußschen Satz.
Beispiel: Plattenkondensator

Feld auf einer ebenen, unendlich ausgedehnten, geladenen Fläche, σ Flächenladungsdichte



Symmetrie: $\vec{E} \perp$ Fläche

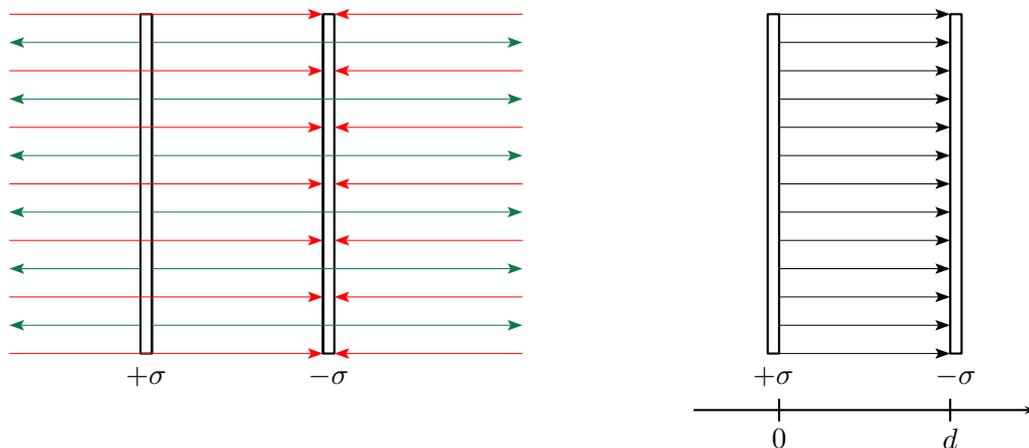
Gaußscher Satz (im Vakuum)

$$\oint_{\text{F}} \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{\text{eingeschlossene Ladung}}{\epsilon_0}$$

$$2 \cdot E \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

zwei entgegengesetzt geladene Platten:



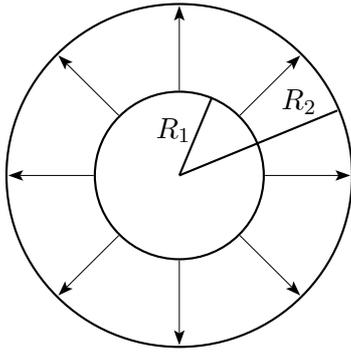
$$U = \int_0^d E \, dx = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} d = \frac{\sigma A}{\epsilon_r \epsilon_0 A} d = \frac{d}{\epsilon_r \epsilon_0 A} Q$$

$$\rightarrow C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{Kapazität eines Plattenkondensators}$$

Achtung: Annahme war ∞ große Platten, d.h. homogenes Feld, Randbereiche ignoriert.

2. ... mit der Definition des Potentials

Beispiel: Kugelkondensator



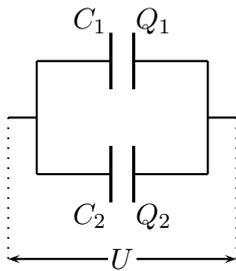
Potentialdifferenz:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Achtung: für $R_2 \rightarrow \infty$: „Kapazität einer Kugel“
Gegenladung im Unendlichen ist erforderlich

Parallelschaltung zweier Kondensatoren

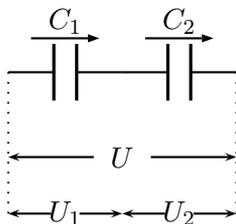


an beiden Kondensatoren liegt die gleiche Spannung U an.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{C_1U + C_2U}{U}$$

$$C = C_1 + C_2$$

Serienschaltung zweier Kondensatoren



die beiden Kondensatoren tragen die gleiche Ladung Q

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

2.4 Die Energie des elektrischen Feldes

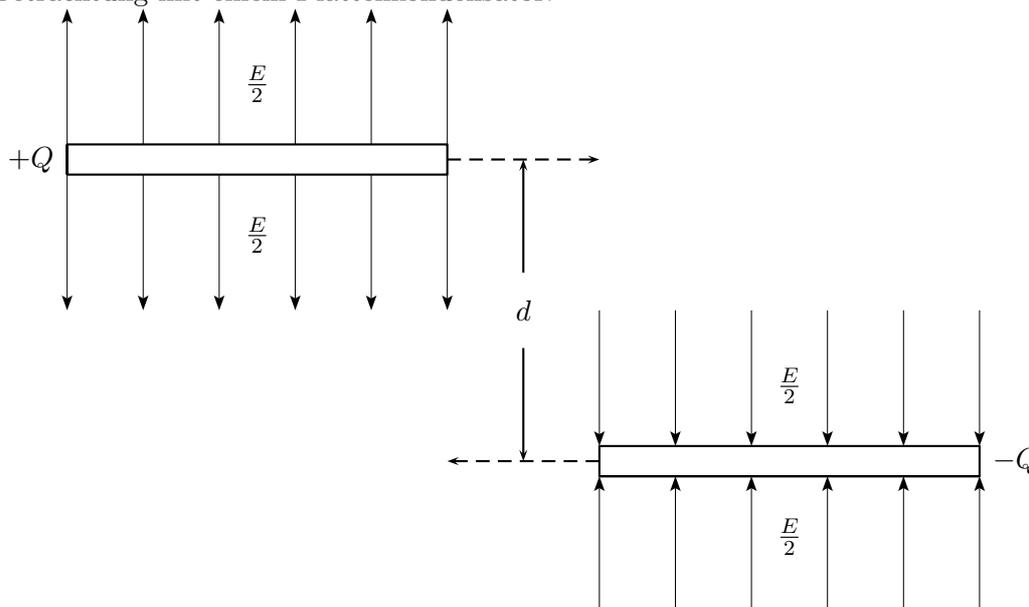
Um einen Leiter aufzuladen, muss Arbeit gegen die abstoßende Kraft der Ladung q verrichtet werden, die sich schon auf dem Leiter mit der Kapazität C befindet.

$$dW = U dq = \frac{q}{C} dq$$

Aufladung auf Q

$$W(Q) = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Betrachtung mit einem Plattenkondensator:



Bringt man die Platten übereinander, erfährt die Platte der Ladung Q im Feld $\frac{E}{2}$ der anderen Platte die Kraft $F = Q \cdot \frac{E}{2}$, $E = \frac{U}{d}$ (homogenes Feld)

$$F = \frac{1}{2} CU \cdot \frac{U}{d} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{Cd} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \quad \text{unabhängig von } d$$

im Plattenkondensator gespeicherte Energie = Arbeit, um die mit Q geladenen Platten von 0 nach d auseinander zu ziehen

$$W = \int_0^d F dx = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_r \epsilon_0 A} x = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Diese Energie ist im elektrischen Feld, im Volumen zwischen den Platten gespeichert.

$$\text{mit } C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}, \quad U = E \cdot d$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot V = \frac{1}{2} D \cdot E \cdot V$$

Energiedichte des elektrischen Feldes

$$w = \frac{W}{V} \quad [w] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad \text{gilt allgemein}$$

mit $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ in vielen Fällen, s.u.

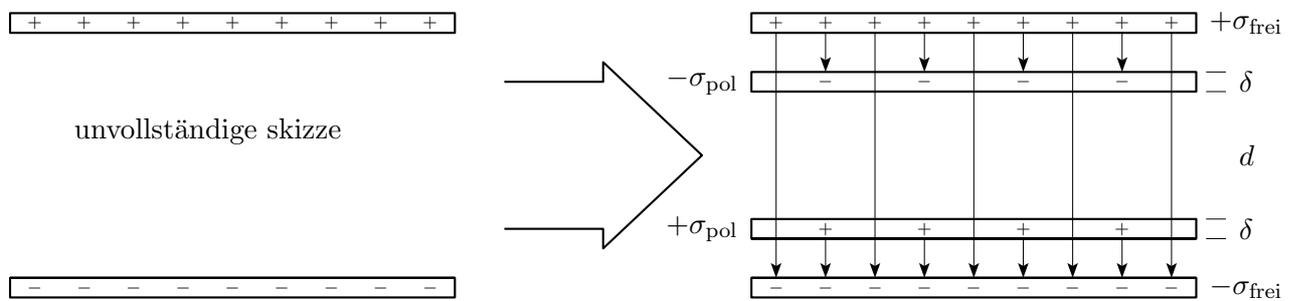
Bemerkung: an isotropen Medien (Festkörpern) muss \vec{D} nicht immer $\parallel \vec{E}$ sein. ϵ ist dann ein Tensor.

2.5 Isolatoren im Feld

Dielektrika, bisher pauschal berücksichtigt durch die Dielektrizitätskonstante ϵ_r . Faktor um den das \vec{E} -Feld geschwächt ist, gegenüber dem Wert im Vakuum, oder als Verhältnis der Kapazitäten eines Plattenkondensators mit oder ohne Dielektrikum.

$$\epsilon_r = \frac{C_{\text{mit}}}{C_{\text{ohne}}}$$

„Ursache“ für ϵ_r ist Polarisation des Mediums im elektrischen Feld. Es werden atomare Dipole induziert oder vorhandene Dipole ausgerichtet.



Durch die kleine Verschiebung der Ladungsschwerpunkte entsteht eine Flächenladung σ_{pol} auf der Oberfläche A des Isolators, sein Inneres bleibt neutral.

$$\sigma_{\text{pol}} = nA\delta \cdot \frac{q}{A} = n \cdot q \cdot \frac{A\delta}{A} = n \cdot q \cdot \delta = n \cdot p$$

- p atomares, induziertes Dipolmoment
- n Dichte der polarisierbaren Atome

gesamter Isolator ist ein Dipol mit dem Dipolmoment

$$Q_{\text{pol}} \cdot d = \sigma_{\text{pol}} \cdot Ad = np \cdot Ad$$

Polarisation = Dipolmoment pro Volumeneinheit

$$\vec{P} = n\vec{p} \quad \text{mit} \quad P = \sigma_{\text{pol}}$$

in vielen Fällen ist \vec{P} proportional \vec{E} im Dielektrikum

$$\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \chi \text{ dielektrische Suszeptibilität}$$

Bemerkung: in Festkörpern ist χ oft ein Tensor

$$\vec{P} = \text{nicht immer } \parallel \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

im einfachsten Fall, z.B. für nichtpolare Atome oder Moleküle ist $\chi = n \cdot \alpha$, α atomare Polarisierbarkeit

Aber Vorsicht, \vec{E} hängt von der Polarisation der Nachbaratome ab. In dichten Medien ist die Linearität nicht mehr gut erfüllt.

Feld im Innern des Isolators?

leerer Plattenkondensator: $E_0 = \frac{\sigma_{\text{frei}}}{\epsilon_0}$

mit Dielektrikum gefüllt:

$$E = \frac{\sigma_{\text{frei}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{frei}} - P}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \epsilon_0 E + P = \sigma_{\text{frei}} = D$$

oder $E = E_0 - \chi \cdot E$

$$\frac{E_0}{E} = 1 + \chi = \epsilon_r \quad \text{und} \quad D = \epsilon_r \epsilon_0 E$$

Bei festem Plattenabstand d gilt $E = \frac{U}{d}$, $E_0 = \frac{U_0}{d}$

also $\frac{U_0}{U} = \epsilon_r$ bei gegebener Ladung Q auf den Platten.

damit wird das Verhältnis der Kapazitäten:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\frac{Q}{U}}{\frac{Q}{U_0}} = \frac{U_0}{U} = \frac{E_0}{E} = \epsilon_r$$

Zahlenbeispiele:

Luft	gasförmig (1bar)	1,00059
H ₂ O	gas, 110°C (1bar)	1,0126
H ₂ O	flüssig, 20°C	81
Polymere	fest	2 – 4
Glas	fest	4 – 8
Al ₂ O ₃	Kristall	12

spez. Keramiken bis $10^4 \rightarrow$ große Kapazität bei kleinem Volumen

SKIZZE FEHLT!

2.5.1 Die Verschiebungspolarisation

Im elektrischen Feld werden Ladungen (Elektronen, ?, Ionenrümpfe) gegeneinander verschoben, rücktreibende Kräfte sind (ca.) proportional zur Auslenkung.

Was passiert in einem elektrischen Wechselfeld mit z.B. den Elektronen eines Atoms?

Antwort: siehe harmonischer Oszillator mit periodischem Antrieb.

Bewegungsgleichung:

$$m_e \ddot{x} + m_e \omega_0^2 x = q E_0 \cos \omega t$$

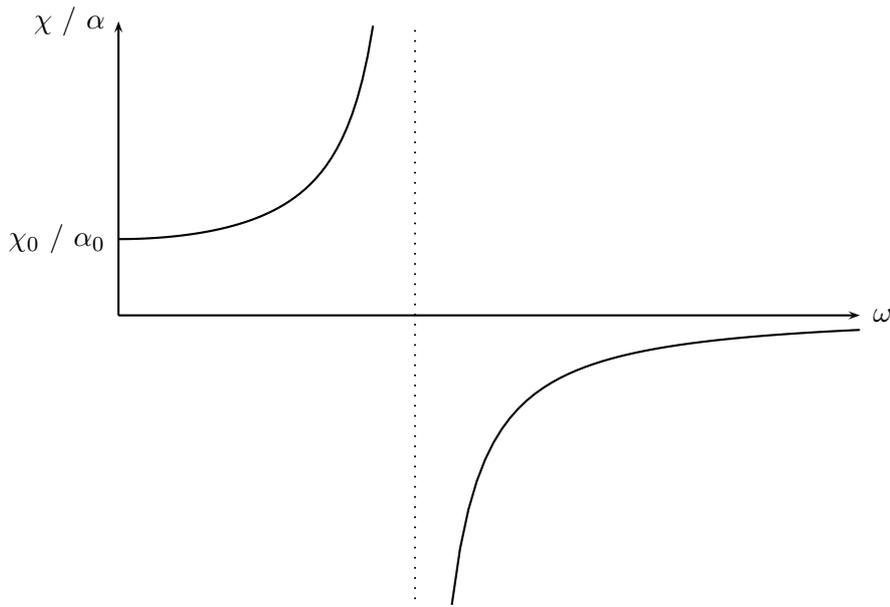
Lösung:

$$x = x_0 \cos \omega t \quad \text{mit} \quad x_0 = \frac{q \cdot E}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Auslenkung x entspricht ein oszillierendes Dipolmoment $p = q \cdot x$.

$$p = \frac{q^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E = \epsilon_0 \cdot \alpha(\omega) \cdot E$$

Polarisierbarkeit: $\alpha = \alpha(\omega)$



Statische Polarisierbarkeit ($\omega = 0$)

$$\alpha_0 = \frac{q^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}$$

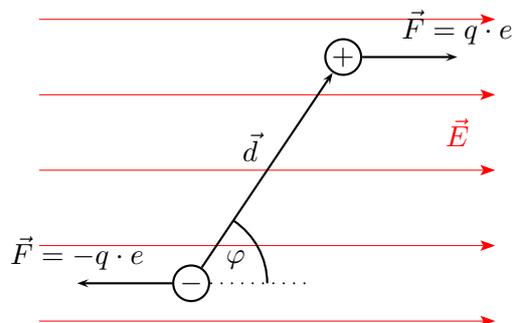
bei $\omega \approx \omega_0$ wird α groß und wechselt das Vorzeichen, für $\omega \gg \omega_0$ geht α gegen 0.

ω_0 liegt bei optischen Frequenzen (sichtbar bis UV) für Verschiebung von Elektronen und im Infraroten für Verschiebung von Ionen in Festkörpern \rightarrow Optik, Atom-, und Festkörperphysik.

Verschiebungspolarisation ist unabhängig von der Temperatur.

dielektrische Suszeptibilität $\chi = n \cdot \alpha$.

2.5.2 Die Orientierungspolarisation



elektrischer Dipol im homogenen elektrischen Feld:

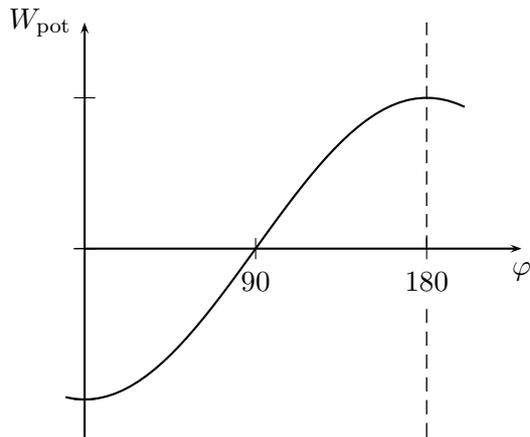
erfährt keine resultierende Kraft, aber ein Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = q(\vec{d} \times \vec{E}) = \vec{p} \times \vec{E}$$

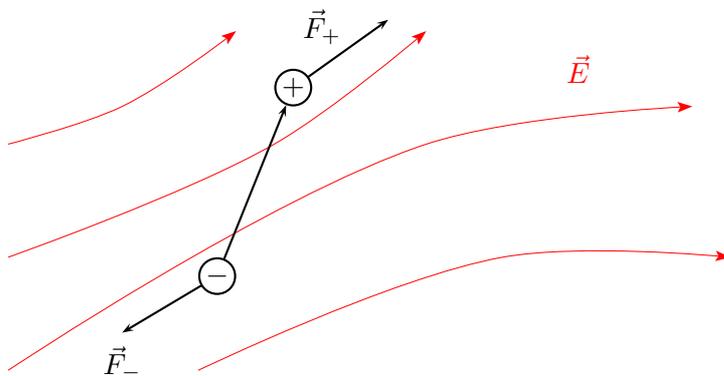
Betrag: $M = p \cdot E \cdot \sin \varphi$

mit der Drehung ist eine Arbeitsleistung verknüpft, Dipol gibt potentielle Energie ab, wenn φ kleiner wird: $dW = -Md\varphi$

$$W_{\text{pot}}(\varphi) = \int Md\varphi = -p \cdot E \cos \varphi + C = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



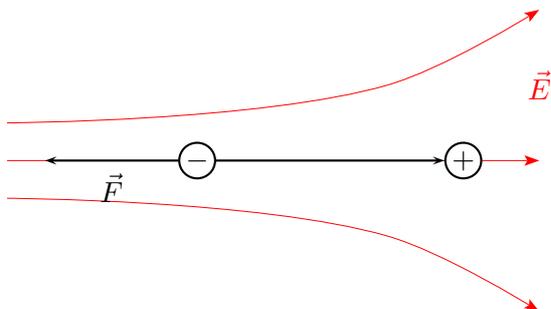
2.5.3 Elektrischer Dipol im inhomogenen Feld



resultierende Kraft $\neq 0$

hängt vom Ort und Orientierung ab.

falls $d \parallel \vec{E}_{\text{lokal}}$: $F = p \cdot \text{grad } E$



Dipol wird in Richtung wachsendes Feld gezogen.

nichtpolare Moleküle besitzen im elektrischen Feld ein induziertes Dipolmoment $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$,

$$\text{in } +z: \frac{n}{6} \left(1 + \frac{pE}{k_B T} \right)$$

$$\text{in } -z: \frac{n}{6} \left(1 - \frac{pE}{k_B T} \right)$$

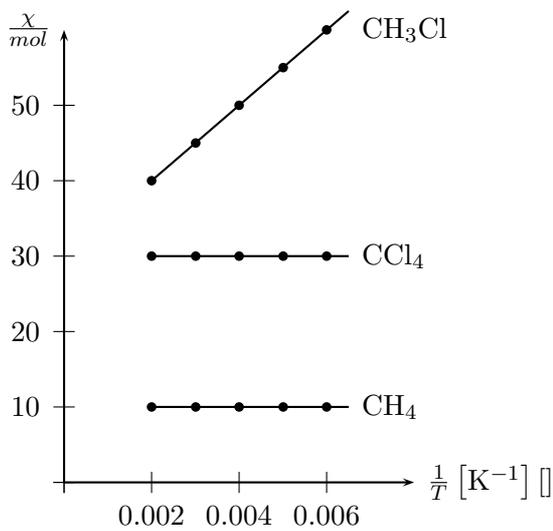
n : Dichte der Moleküle

resultierende Polarisation:

$$P = \frac{n}{6} \left(1 + \frac{pE}{k_B T} \right) \cdot p - \frac{n}{6} \left(1 - \frac{pE}{k_B T} \right) \cdot p$$

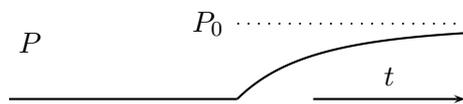
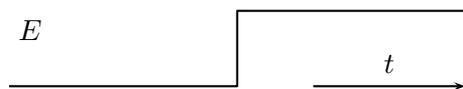
$$P = \frac{np^2 E}{3k_B T} \text{ bessere Rechnung ergibt das gleiche}$$

$$\chi = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{np^2}{\epsilon_0 3k_B T} \sim \frac{1}{T}$$

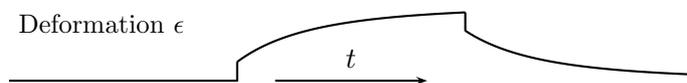
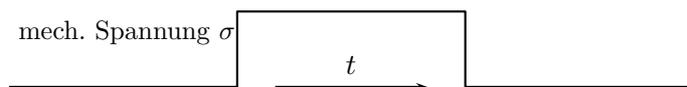


2.5.4 Relaxation

Die Orientierungspolarisation stellt sich nach dem Einschalten eines elektrischen Feldes nur mit zeitlicher Verzögerung ein.



exp: Relaxation Nylonfaden



exponentieller Zeitverlauf

Idee:

$$\frac{dP(t)}{dt} \sim P_0 - P(t)$$

Änderungsrate \sim Abstand von der Gleichgewichtspolarisation P_0 .
bekannte und bewährte Mathematik

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{P_0 - P(t)}{\tau}$$

$$\rightarrow P(t) = P_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$P_0 = \chi_0 \epsilon_0 E$$

Was passiert beim Anlegen von Wechselfeldern?

$$E = E_0 \cdot \cos \omega t$$

bei niedrigen Frequenzen, $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

Polarisation kann folgen, Suszeptibilität wie im statischen Grenzfall:

$$\chi = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{P_0}{\epsilon_0 E} = \chi_0$$

bei hohen Frequenzen, $\omega \gg \frac{1}{\tau}$

Dipole haben nicht genug Zeit, sich auszurichten, Polarisation kann sich nicht aufbauen:

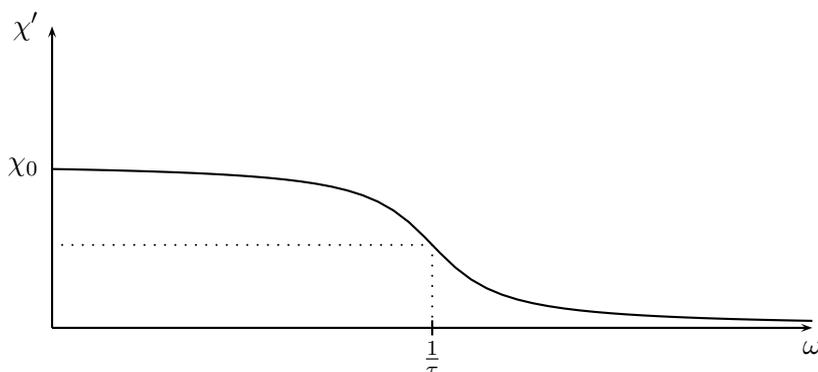
$$P = 0, \quad \chi = 0$$

Übergang bei mittleren Frequenzen $\omega \approx \frac{1}{\tau}$

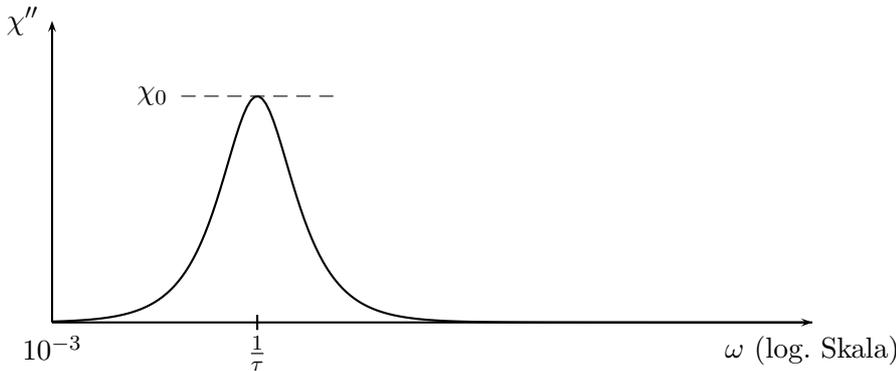
Dort gibt es ein Maximum in der dielektrischen Absorption, die mit dem Imaginärteil von $\chi(\omega)$ verknüpft ist.

$$\text{Dynamische Suszeptibilität} \quad \chi(\omega) = \frac{P(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)}$$

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$$



$\Rightarrow \epsilon' = 1 + \chi'$, die Dielektrizitätskonstante



wichtiger, nicht resonanter Mechanismus für die Wechselwirkung von elektrischen, magnetischen und elastischen Feldern mit Materie.

- Aufklärung atomarer Bewegungsprozesse in den Materialwissenschaften
- Anwendung: Mikrowellenofen, Frequenz 2.45GHz

maximale Absorption bei $\omega\tau = 1$

letzte Frage: was ist τ ?

makroskopisch: Relaxationszeit, P hat sich auf $\frac{1}{e}$ geändert.

mikroskopisch: Charakteristische Zeit für die Umorientierung der Moleküle, ist im Allgemeinen temperaturabhängig.

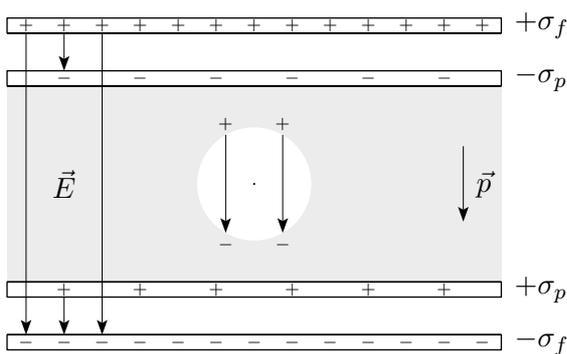
z.B. $\tau = \tau_0 \cdot e^{\frac{E_a}{k_B T}}$ Arrheniusgesetz

SKIZZE FEHLT!

2.5.5 Die Dielektrizitätskonstante eines Dichten Mediums

hier: $E = \frac{\sigma_f - \sigma_p}{\epsilon_0}$, das gilt nur bei geringer Dichte des Mediums.

In dichten Medien wirkt eine größere Feldstärke auf jedes Atom.



Atom sitzt in einem kugelförmigen Hohlraum, in dem die elektrische Feldstärke erhöht ist.

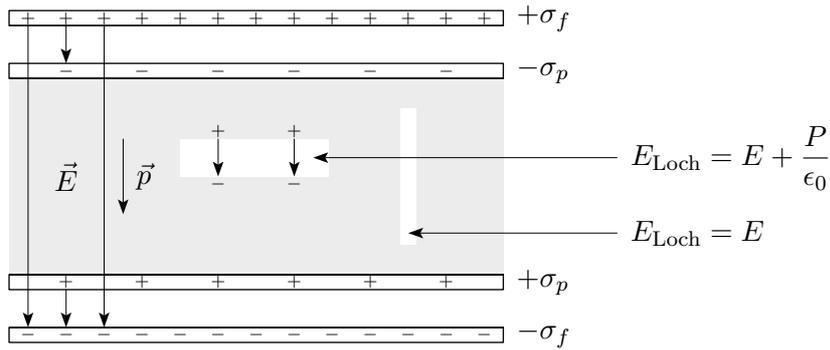
$$E_{\text{Loch}} = E + \frac{1}{3} \frac{P}{\epsilon_0}$$

Depolarisierungsfaktor:

$\frac{1}{3}$ bei Kugelformen (s.u.)

1 bei Platte $\perp \vec{E}$

0 bei Platte $\parallel \vec{E}$



Damit wirkt die Polarisation

$$\vec{P} = n \cdot \alpha \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}_{\text{Loch}} = n \cdot \alpha \cdot \epsilon_0 \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\rightarrow \vec{P} = \frac{n \cdot \alpha}{1 - \frac{n \cdot \alpha}{3}} \epsilon_0 \vec{E} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

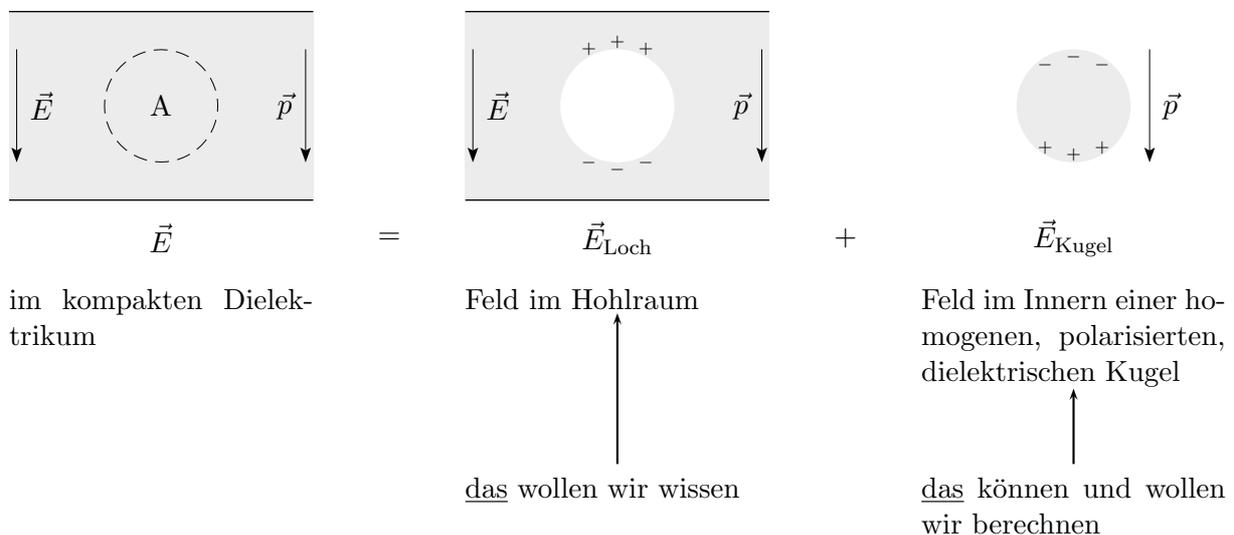
Suszeptibilität/ Dielektrizitätskonstante für dichte Medien:

$$\chi = \frac{n \cdot \alpha}{1 - \frac{n \cdot \alpha}{3}} \quad \epsilon = 1 + \frac{n \cdot \alpha}{1 - \frac{n \cdot \alpha}{3}} \quad \text{Clausius-Mosotti-Beziehung}$$

Damit lässt sich die Dielektrizitätskonstante einer Flüssigkeit berechnen, wenn man die Dielektrizitätskonstante des Gases ($\epsilon_{\text{gas}} = 1 + n_{\text{gas}}\alpha$) kennt.

	ϵ_{gas}	ρ_{gas}	$\rho_{\text{flüssig}}$	$\frac{\rho_{\text{flüssig}}}{\rho_{\text{gas}}}$	$\epsilon_{\text{cal.}}$	$\epsilon_{\text{exp.}}$
O ₂	1,000523	0,00142	1,19	832	1,509	1,507
CCl ₄	1,0030	0,00489	1,59	325	2,45	2,24

zurück zum Depolarisierungsfaktor einer Kugel
wegen des Superpositionsprinzips gilt:



!SKIZZE FEHLT!

- im Kugelvolumen:

$$\vec{P} \text{ und } \vec{E}_{\text{Kugel}} \text{ homogen}$$

- im Außenraum:

Feld eines elektrischen Dipols, weil positive und negative Ladungen kugelsymmetrisch verteilt sind und daher als Gesamtladung im Kugelmittelpunkt betrachtet werden können, mit einer kleinen Verschiebung $\vec{\delta}$
 $\hat{=}$ von Außen gesehen ein Dipol

$$\vec{p}_0 = Q \cdot \vec{\delta} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \cdot n \cdot q \cdot \vec{\delta}$$

$$\vec{p}_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \vec{P}$$

Potential eines Drehmoments \vec{p}_0 im Abstand r_0 , d.h. auf der Kugeloberfläche (s. oben)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r_0^3} z$$

$$\varphi = \frac{P}{3\epsilon_0} z \quad \text{auf der Kugeloberfläche}$$

In der Kugel

$$\varphi = -E_{\text{Kugel}} \cdot z, \text{ damit } E_{\text{Kugel}} \text{ homogen ist}$$

An der Oberfläche müssen beide Potentiale gleich sein:

$$\vec{E}_{\text{Kugel}} = \frac{-\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{E}_{\text{Loch}} = \vec{E} - E_{\text{Kugel}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

2.5.6 Elektrische Polarisation in Festkörpern

Durch geordneten Aufbau von „Molekülen“ mit permanentem Dipolmoment können ganze Kristalle ein permanentes Dipolmoment besitzen, ohne angelegtes elektrisches Feld. Oberflächenladungen sind normalerweise neutralisiert, Änderungen sind aber leicht nachweisbar.

Bei Temperaturänderungen: pyroelektrische Kristalle

Empfindlichkeit $\sim 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$

bei Druckveränderung: piezoelektrische Kristalle

z.B. Quarz, Frequenznormale

2.5.7 Ferroelektrische Kristalle

...besitzen eine permanente Polarisation nur unterhalb einer kritischen Temperatur T_C .

!SKIZZE FEHLT!

Erklärung mit der Clausius-Mosotti-Beziehung:

$$\chi = \frac{3n \cdot \alpha}{3 - n \cdot \alpha}$$

oberhalb von T_C ist $n \cdot \alpha \lesssim 3 \rightarrow \chi$ endlich.

Beim Abkühlen wächst $n \cdot \alpha$ wegen thermischer Kontraktion, bei T_C wird $n \cdot \alpha = 3$

$\rightarrow \chi$ divergiert, Polarisationskatastrophe, kleinste Felder erzeugen Polarisation

\rightarrow spontane Polarisation des Gitters

knapp oberhalb von T_C etwas genauer:

wir entwickeln $n \cdot \alpha \lesssim 3$

$$n \cdot \alpha = 3 - \beta(T - T_C) + \dots$$

$$\chi = \frac{3(3 - \beta(T - T_C))}{\beta(T - T_C)} = \frac{9}{\beta(T - T_C)} \approx \frac{1}{T - T_C}$$

!SKIZZE FEHLT!

2.5.8 Ende Kapitel 2, Elektrostatik

$$\oint_{\mathbf{F}} \vec{E} \, d\vec{r} = 0 \quad \text{elektrisches Feld ist wirbelfrei, hat ein Potential}$$

$$\oint_{\mathbf{F}} \vec{D} \, d\vec{A} = Q \quad \text{Ladung sind Quellen des elektrischen Feldes}$$

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{in vielen Fällen}$$

Kapitel 3

Das zeitlich konstante magnetische Feld

3.1 Das Magnetfeld

Erfahrung: Es gibt Kräfte, die sich grundsätzlich von Coulomb- oder Gravitationskräften unterscheiden. Sie treten auf zwischen:

- stromdurchflossenen Leitern
- Werkstoffen („Magneten“), in denen atomare Ströme orientiert sind
- bewegten Ladungen

Stärke und Richtung der Urkraft werden durch ein Vektorfeld beschrieben: Das magnetische Feld wird wieder durch Feldlinien veranschaulicht.

z.B. Stabmagnet

!SKIZZE FEHLT!

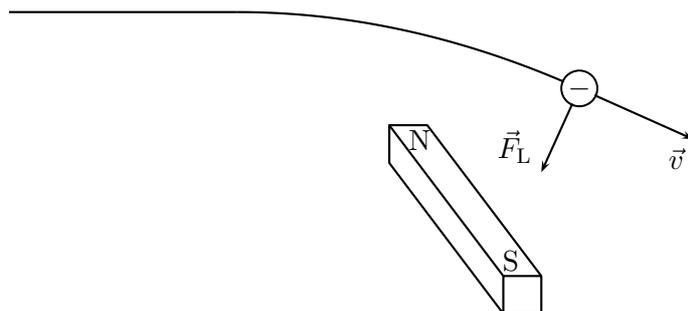
besitzt also Nord- und Südpol,
außerhalb laufen die Feldlinien von N→S

!SKIZZE FEHLT!

Magnetfeld ist eindeutig bestimmbar

z.B. Kraft auf bewegte Ladung

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Lorentzkraft}$$



Das \vec{B} -Feld, „Magnetfeld“ (oft auch „magnetische Flussdichte“) hat die Einheit Tesla:

$$1\text{T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

3.1.1 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

!SKIZZE FEHLT!

H.C. Oerstedt 1820

konzentrisch, „rechte Hand“

$$B \approx \frac{I}{r}$$

$$\text{vektoriell} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{r^2}$$

mit μ_0 = magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

ergibt sich aus der Kraftwirkung elektrischer Ströme, siehe Definition des Ampere.

Superpositionsprinzip:

!SKIZZE FEHLT!

!SKIZZE FEHLT!

3.1.2 Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule

Innen: homogenes Feld

Außen: wie Stabmagnet

Hinweis darauf, dass Magnetfelder im Permanentmagneten durch ähnliche, mikroskopische Kreisströme erzeugt werden.

3.2 Das Ampèresche Durchflutungsgesetz

3.2.1 Fluss und Zirkulation eines Magnetfeldes

$$\text{magnetischer Fluss} \quad \Phi = \int_{\text{F}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{analog elektrischem Feld}$$

wichtige Größe bei Effekten, die mit zeitlichen Änderungen von Feldern zusammenhängen → Induktion s.u.

$$\text{Einheit: } [\Phi] = 1 \text{ Weber} = 1\text{Wb} = 1\text{Vs} = 1\text{Tm}^2$$

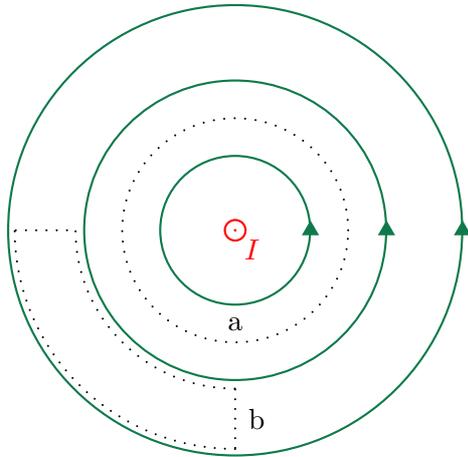
Es gilt: magnetische Feldlinien sind stets geschlossen!

Fluss aus der geschlossenen Fläche ist Null, Magnetfelder sind quellenfrei, es gibt keine magnetischen Monopole.

$$\oint_{\text{F}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Zirkulation:

$$\oint_C \vec{B} \, d\vec{r} \quad \text{über einen geschlossenen Weg } C$$



Integrationsweg a, konzentrischer Kreis:

$$\oint_a \vec{B} \, d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

unabhängig vom Radius, wegen $B \sim \frac{1}{r}$

Integrationsweg b:

auf den radial gerichteten Stücken ist

$$\vec{B} \, d\vec{r} = 0 \quad \text{und} \quad \int_{S_1} \vec{B} \, d\vec{r} = - \int_{S_2} \vec{B} \, d\vec{r}$$

es gilt allgemein:

$$\oint_C \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I \quad \text{Ampèresches Gesetz/ Durchflussgesetz}$$

Die eingeschlossenen Ströme können auch verteilt sein:

$$I = \int_F \vec{J} \, d\vec{A}, \quad \vec{J} = \text{Stromdichte in } \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

damit

$$\oint_C \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{J} \, d\vec{A}$$

Mit dem Ampèreschen Gesetz wird oft als Magnetfeld das \vec{H} -Feld eingeführt, mit:

$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{r} = I$$

Das \vec{H} -Feld ist unmittelbar mit dem erzeugendem Strom (makroskopisch) verknüpft und heißt daher auch „magnetische Erregung“

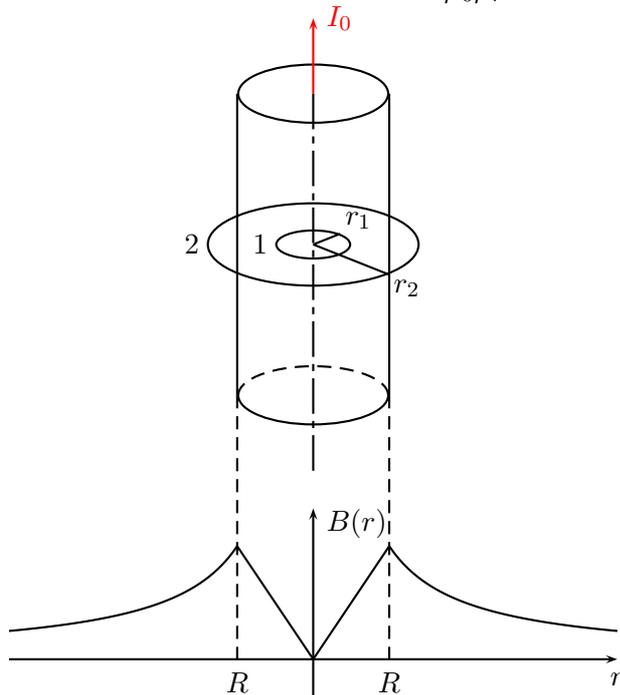
Einheit:

$$[H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

es gilt:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{im Vakuum}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \text{in vielen Materialien}$$



Weg 1 im Innern:

$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = B(r_1) \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 I_0 \frac{r_1^2}{R^2}$$

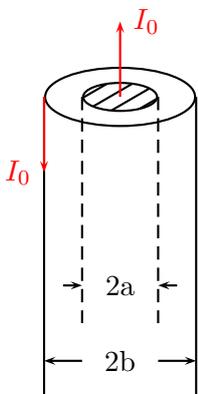
$$\rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} r$$

Weg 2 im Außenraum:

$$B(r_2) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_2}$$

Beispiel: Koaxialkabel (technisch wichtig)

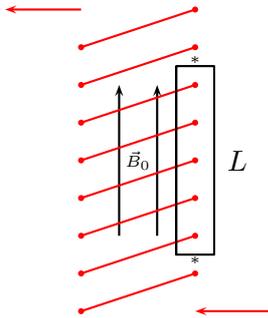
Innen- und Außenleiter tragen entgegengesetzten Strom.



$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad \text{für } a \leq r \leq b$$

Außenraum ist feldfrei.

Beispiel: lange Spule (Solenoid)



∞ lang: $B_{\text{außen}} = 0$
 bei * ist $\vec{B} \perp d\vec{r}$ oder $B = 0$

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = B_0 \cdot L = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

$$B_0 = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot I$$

Welche Feldstärken kann man erreichen?

- konstante Felder:
 - Cu-Spule: ~ 30 T 10cm^3 Volumen
 - ! $\sim 1,5$ MW Heizleistung, Wasserkühlung
- supraleitende Spulen:
 - bis 100T
 - !SKIZZE FEHLT!**
 - Strom aus Kondensatorbänken
 - max: $2 \cdot 10^3$ T, Implosionstechnik

3.3 Das Biot-Savartsche Gesetz

Zur Berechnung des magnetischen Feldes beliebig geformter stromdurchflossener Leiter in Analogie zum elektrischen Feld.

$$\text{Punktladung: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi r^3} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

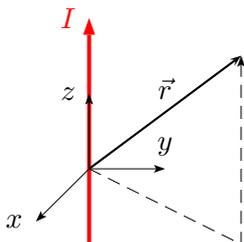
$$\text{Ladungsverteilung: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i \vec{r}_i}{r_i^2}$$

hier: Das Leiterstück $d\vec{l}$ mit dem Strom I erzeugt im Abstand \vec{r} das Magnetfeld

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad \text{Biot-Savartsches Gesetz}$$

folgt aus Quellenfreiheit der magnetischen Feldes und dem Ampèreschen Gesetz.

Beispiel: langer, gerader Draht:



Parametrisierung:

$$d\vec{l} = (0, 0, 1)dt$$

$$\vec{r} = (x, y, z - 1)$$

damit:

$$d\vec{l} \times \vec{r} = (-y, x, 0)dt$$

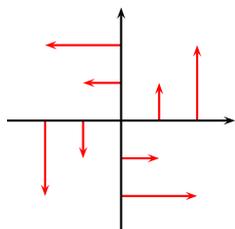
Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-y, x, 0) \Big|_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}^3} \quad \text{o.B.d.A. } z = 0$$

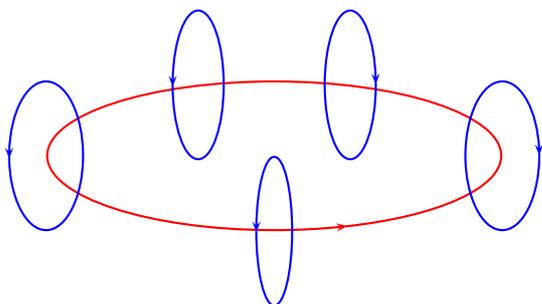
Integraltyp: $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}}$ mit $X = a^2 + x^2$, Vorsicht bei Grenzen ∞

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-y, x, 0) \frac{2}{x^2 + y^2}$$

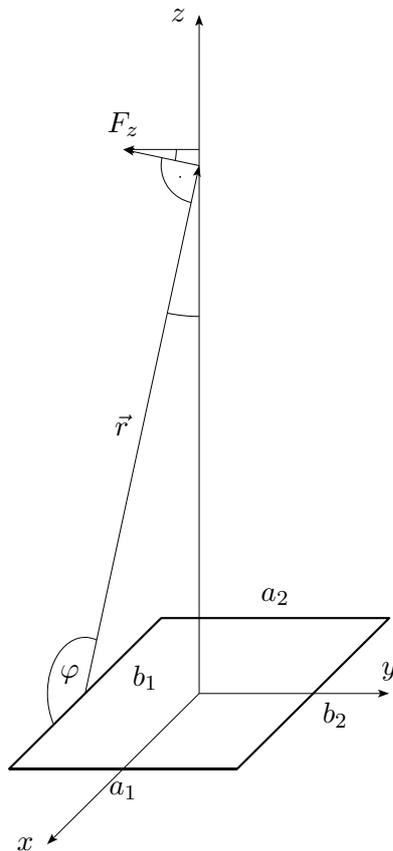
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Beispiel: Magnetfeld eines Ringstromes oder magnetischen Dipols
vgl. elektrischer Dipol: $\vec{P} = Q \cdot \vec{d}$



Der Einfachheit halber: Rechteckschleife mit Kanten a,b



B-Feld auf der Achse in großer Entfernung

Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$

a_1, a_2, b_1, b_2 sind Element $d\vec{l}$

$$\vec{B}(b_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \vec{b} \times \vec{r}$$

$$B(b_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} b_1 \cdot r \cdot \sin \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} b$$

x-Komponenten von $\vec{B}(b_1)$ und $\vec{B}(b_2)$ heben sich weg.

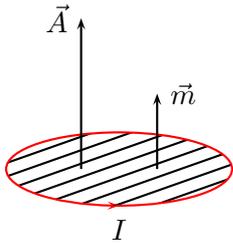
z-Komponenten addieren sich.

$$B_z(2b) = 2 \cdot \frac{\mu_0 I \cdot b}{4\pi r^2} \cdot \frac{a}{r}$$

$$\text{ebenso: } B_z(2a) = 2 \cdot \frac{\mu_0 I \cdot a}{4\pi r^2} \cdot \frac{b}{r}$$

$$\rightarrow B_z(x = y = 0) = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot a \cdot b}{2\pi r^3}$$

Das Produkt $I \cdot a \cdot b = \text{Strom} \cdot \text{Fläche}$ nennt man das magnetische Moment der Leiterschleife, des Kreisstroms um die Fläche $a \cdot b$.

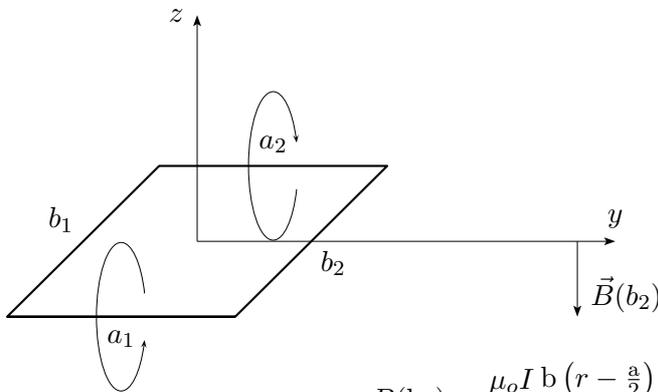


$$\text{vektoriell: } \vec{m} = I \cdot \vec{A}$$

$$\text{also: } B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{m}{r^3}$$

magnetisches Feld auf der Achse des magnetischen Moments.

\vec{B} -Feld in der Ebene der Schleife in großer Entfernung



$$B(b_2) = \frac{\mu_0 I b}{4\pi} \frac{(r - \frac{a}{2})}{(r - \frac{a}{2})^3} \quad \text{nach unten}$$

$$B(b_1) = \frac{\mu_0 I b}{4\pi} \frac{(r + \frac{a}{2})}{(r + \frac{a}{2})^3} \quad \text{nach oben}$$

$$B(a_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|\vec{a} \times \vec{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \cdot r \cdot \sin \alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \cdot b}{r^3}$$

$$B(2a) = \frac{\mu_0 I \cdot a \cdot b}{4\pi r^3} \quad \text{nach oben}$$

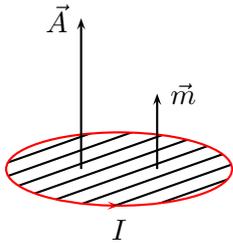
$$B_z(z = y = 0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[b \frac{(r + \frac{a}{2})^2 - (r - \frac{a}{2})^2}{(r^2 - \frac{a^2}{4})^2} - \frac{a \cdot b}{r^3} \right] = -\frac{\mu_0 I \cdot a \cdot b}{4\pi r^3}$$

das gilt für große R in der ganzen x,y-Ebene:

$$B_z(z = 0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3}$$

3.3.1 Magnetisches Moment einer Leiterschleife

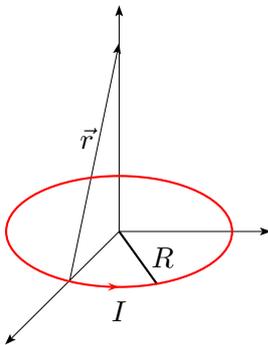
$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}$$



Elementarteilchen mit endlichem Drehimpuls und Ladung haben i.A. ein charakteristisches magnetisches Moment.

magnetisches Moment der Erde: $m \approx 10^{26} \text{ Am}^2 \hat{=} \text{äquatorialer Kreisstrom } 10^{12} \text{ A}$

Beispiel: kreisförmige Leiterschleife, Feld auf der Achse



siehe oben $m = I \cdot \pi \cdot R^2$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}^3}$$

SKIZZE FEHLT!

3.4 Die Bewegung von geladenen Teilchen im magnetischen Feld

$$\text{Lorentzkraft } \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} \perp \vec{F} \perp \vec{v}$$

3.4.1 Bahn freier geladener Teilchen

Annahmen: homogenes Feld, $\vec{v} \perp \vec{B}$ dann ist \vec{F} immer $\perp \vec{v}$, $v = \text{konst.}$

→ Kreisbahn mit Zentripetalteilchenbeschleunigung

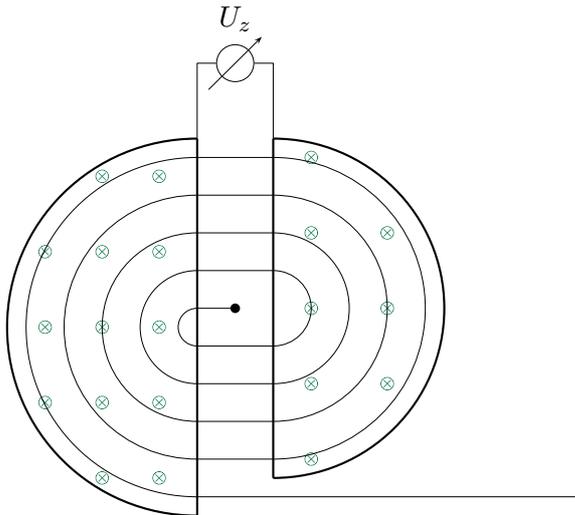
$$\frac{F}{m} = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} = \frac{v^2}{r} \quad \left(\rightarrow \frac{e}{m}\text{-Bestimmung} \right)$$

$$\rightarrow \text{Kreisfrequenz } \omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = \frac{q}{m} \cdot B \quad \text{Zyklotronfrequenz}$$

ist unabhängig vom Radius

Zyklotron

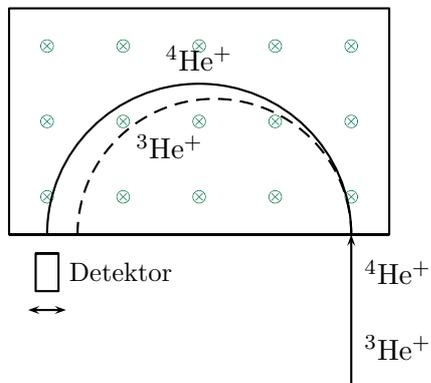


an den D-Förmigen, hohlen Elektroden wird eine Wechselspannung angelegt.
 → mehrfache Beschleunigung, ω bleibt gleich, r steigt an nach:

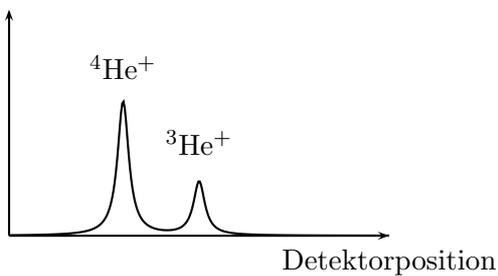
$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{eB}$$

geht nur gut für $v \ll c$, sonst werden die Teilchen träger und kommen aus dem Takt.
 besser: Synchrozyklotron → Synchrotron, r konstant, B variiert

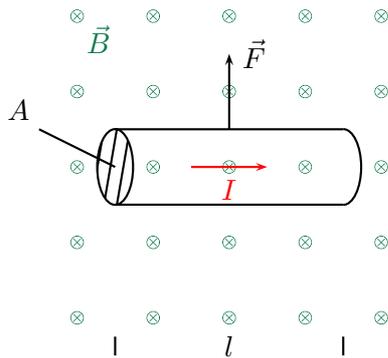
Massenspektrometer (Prinzip)



empfindlich für kleine Massen $\frac{\Delta m}{m} < 10^{-5}$



3.4.2 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter



$$\vec{F} = n \cdot A \cdot l \cdot q(\vec{v}_D \times \vec{B})$$

v_D ist die Driftgeschwindigkeit
mit $I = n \cdot A \cdot q \cdot v_D$

$$\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B}) \cdot l$$

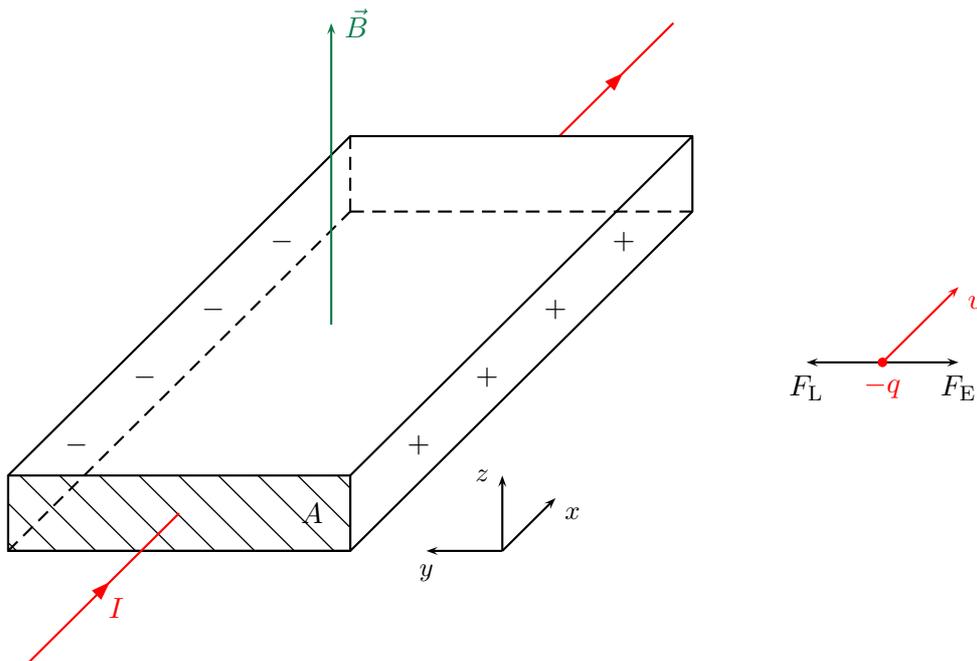
$$F = I \cdot B \cdot l, \text{ falls } \vec{I} \perp \vec{B}$$

Grundlage fast aller elektrischen Maschinen.
Leiterschleifen erhalten ein Drehmoment

3.4.3 Der Hall-Effekt

E.H. Hall 1879

Wie wirkt sich ein Magnetfeld auf die Verteilung der Ladungsträger im Innern des Leiter aus?



Strom in x-Richtung:

$$I_x = j_x \cdot A = b \cdot d \cdot q \cdot n \cdot v_x$$

Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v}_D \times \vec{B} = (0, F_y, 0)$$

$$F_y = -q \cdot v_x \cdot B_z = -q \frac{j_x}{n \cdot q} B_z$$

Ablenkung positiver Ladungsträger nach minus y.

Es baut sich ein elektrisches Querfeld E_y auf, im stationären Zustand ist $v \neq 0$,

$$F_{y,\text{gesamt}} = 0 = q \cdot E_y + F_{y,\text{Lorentz}}$$

$$0 = q \cdot E_y - q \frac{j_x \cdot B_z}{n \cdot q}$$

$$\rightarrow \text{Hallfeld} \quad E_y = \frac{j_x \cdot B_z}{n \cdot q}$$

$$\text{Hallkoeffizient} \quad R_H = \frac{1}{n \cdot q}$$

Hallspannung: $U_H = E_y \cdot b$

Messung von U_H

- zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte bei bekanntem j_x , B_z
 → in den meisten Metallen wird der Strom von negativen „Leitungselektronen“ getragen. In Alkalimetallen (Na, K, Cs) stimmt n gut mit der Zahl der Atome pro Volumeneinheit überein → jedes Atom steuert eines seiner Elektronen zum Ladungstransport bei.

aber auch positive Ladungsträger (in Cd, Be, ...)

in Halbleitern je nach Dotierung positive oder negative Ladungsträger

- zur Bestimmung/Messung der magnetischen Feldstärke bei bekanntem R_H , j_x
 R_H möglichst groß → Halbleiter mit kleinen n eignen sich gut als Hall-Sonden.

3.4.4 Quanten Hall-Effekt

V. Klitzing NP 1985

$$R_H = \frac{U_H}{I_x} = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

2-dimensionales Elektronengas

!SKIZZE FEHLT!

$$\frac{h}{e^2} = 25,813 \text{ k}\Omega \quad \text{Definition } \Omega \text{ aus Naturkonstanten}$$

→ Widerstand als Basisgröße

3.4.5 Der relativistische Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern

Coulombkraft zwischen zwei ruhenden Ladungen

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

magnetische Kraft zwischen zwei parallelen stromdurchflossenen Drähten der Länge L

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2 L}{r}$$

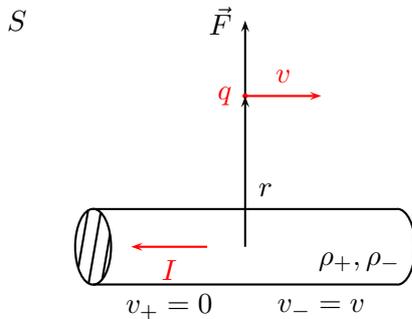
bisher: zwei unabhängige Gesetze

aber wir finden:

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = c \quad \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

das ist kein Zufall

Beispiel: Stromdurchflossener Draht



Im Laborsystem S bewegen sich ein Teilchen mit Ladung q parallel zum Draht mit v nach rechts, im Draht fließe ein Strom I so, dass sich die Elektronen mit der gleichen Geschwindigkeit $V_- = v$ bewegen.

also: $I = \rho \cdot A \cdot v_-$

mit Magnetfeld $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

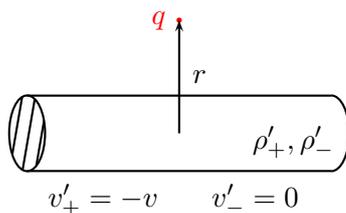
Lorentzkraft $F = q \cdot B \cdot v = q\mu_0 \frac{I}{2\pi r} v$ radial nach außen

mit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

$$\rightarrow F = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot \rho \cdot A v^2}{r c^2}$$

Jetzt im Bezugssystem S' , dass sich mit dem Teilchen nach rechts bewegt

S'



Ladung q ruht in S' , \rightarrow keine magnetischen Kräfte!

Einsteins Relativitätsprinzip:

Gesamtkraft auf das Teilchen ist unabhängig vom Bezugssystem elektrischer Kräfte:

in S ist der Draht neutral: $\rho_+ = \rho_-$

\rightarrow das \vec{E} -Feld um den Draht ist Null.

in S' ist $\rho'_+ \neq \rho'_-$ wegen Längenkontraktion

Drahtlänge L in S ist in S' verkürzt

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

\rightarrow in S' ist die Ladungsdichte der sich mit $V'_+ = -v$ bewegten positiven Ionen erhöht.

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und die negative Ladungsdichte der jetzt ruhenden Elektronen erniedrigt

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Der Draht ist in S' nicht elektrisch neutral

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_- = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

\rightarrow elektrisches Feld

$$E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho' \cdot A}{r} \quad \text{radial nach außen gerichtet}$$

\rightarrow elektrostatische Kraft auf q

$$F' = q \cdot E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot \rho_+ \cdot A}{r} \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vgl. mit Lorentzkraft in S :

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$\rightarrow F' = F$ für $v \ll c$

Impulsänderung in S und S' sind gleich:

$$dp' = F' dt' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F dt = dp$$

Wechsel der Bezugssysteme:

Transformation

magnetische Lorentzkraft \leftrightarrow elektrostatische Coulombkraft

beide Kräfte sind Wirkungen desselben Phänomens elektromagnetische Wechselwirkung

$\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ ergibt sich aus der Anwendung der speziellen Relativitätstheorie

3.5 Materie im Magnetfeld

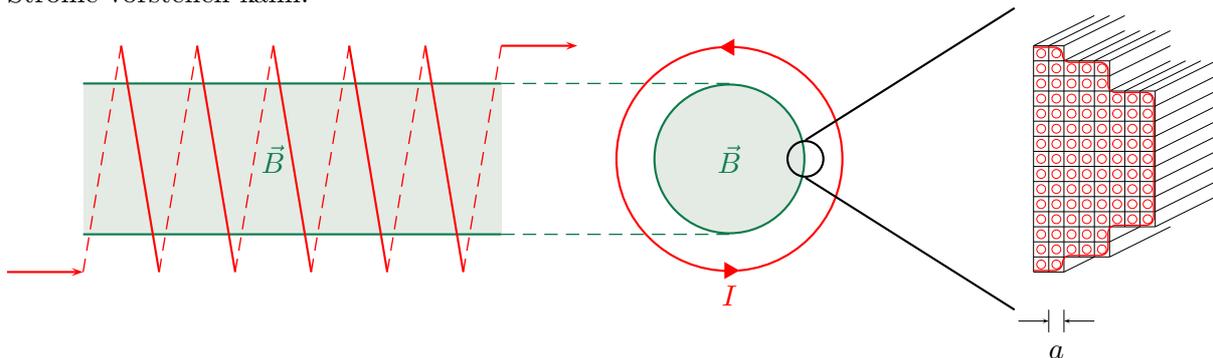
3.5.1 Permeabilität

bereits erwähnt: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

- \vec{H} Magnetische Erregung (z.B. durch äußere Ströme)
- μ_r relative Permeabilität

mikroskopische Ursache dafür sind atomare magnetische Momente, die man sich als atomare Ströme vorstellen kann.



atomare Ströme im Innern heben sich auf, um die äußere Umrandung läuft ein Oberflächenstrom, Ringstrom.

Oberflächenstrom pro atomarer Längeneinheit: $\frac{i}{a}$

→ gesamtes Magnetfeld im Innern:

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{L} \cdot I + \frac{i}{a} \right)$$

Oberflächenstrom ist verknüpft mit dem atomaren magnetischem Moment ia^2

damit wird $\frac{i}{a} = \frac{ia^2}{a^3} = M$

$$\rightarrow \vec{M} = \frac{\text{magnetisches Moment}}{\text{Volumen}} \quad \text{Magnetisierung}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

mit $\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$ bei vielen Stoffen, außer bei nichtlinearen Werkstoffen, z.B. Ferromagnetika
 χ : magnetische Suszeptibilität (evtl. mit Index m χ_m)

$$\text{somit } \vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

mit $\mu_r = 1 + \chi$, relative Permeabilität

Zahlenbeispiele für χ :

H ₂ O (gas)	$-0,2 \cdot 10^{-8}$	
H ₂ O (flüssig)	$-0,9 \cdot 10^{-6}$	diamagnetisch $\chi \lesssim 0, \mu \lesssim 1$
Cu	$-1 \cdot 10^{-5}$	
Bi	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	
<hr/>		
O ₂ (gas)	$1,5 \cdot 10^{-6}$	
O ₂ (flüssig)	$2,6 \cdot 10^{-3}$	paramagnetisch $\chi \gtrsim 0, \mu \gtrsim 1$
Al	$2,4 \cdot 10^{-4}$	
Pt	$2,5 \cdot 10^{-4}$	
<hr/>		
Ferrite (hartmagnetisch)	0,3	
AlNiCo	3	
Ferrite (weichmagnetisch)	10^3	ferromagnetisch $\chi \gg 0, \mu \gg 1$
Fe (rein)	10^4	
Mu-Metalle (75Ni-Fe)	$9 \cdot 10^4$	

Ursache/ Unterschiede: Elektronenstruktur der Atome
 Bahnbewegung \rightarrow Bahnmomente
 Eigenrotation (Spin) \rightarrow magnetische Spinmomente
 Kernmomente i.A. vernachlässigbar

3.5.2 Diamagnetismus

Tritt immer auf, kann aber durch andere magnetische Effekte überdeckt werden. In Reinform, wenn die Atome ohne äußeres Feld kein magnetisches Moment besitzen, die magnetischen Momente aller Atomelektronen sich aufheben. Äußeres Feld induziert ein magnetisches Moment in jedem Atom, \vec{m} ist dem äußeren Feld entgegen gerichtet (Lenzsche Regel).

In inhomogenen Feldern werden Diamagnetika aus dem Bereich hoher Feldstärke herausgedrängt. Wegen $W_{\text{pot}} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \sim \vec{B}^2$, da $\vec{B} \sim -\vec{B}$

kein elektrisches Analogon

$$\chi \sim -n \cdot Z \langle x^2 \rangle \quad \text{temperatur unabhängig}$$

3.5.3 Paramagnetismus

Atome besitzen nicht kompensierte magnetische Momente, wegen ungerader Zahl von Elektronen, nicht aufgefüllte Elektronenschalen. Magnetische Momente sind ohne äußeres Feld regellos orientiert, mit äußerem Feld werden sie ausgerichtet, thermische Bewegung wirkt entgegen Magnetisierung $\frac{1}{T}$

$$\chi = \mu_0 \frac{nm^2}{3k_{\text{B}}T} = \frac{C}{T} \quad \text{Curie-Gesetz}$$

- C Curie-Konstante (stoffabhängig)
- m magnetisches Moment

elektrische Analogie: Orientierungspolarisation

paramagnetische Stoffe werden in inhomogenen Feldern in den Bereich höherer Feldstärken gezogen.

3.5.4 Ferromagnetismus

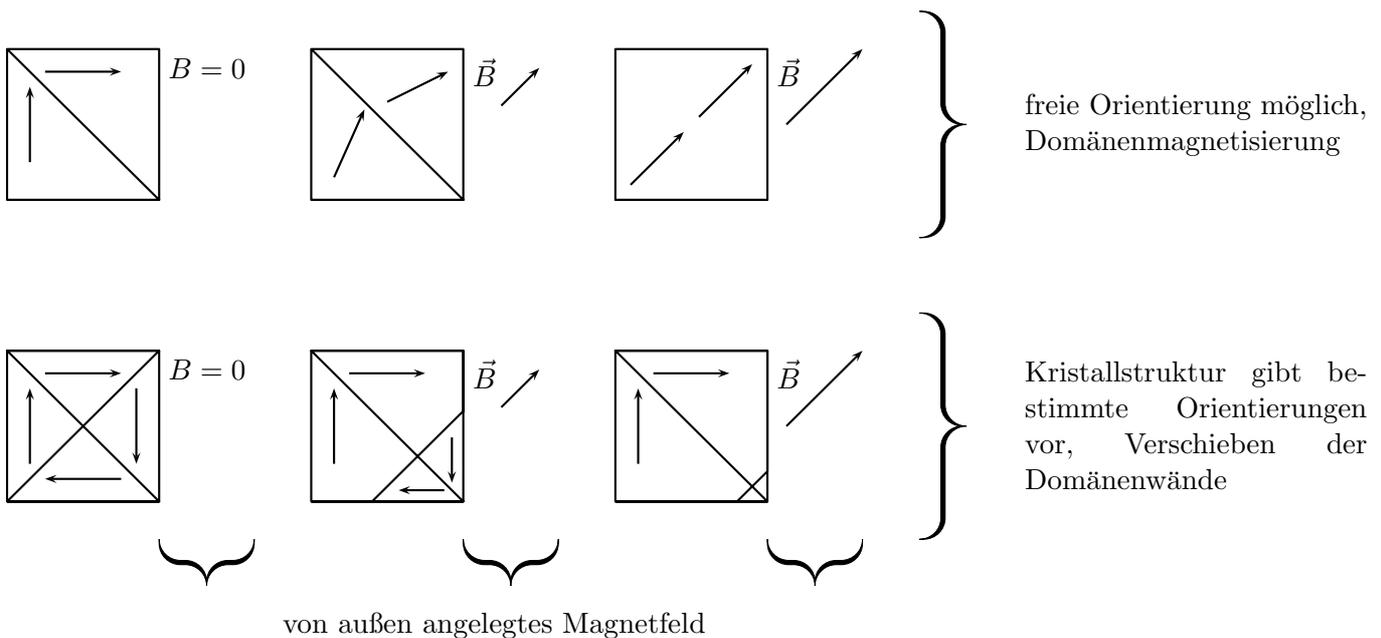
Tritt auf in Substanzen, in denen die Wechselwirkung (sog. Austausch Wechselwirkung) zwischen den magnetischen Atomen so groß ist, dass die magnetischen Dipole auch ohne äußeres Feld in makroskopischen Raumbereichen (Domänen, Weissche Bezirke) parallel ausgerichtet sind.

z.B. in Fe, Co, Ni, Gd, Dy, ... Legierung auch aus Elementen, die nicht ferromagnetisch sind. Nur unterhalb einer kritischen Temperatur T_C (Curie- Temperatur).

oberhalb T_C : paramagnetisches Verhalten

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}$$

Magnetisierung geschieht über Domänenmagnetisierung oder durch Verschieben der Domänenwände.



Bei genügend hohen äußeren Feldern → Sättigungsmagnetisierung

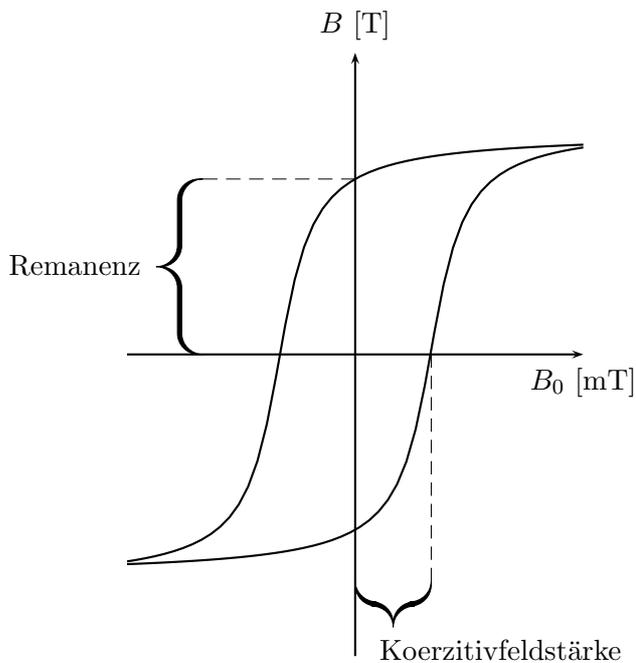
M ist nicht proportional zu B_0

χ hängt von B_0 ab

→ sinnvolle Definition: $\chi = \frac{dM(B_0)}{dB_0}$

!SKIZZE FEHLT!

Magnetisierung $B(B_0)$ zeigt eine Hysterese



B hängt von der Vorgeschichte ab

Remanenz und Koerzitivkraft hängen von der Legierung und deren Behandlung ab.

große Remanenz → Permanentmagnete AlNiCo 1-1,5 T

große Koerzitivkraft → Hartmagnete ($H_C > 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$) AlNiCo $\sim 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$

kleine Koerzitivkraft → Weichmagnete ($H_C < 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$) AlNiCo $\sim 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$
 Transformatorbleche, kleine Hystereseflächen,
 kleine Verluste, Weicheisen $H_C \sim 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ amor-
 phe Metalle ($H_C \leq 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$)

Zahlenbeispiele:

	magnetisches Moment		Sättigungsmagnetisierung
	T_C [K]	pro Atom in μ_B	$\mu_0 M$ in T bei 0K
Fe	1043	2,2	2,2
Co	1400	1,7	1,8
Ni	485	0,6	0,6
Gd	292	7,1	2,5
Dy	85	10	3,7

magnetische Ordnungszustände:

Ordnung der atomaren Momente

Ferromagnetismus



Antiferromagnetismus,
z.B. α - F_2O_3 , MnO ,
 MnFe_2 , makroskopisch
wie Diamagnet



Ferrimagnetismus,
Ferrite, Eisenoxide,
Nickeloxide



3.5.5 Anwendung der magnetischen Feldgleichung in Materie

\vec{B} -Feld ist mit allen Strömen verknüpft, den makroskopischen durch Drähte und den atomaren Kreisströmen.

Zirkulation von $\vec{B} \sim$ eingeschlossene Ströme.

$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0(I_{\text{makro}} + I_{\text{atomar}}) \quad \text{Ampèresches Gesetz}$$

(vgl. \vec{E} -Feld: äußere Ladungen + Polarisationsladungen)

\vec{H} -Feld ist mit I_{makro} verknüpft

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = I_{\text{makro}}$$

(vgl. \vec{D} -Feld: nur äußere, freie Ladungen, keine polarisierten Ladungen)

mit $\oint \vec{M} \, d\vec{r} = I_{\text{atomar}}$ (s.o.) Magnetisierung

$$\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) \, d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{makro}}$$

und außerdem

$$\oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0$$

Beispiel: Elektromagnet

1.Schritt: Spule als Torus, Feld nur im Torus

!SKIZZE FEHLT!

$$H = \frac{N}{L} \cdot I$$

„Ampèrewindungen pro Länge“

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} \cdot I$$

L: mittlerer Torusumfang

2.Schritt: bei $I = \text{const.}$ Eisenkern als Ferromagnetikum einbringen

!SKIZZE FEHLT!

$$H = \frac{N}{L} \cdot I \quad \text{unverändert}$$

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{L} \cdot I \quad \text{geändert} \sim \mu_r$$

3.Schritt: einen Spalt ins Eisen legen

!SKIZZE FEHLT!

$$\oint B \, dA = 0$$

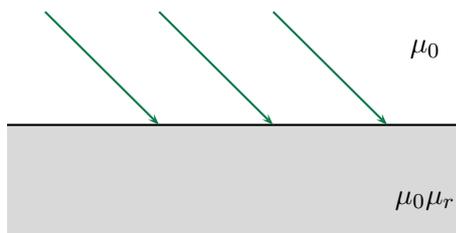
$$\rightarrow B_{\text{Spalt}} = B_{\text{Innen}}$$

$$\mu_{\text{Spalt}} H_{\text{Spalt}} = \mu_{\text{Innen}} H_{\text{Innen}}$$

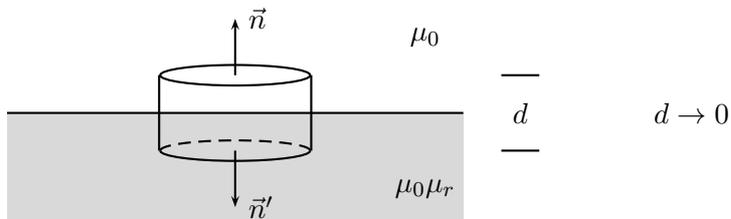
$$H_{\text{Spalt}} = \frac{\mu_{\text{Innen}}}{\mu_{\text{Spalt}}} \cdot H_{\text{Innen}}$$

bei $\mu_{\text{Innen}} = 10^4$, $\mu_{\text{Spalt}} = 1$ ist B im Spalt gleich B im Eisen. H im Spalt aber 10^4 mal H im Eisen.

Beispiel: Durchgang durch Grenzfläche

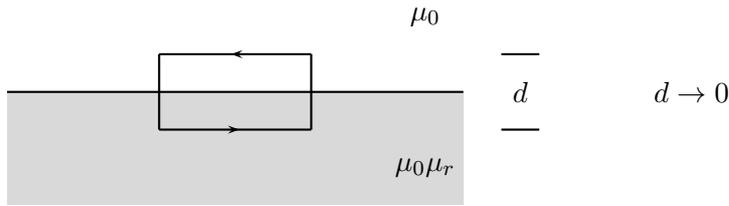


1.Schritt:

zeige mit $\oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0 \rightarrow$ Normalkomponente stetig. $\rightarrow B_n = B_{n'}$, Normalkomponente stetig

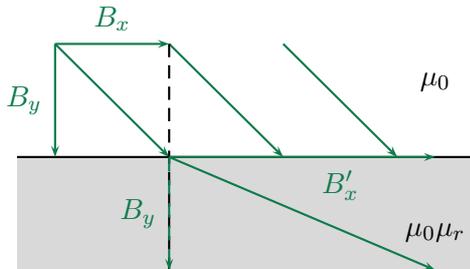
2.Schritt:

zeige mit $\oint \vec{H} \, d\vec{r} = 0$ (keine Makroströme) \rightarrow Tangentialkomponente stetig



$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = H_z \cdot L - H_{z'} \cdot L = 0$$

$$\rightarrow H_z = H_{z'}$$



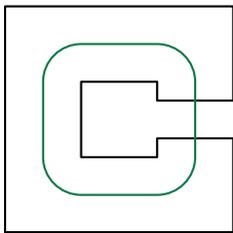
$$B_{y'} = B_y$$

$$H'_x = H_x \rightarrow \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B'_x = \frac{1}{\mu_0} B_x \rightarrow B'_x = \mu_r B_x$$

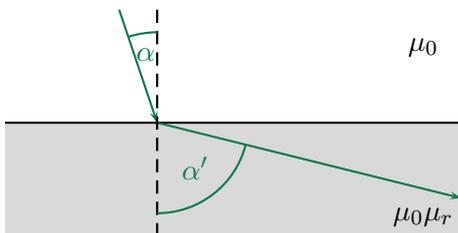
$$\tan \alpha = \frac{B_x}{B_y}, \quad \tan \alpha' = \frac{B'_x}{B'_y} = \frac{B_x \mu_r}{B_y}$$

$$\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \mu_r$$

Anwendung: „Führung der magnetischen Feldlinien“



Zahlenbeispiel:



$$\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \mu_r$$

$$\alpha = 1^\circ, \mu_r = 100 \rightarrow \alpha' \approx 60^\circ$$

Beispiel: Kurzer, magnetischer Stab

langer Stab $\hat{=}$ ringförmiger Elektromagnet

!SKIZZE FEHLT!

kurzer Stab:

!SKIZZE FEHLT!

Das Dipolfeld des magnetischen Stabs wirkt dem äußeren Feld entgegen und schwächt es im Innern ab. Diese Entmagnetisierung bewirkt, dass sich ein kurzer Stab schwächer magnetisiert, als ein langer.

$$M = \frac{\chi}{(1 + n\chi)} H_a = \text{Entmagnetisierungsenergie}$$

H- und B-Feld eines Permanentmagneten:

!SKIZZE FEHLT!

\vec{B} -Feldlinien umkreisen (auch) die atomaren Oberflächenströme in einem Zug.
H-Feldlinien haben keine erzeugenden Ströme, ihre Zirkulation muss überall Null sein $\hat{=}$ entspricht dem entmagnetisierenden Dipol.

3.6 Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

3.6.1 Induktionsverschiebungen

$$\oint \vec{D} \, d\vec{A} = \oint \rho \, dV = Q \quad \text{1. Maxwell'sche Gleichung}$$

$$\oint \vec{E} \, d\vec{r} = 0 \quad \text{2. Maxwell'sche Gleichung in der Elektrostatik}$$

$$U_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \, d\vec{r}, \quad \text{Spannung=Potentialdifferenz}$$

Faraday um 1820:

zeitliche Änderung des magnetischen Feldes Φ durch eine Drahtschleife erzeugen eine „elektromotorische Kraft“, oder induzierte Spannung an den Drahtenden.

$$U_{\text{int}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{Faradaysches Induktionsgesetz}$$

mit $U_{\text{int}} = \oint \vec{E} \, d\vec{r}$

und $\Phi = \int \vec{B} \, d\vec{A}$ (B...“magnetische Flussdichte“)

folgt $\oint_C \vec{E} \, d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{B} \, d\vec{A}$ 2. Maxwell'sche Gleichung

C: Rand von F

F: nichtgeschlossene Fläche

!SKIZZE FEHLT!

3.6.2 Die Lenzsche Regel

U_{ind} führt zu einem Strom durch die Schleife

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{R}$$

R: Gesamtwiderstand der Leiterschleife
In welche Richtung fließt der Strom?

!SKIZZE FEHLT!

beim Herausziehen des Magneten

!SKIZZE FEHLT!

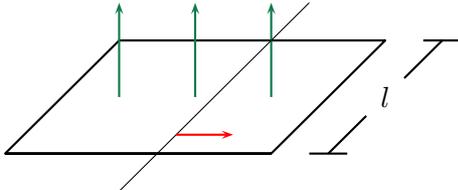
beim Annähern des Magneten

So lange Strom fließt, wird im Draht die Leistung $P = I^2 \cdot R$ in Wärme verwandelt, diese Energie stammt aus der kinetischen Energie des Stabmagneten.

Das durch I erzeugte Magnetfeld muss also den Stab abbremsen, unabhängig von seiner Bewegungsrichtung.

Lenzsche Regel $\hat{=}$ Energieerhaltung

Beispiel: Leiterschleife



Strom durch Leiter im \vec{B} -Feld
→ Lorentzkraft $F = l \cdot I \cdot B$

Umkehrung:

Draht im \vec{B} -Feld ziehen

→ Lorentzkraft → Strom durch die Schleife

mit dem Induktionsgesetz

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} B \cdot A = -B \frac{d}{dt} A = -Bl \frac{dx}{dt} = -B \cdot l \cdot v$$

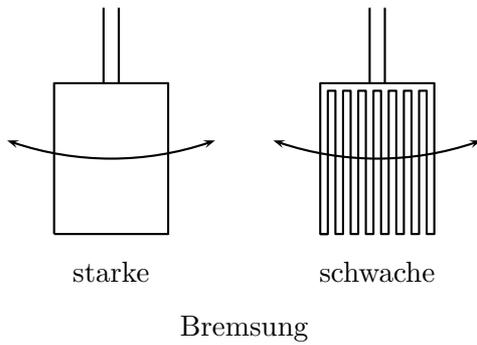
Beispiel: Mitnahmeeffekt

!SKIZZE FEHLT!

Deformationseffekt des Erdmagnetfelds im Plasmawind der Sonne
Implosionstechnik zur Erzeugung hoher Magnetfelder

!SKIZZE FEHLT!

Beispiel: Wirbelstrombremse
Pendelkörper aus Aluminium



Beispiel: Transformator

!SKIZZE FEHLT!

Φ ist der Fluss pro Windung

z.B. Ladegerät für Akkus $U_2 > U_1 \rightarrow N_2 < N_1$

z.B. Hochspannung $U_2 > U_1 \rightarrow N_2 > N_1$

idealer Trafo: $P_1 = P_2$ verlustfrei

$$I_1 U_1 = I_2 U_2$$

$$\rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

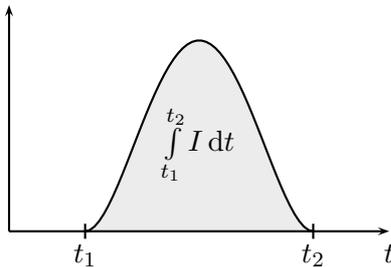
Messung einer magnetischen Feldstärke:

!SKIZZE FEHLT!

$$\Phi_1 = N \int B \, dA = N \cdot B \cdot A$$

$$\Phi_2 = 0$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{t_1}^{t_2} U_{\text{ind}} \, dt = R \int_{t_1}^{t_2} I \, dt, \quad I = I(t)$$

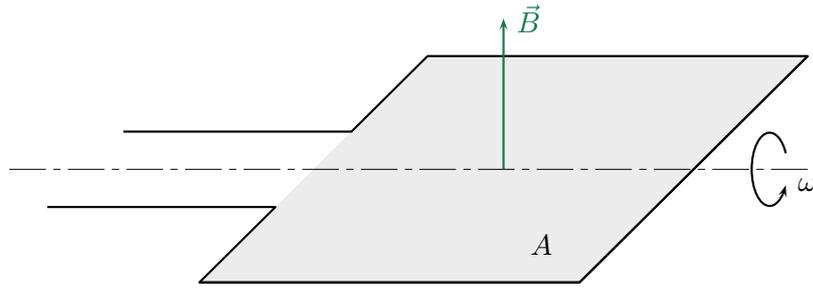


$$\rightarrow B = \frac{R}{NA} \int_{t_1}^{t_2} I \, dt$$

3.6.3 Elektrische Generatoren

- Wechselstromgenerator

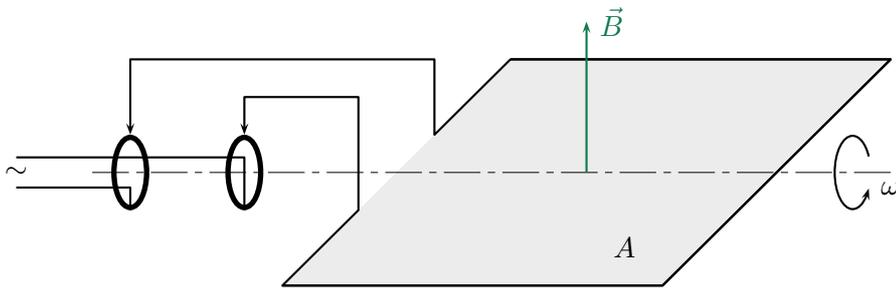
$$\Phi = \Phi_0 \cdot \cos \omega t = B \cdot A \cdot \cos \omega t$$



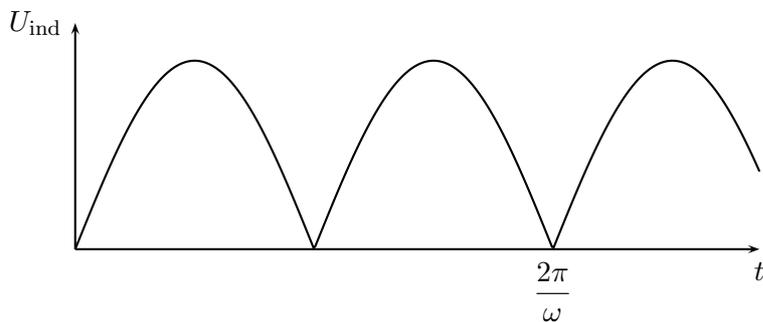
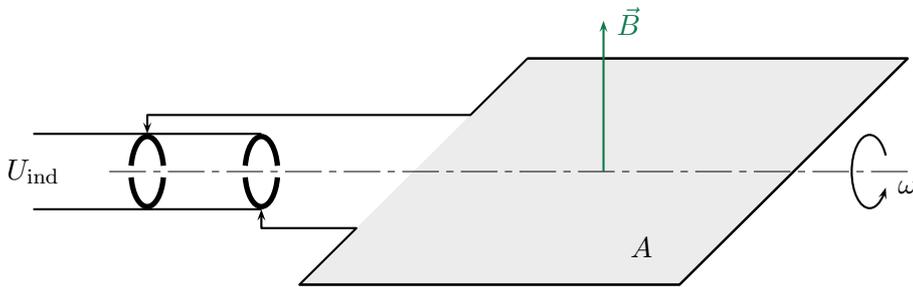
$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = \omega \cdot B \cdot A \sin \omega t$$

N Windungen:

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = N \cdot \omega \cdot B \cdot A \sin \omega t$$



- Gleichstromgenerator



3.6.4 Die Selbstinduktion

Ein Strom bildet den „Wirbelfaden“ eines Magnetfeldes.
 Stromänderung (z.B. durch öffnen eines Schalters) → Magnetfeldänderung
 → Änderung des magnetischen Flusses
 → induzierte Spannung

!SKIZZE FEHLT!

$$U_{\text{ind}} \sim \frac{d\Phi}{dt} \sim \frac{dI}{dt}$$

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{d\Phi}{dt}$$

L heißt Selbstinduktionskoeffizient, (Selbst-)Induktivität der Leiteranordnung.

U_{ind} wirkt der Ursache (Stromänderung) entgegen! (Lenzsche Regel)

L wirkt bei Stromänderung wie eine träge Masse bei Geschwindigkeitsänderungen.

Beispiel: lange Spule

!SKIZZE FEHLT!

Feld im innern: $\mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I$

Fluss durch jede Windung: $\Phi = I \cdot A$

Flussänderung erzeugt in jeder Windung die induzierte Spannung $-\frac{d\Phi}{dt}$

Über die ganze Spule summiert:

$$U_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} A \cdot \frac{dI}{dt}$$

also:

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} A \quad \text{Induktivität einer langen Spule}$$

Spulen mit großem L heißen Drosselspulen.

für kleines L werden Spulen bifilar gewickelt

!SKIZZE FEHLT!

3.6.5 Energieinhalt des magnetischen Feldes

= Arbeit, die zum Aufbauen des Magnetfeldes verrichtet werden muss.

Ansteigender Strom induziert Gegenspannung

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$$

erforderliche Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = -U_{\text{ind}} \cdot I$

$$W = \int P dt$$

$$W = \int L \frac{dI}{dt} \cdot I dt$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{magnetische Energie}$$

(vgl. $W = \frac{1}{2}CU^2$ elektrische Energie)

$$\text{Zylinderspule: } L = \mu_0\mu_r \frac{N^2}{l} A, \quad H = I \frac{N}{l} \rightarrow I = \frac{lH}{N}$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\mu_0\mu_r \frac{N^2}{l} A \right) \left(\frac{l^2 H^2}{N^2} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot V$$

V : Volumen der Spule

$$w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} \quad \text{Energiedichte des magnetischen Feldes}$$

$$\text{vgl. } w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}$$

Kapitel 4

Elektrische Schaltkreise

4.1 Grundlegende Schaltkreise

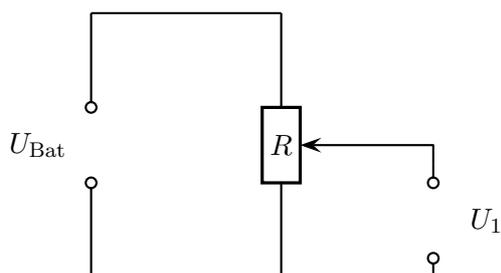
Beim Zusammenschalten von ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten gelten weiterhin die zwei Kirchhoffschen Regeln:

$$\text{Knotenregel: } \sum_i I_i = 0$$

$$\text{Maschenregel: } \sum_i U_i = 0$$

4.1.1 Einfache Beispiele (noch ohne C und L)

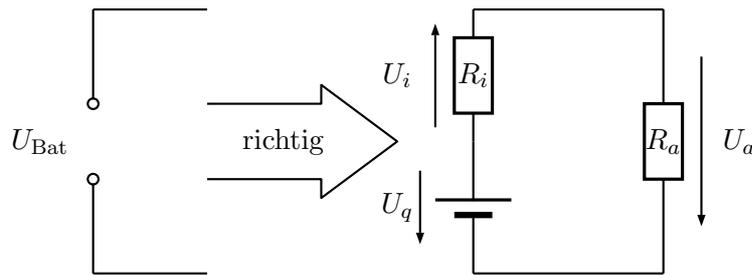
Potentiometerschaltung:



$$I = \frac{U_{\text{Bat.}}}{R}$$

$$U_1 = I \cdot R_1 = U_{\text{Bat.}} \cdot \frac{R_1}{R}$$

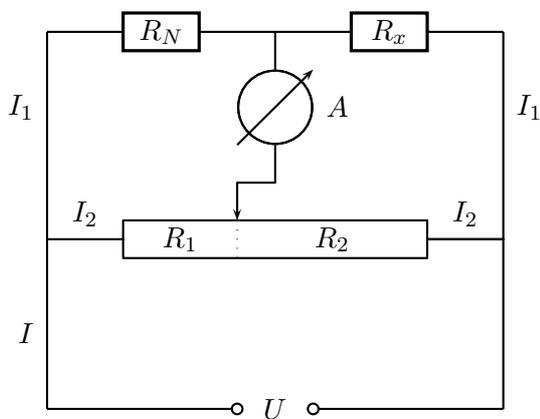
Bemerkung:
Spannungsquellen haben einen Innenwiderstand



U_q : Quellenspannung

U_a : Klemmenspannung (immer $< U_q$)

Beispiel: Wheatstonesche Brücke



bei $I = 0$ durchs Ampèremeter gilt: $I_1 = I_2$

alle R außer R_x sind bekannt, R_x soll bestimmt werden.

Dann gilt, nach der Maschenregel

$$R_N \cdot I_1 + R_1 \cdot I_2 = 0, \quad R_x \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0$$

$$\frac{R_N \cdot I_1}{R_x \cdot I_1} = \frac{-R_1 \cdot I_2}{-R_2 \cdot I_2}$$

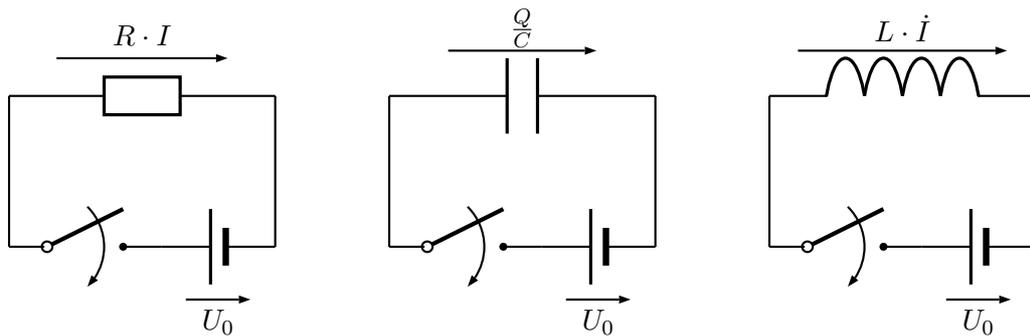
$$\rightarrow \frac{R_N}{R_x} = \frac{R_1}{R_2} \rightarrow R_x = R_N \frac{R_2}{R_1}$$

Ampèremeter kann im empfindlichsten Messbereich betrieben werden.

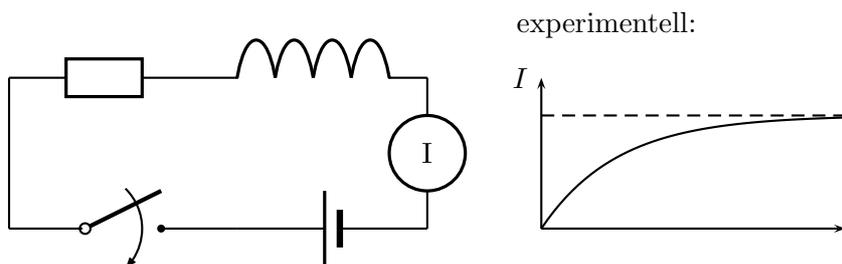
→ Präzisionsbestimmung von R_x

4.1.2 Beispiele mit L und C

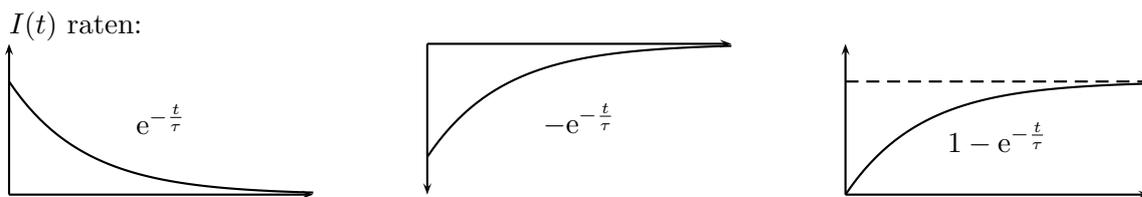
Mit welchem Vorzeichen sind die Spannungsabfälle zu betrachten?



Beispiel: RL -Leis



experimentell:



$$t \rightarrow 0: \quad \dot{\Phi} = \dot{I} = 0, \quad I = \frac{U_0}{R}$$

$$\rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Stimmt das? Was ist τ ?

Maschenregel:

$$U_0 = R \cdot I + L \cdot \dot{I}$$

\rightarrow lineare, inhomogene DGL für $I(t)$

zunächst homogene DGL:

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} = 0$$

Ansatz:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \dot{I} = -\frac{t}{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow I_0 \cdot R e^{-\frac{t}{\tau}} + I_0 \cdot L \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$

inhomogene DGL: spezielle Lösung

$$U_0 = R \cdot I + L \cdot \dot{I}$$

$$\rightarrow I = \frac{U_0}{R}$$

(für $t \rightarrow \infty$ wird $\dot{I} = 0$)

allgemeine Lösung:

Anfangsbedingung: $I(t = 0) = 0$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$0 = \frac{U_0}{R} + I_0 e^0 \rightarrow I_0 = -\frac{U_0}{R}$$

$$\rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Graphisch:

Ausschalten:

!SKIZZE FEHLT!

dann: $U_0 = 0 \quad I(t = 0) = \frac{U}{R}$

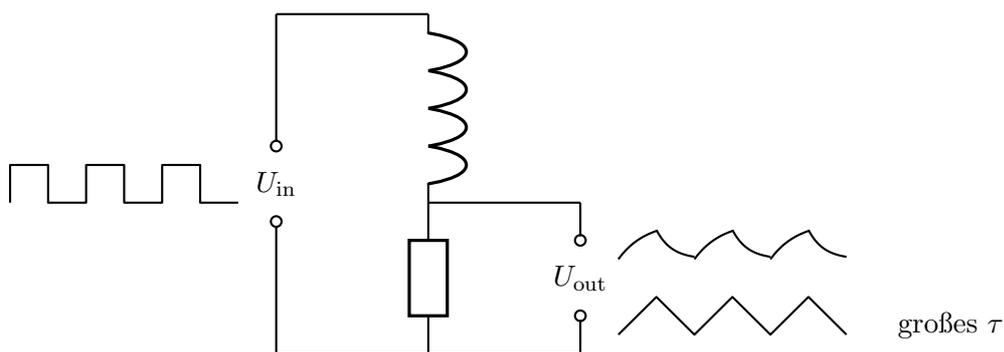
$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I(0) = \frac{U_0}{R} = I_0 e^{-0} = I_0$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

!SKIZZE FEHLT!

RL-Kreis als Analog-Integrierer:



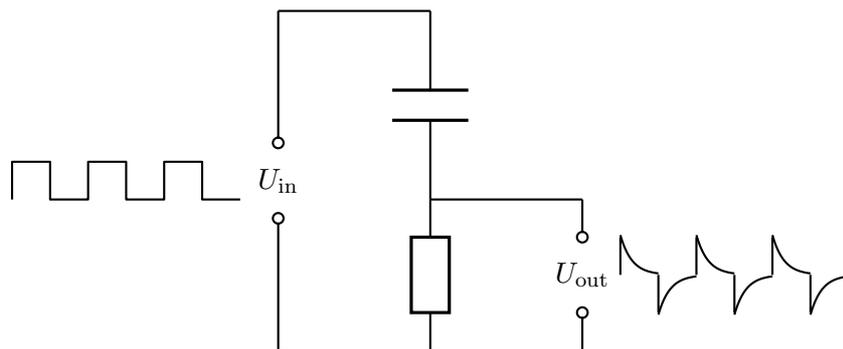
Beispiel: *RC*-Kreis

!SKIZZE FEHLT!

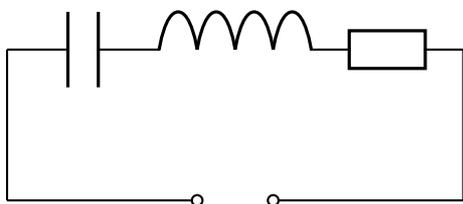
Maschenregel:

$$U_0 = R \cdot I + \frac{Q}{C}$$

Anwendung: Analog-Differenzierer



4.2 Schwingkreise



$$U(t) \quad R \cdot I + \frac{Q}{C} + L \cdot \dot{I} = 0 \quad (= U(t) = U_0 \cos \omega t)$$

Differenzieren:

$$R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} + L \cdot \ddot{I} = 0$$

Analogie zum gedämpften harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = 0$$

$$\rightarrow \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$$

zunächst: $R = 0$

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$$

Ansatz: $I(t) = A \cos \omega t$

$$I(t) = -A\omega \sin \omega t$$

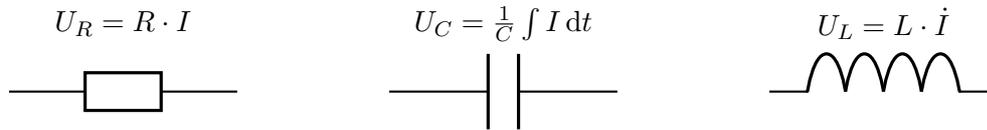
$$I(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$$

$$-A\omega^2 \cos \omega t + \frac{1}{LC}A \cos \omega t = 0$$

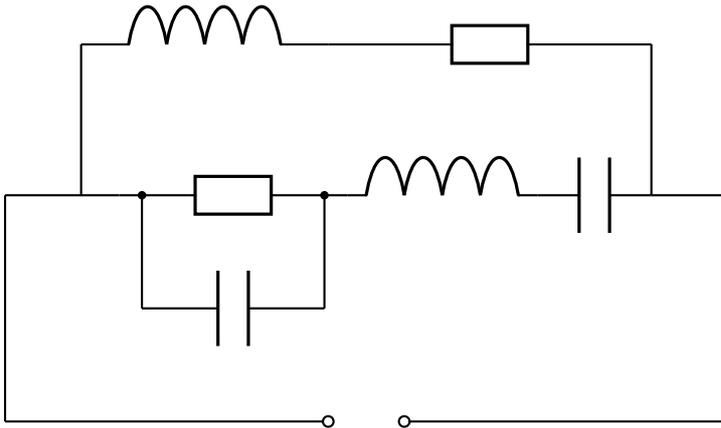
$$\rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Eigenfrequenz des Schwingkreises}$$

- aperiodischer Grenzfall:
wichtig für Mess- und Regeltechnik
- Kriechfall

4.3 Wechselstromschaltkreis und -widerstände



Bei etwas komplizierteren Schaltkreisen



ist das explizite Aufstellen und Lösen der DGLn sehr lästig. → vereinfachen durch Einführen von Scheinwiderständen, Impedanzen.

$U(t)$ habe die Form:

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

$$U(t) = U_0 \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

Da es sich um lineare DGLn handelt, können wir uns auf den Term $U_0 e^{i\omega t}$ beschränken. Wir machen den Ansatz:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

wir erhalten für:

Ohmscher Widerstand

$$U_R = R \cdot I_0 e^{i\omega t} = R \cdot I = Z_R \cdot I$$

Kapazität

$$U_C = \frac{1}{C} \frac{1}{i\omega} I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I = Z_C \cdot I$$

Induktivität

$$U_L = L \cdot i\omega I_0 e^{i\omega t} = i\omega L I = Z_L \cdot I$$

Z_R, Z_C, Z_L : Impedanz
mit den Scheinwiderständen:

$Z_R = R$
$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$
$Z_L = i\omega L$

Parallel- und Serienschaltung dieser Scheinwiderstände (Impedanzen) erfolgt analog zu ohmschen Widerständen, entsprechend Kirchhoffschen Regeln.

→ Gesamtwiderstand

$$Z_{\text{ges}} = \text{Re}(Z_{\text{ges}}) + i\text{Im}(Z_{\text{ges}})$$

$\text{Re}(Z_{\text{ges}})$: Wirkwiderstand (Spannung ist in Phase mit I)

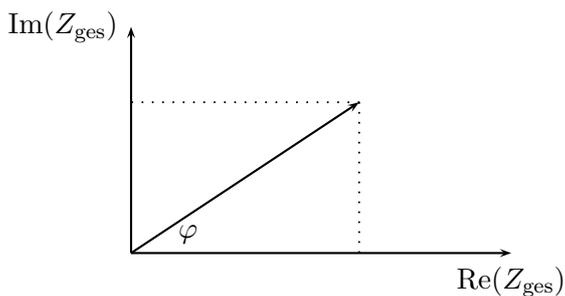
$i\text{Im}(Z_{\text{ges}})$: Blindwiderstand (U und I sind außer Phase)

Z_{ges} kann zerlegt werden in Betrag und Phase.

$$U = Z_{\text{ges}} \cdot I$$

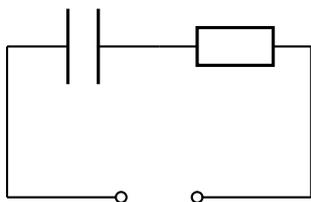
$$|U| = |Z_{\text{ges}}| \cdot |I|$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(Z_{\text{ges}})}{\text{Re}(Z_{\text{ges}})}$$



$\varphi > 0$: U eilt I um φ voraus.

Beispiel:

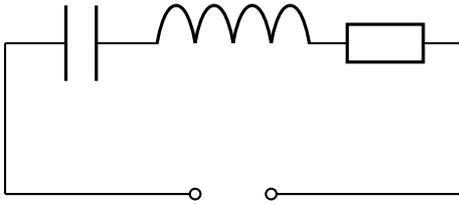


$$Z_{\text{ges}} = Z_C + Z_R = \frac{1}{i\omega C} + R = R - i\frac{1}{\omega C}$$

$$\rightarrow |Z_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\rightarrow \tan \varphi = -\frac{1}{\omega RC}$$

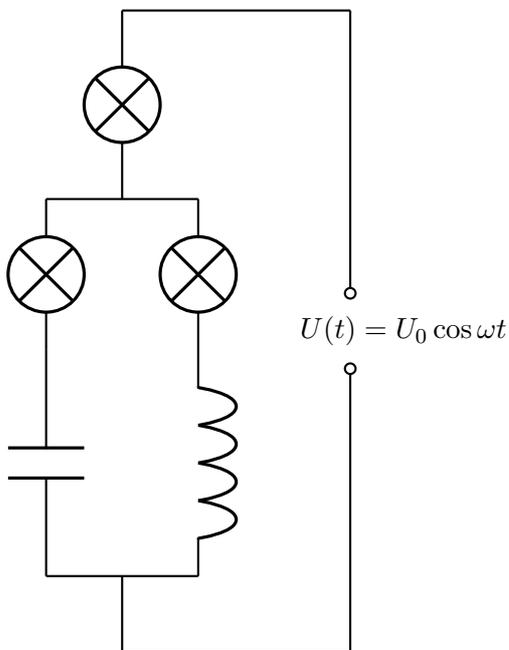
Beispiel: Schwingkreis



$$U(t) \quad Z_{\text{ges}} = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

R klein $\rightarrow Z_{\text{ges}} = 0$ bei $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \hat{=} \text{Eigenfrequenz}$
 „Bandpass-Verhalten“

Beispiel: Experiment



Parallelschaltung:

$$\frac{1}{Z_{\text{ges}}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$$

$$Z_{\text{ges}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{1}{i} \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

$$|Z_{\text{ges}}| \rightarrow \infty \text{ f\u00fcr } \omega C - \frac{1}{\omega L} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \hat{=} \text{Eigenfrequenz}$$

„Sperrkreisverhalten“ $\varphi \rightarrow 90^\circ$

Leistungsabfall an einem ohmschen Widerstand:

$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$I = \frac{U}{Z_R} = \frac{1}{R} U_0 \cos \omega t$$

damit ist die Leistung $P(t) = U(t) \cdot I(t)$

$$P = \frac{1}{R} U_0^2 \cos^2 \omega t$$

mittlere Leistung $\langle P \rangle$:

$$\langle P \rangle \doteq \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{R} U_0^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt$$

$$\langle P \rangle \doteq \frac{U_{\text{eff}}}{R}$$

mit der Effektivspannung $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

Beispiel: „220V“-Steckdose: $U_{\text{eff}} = 220\text{V}$

$$\rightarrow U_0 = \sqrt{2} \cdot 220\text{V} = 311\text{V}$$

Leistungsabfall an einer Induktivität:

$$U = U_0 \cos \omega t = L \cdot \dot{I}$$

$$I = \frac{1}{L} \frac{1}{\omega} U_0 \sin \omega t$$

deshalb wird die Leistung

$$P = \frac{1}{\omega L} U^2 \cos \omega t \sin \omega t$$

und somit die mittlere Leistung:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{\omega L} U_0^2 \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt}_{=0}$$

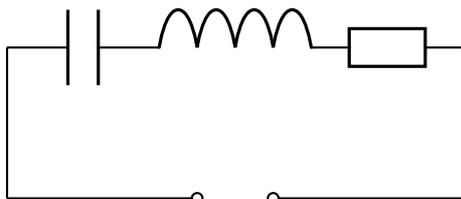
!SKIZZE FEHLT!

ebenso ist $\langle P \rangle$ bei einer Kapazität $= 0$

→ siehe oben: Wirkwiderstand/ Blindwiderstand

4.3.1 Zeigerdiagramm

Beispiel: Schwingkreis

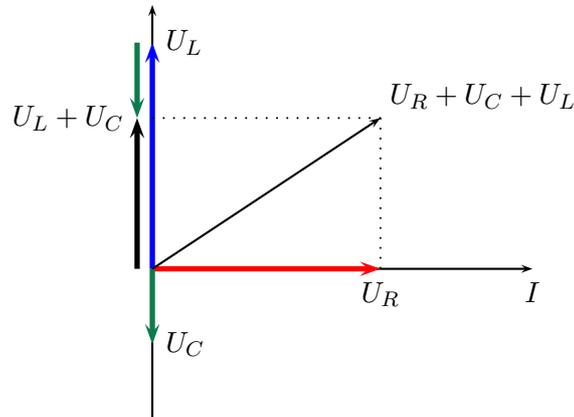
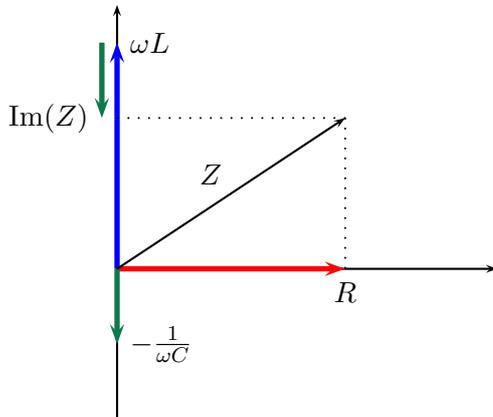


$U(t)$

Impedanz:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$

$$Z = R + i \left(-\frac{1}{\omega C} + \omega L \right)$$



für spezielle Werte ω , C , L , R

für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ wird $|Z|$ minimal: $|Z|=R$. Und bei gegebenem U wird der übertragene Strom maximal.

!SKIZZE FEHLT!

Gütefaktor: $Q = \omega \tau$

hängt von der Dämpfung ab: $\tau = \frac{L}{R}$

siehe Bewegungsgleichung für den Strom: $\ddot{I} + \dots$

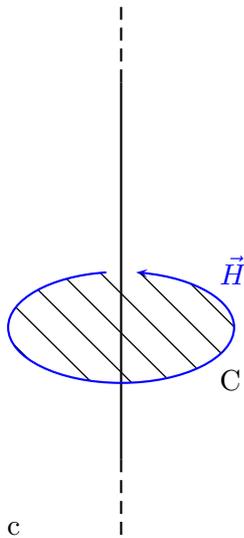
Kapitel 5

Elektromagnetische Wellen

5.1 Der Verschiebungsstrom

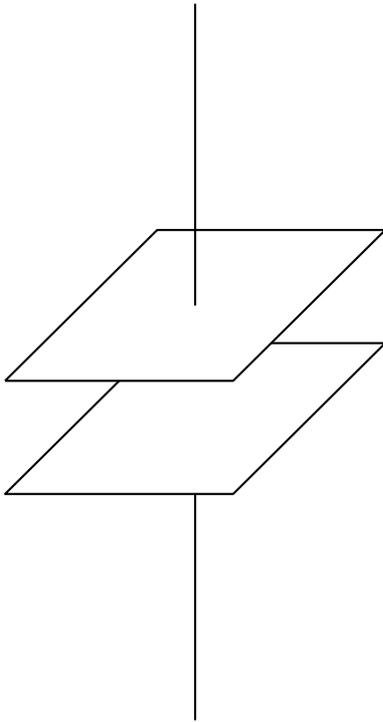
Erweiterung des Ampèreschen Gesetzten für zeitlich veränderliche Felder.

Maxwells Überlegungen:



$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{r} = I \quad \text{Strom durch die von C umschlossene Fläche}$$

mit Kondensator:



Idee: innerhalb des Kondensators gibt es zwar keinen Leitungsstrom, aber ein sich änderndes elektrisches Feld, dem ein Verschiebungsstrom I_V entspricht = Änderung des Flusses des \vec{D} -Feldes „Verschiebungsdichte“

$$I_V = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Fläche}} \vec{D} \, d\vec{A}$$

also:

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \, d\vec{A} \quad \text{Durchflutungsgesetz, 1. Maxwell'sche Gleichung}$$

oder:

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) \, dA$$

\vec{j} : Stromdichte

Quelle:

$$\oint \vec{D} \, d\vec{A} = Q$$

(oft als 1. Maxwell'sche Gleichung genannt)

Einflüsse des Materials $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Materialgleichungen:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

σ : Leitfähigkeit (evtl. Tensor)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \text{„linearer Fall“}$$

χ_e : elektrische Suszeptibilität (evtl. Tensor)

damit 1. Maxwell'sche Gleichung mit \vec{B} und \vec{E}

$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 \mu_r \int \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \right) \, d\vec{A} \quad \text{linearer Fall}$$

analog:

$$\oint \vec{E} \, d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \, d\vec{A}$$

keine Ströme von magnetischen Monopolen, Induktionsgesetz, 2. Maxwell'sche Gleichung

Quellen: $\oint \vec{B} \, d\vec{A} = 0$ (oft 4. oder 3.)

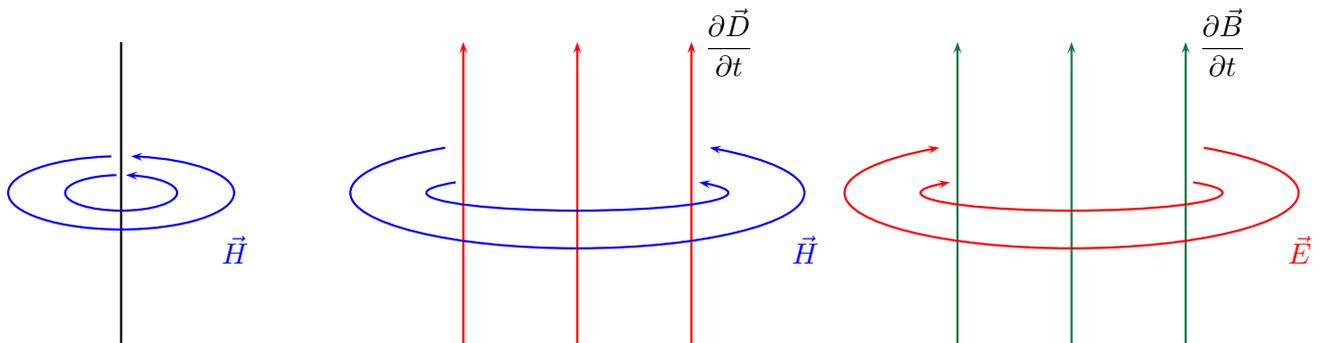
Materialgleichung:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{linearer Fall}$$

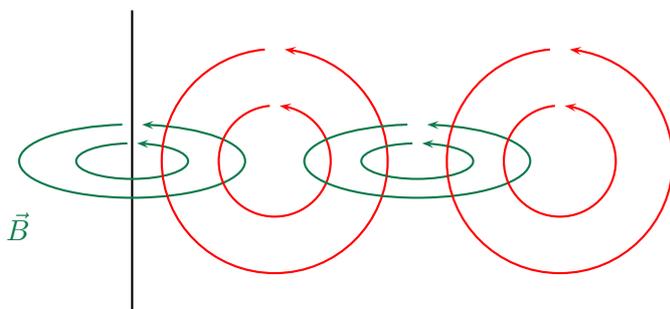
χ_m : magnetische Suszeptibilität (evtl. Tensor)

Durchflutungsgesetz

Induktionsgesetz



zeitlich veränderlicher Strom \rightarrow zeitlich veränderliches \vec{B} -Feld \rightarrow zeitlich veränderliches \vec{E} -Feld
 \rightarrow zeitlich veränderliches \vec{B} -Feld $\rightarrow \dots$



\rightarrow zeitlich veränderliche Strömung also beschleunigte Ladungen rufen elektromagnetische Felder hervor, die sich im Raum ausbreiten.
 \rightarrow elektromagnetische Wellen

5.2 Die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form

$$\begin{array}{l|l} \text{div } \vec{D} = \rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} & \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} \end{array}$$

mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ im Vakuum

$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ in vielen Materialien

ρ = Ladungsdichte in $\frac{\text{As}}{\text{m}^3}$

\vec{j} = Stromdichte in $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

zur Erinnerung:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die differentielle Form der Maxwellgleichungen ist äquivalent zu ihrer Integraldarstellung. Das folgt aus den Integralsätzen von Gauß und Stokes (siehe dazu Feynman-Lectures).

5.2.1 Integralsatz von Gauß

für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{C}(\vec{r})$ gilt:

$$\oint_{\text{OF}} \vec{C} \, d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{C} \, dV$$

also: aus $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

$$\oint \operatorname{div} \vec{D} \, dV = \int_V \rho \, dV$$

wird mit Gauß:

$$\oint_{\text{OF}} \vec{D} \, d\vec{A} = Q$$

und aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$$\int \operatorname{div} \vec{B} \, dV = 0$$

wird mit Gauß:

$$\oint_{\text{OF}} \vec{B} \, d\vec{A} = 0$$

5.2.2 Integralsatz von Stokes

für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{C}(\vec{r})$ gilt:

$$\oint_{\text{Rand}} \vec{C} \, d\vec{r} = \int \operatorname{rot} \vec{C} \, d\vec{A}$$

also: aus $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\int_A \vec{E} \, d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

wird mit Stokes:

$$\oint_{\text{Rand}(A)} \vec{E} \, d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

und aus $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\int_A \text{rot } \vec{H} \, d\vec{A} = \underbrace{\int_A \vec{j} \, d\vec{A}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{D} \, d\vec{A}}_{I_V}$$

wird mit Stokes:

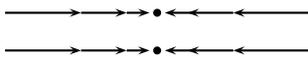
$$\oint_{\text{Rand}(A)} \vec{H} \, d\vec{r} = I + I_V$$

5.3 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

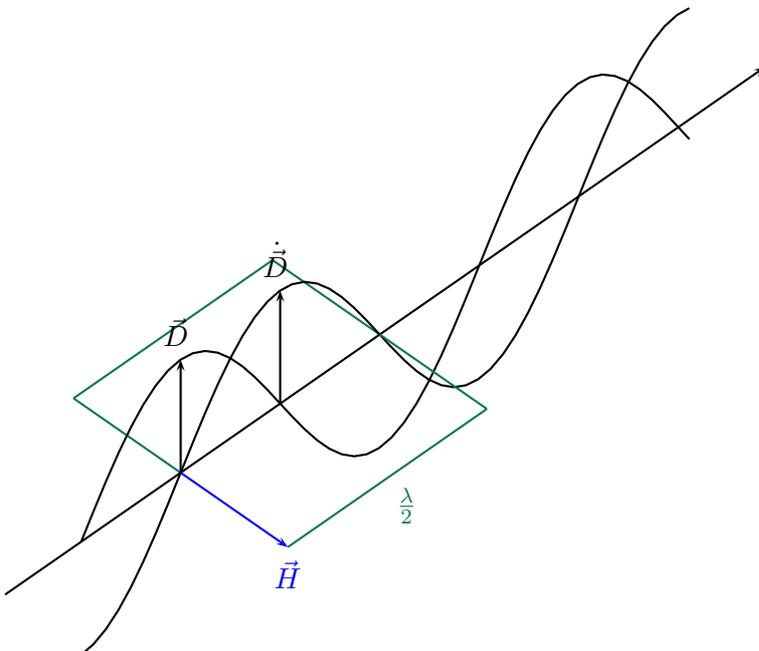
elektrische und magnetische Felder induzieren sich gegenseitig.
 einfachster Fall: ebene Welle in x - Richtung.

z.B. $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$

wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ und $\text{div } \vec{D} = 0$ im Vakuum müssen \vec{B} und \vec{D} Transversalwellen sein.
 Longitudinalkomponenten



führen zu Quellen und senken (Widerspruch)



$$\text{rot } \vec{H} = \dot{\vec{D}}$$

\vec{B} muss $\perp \vec{E}$ sein

Rahmen (Länge $\frac{\lambda}{2}$) fängt in der gezeichneten Position am meisten $\dot{\vec{D}}$ ein.

$$\oint \vec{H} \, d\vec{r} = \int \dot{\vec{D}} \, d\vec{A}$$

werden dann maximal
 $\rightarrow \vec{E}$ und \vec{H} sind in Phase
 wir finden:

$$\int \dot{\vec{D}} d\vec{A} = b \int_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \epsilon_0 \epsilon_r \dot{E}_y dx = b \cdot \epsilon_0 \epsilon_r E_{y0} \int_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \cos \frac{\omega x}{c} dx = b \cdot \epsilon_0 \epsilon_r \omega \frac{c}{\omega} E_{y0} \cdot 2 = \oint \vec{H} d\vec{r} = 2bH_{0z}$$

oder

$$H_0 = \epsilon_0 \epsilon_r c E_0 = c D_0$$

analog mit $\int \vec{E} d\vec{r} = - \int \dot{\vec{B}} d\vec{A}$ folgt:

$$E_0 = \mu_0 \mu_r c H_0 = c B_0$$

gegenseitig einsetzen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \text{Phasengeschwindigkeit der Welle}$$

für die 4 Feldvektoren gilt (in linearen Medien)

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} H_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} B_0 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} D_0$$

$$Z_w = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \quad \text{heißt Wellenwiderstand des Mediums}$$

$$Z_{w_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.52 \quad \text{Vakuumwiderstand}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

Das elektromagnetische Spektrum: *beliebige Wikipedia-Grafik hier einfügen*

5.3.1 Wellengleichungen aus den Maxwellgleichungen abgeleitet (im Vakuum)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times : \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

wegen $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \Delta \vec{C}$

Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (falls $\rho = 0$)

Daraus folgen die Wellengleichungen im Vakuum:

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

1-dimensionale, ebene Welle:

Ansatz:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)$$

\vec{k} : Wellenvektor, $|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$ Einsetzen:

$$-\vec{E}_0 k^2 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t) + \frac{1}{c_0^2} \vec{E}_0 \omega^2 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t) = 0$$

Dispersionsrelation im Vakuum:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2$$

Wie sieht das zugehörige \vec{B} -Feld aus?

Ansatz:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)$$

aus $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Induktionsgesetz)

$$-\begin{pmatrix} k_y E_{0z} - k_z E_{0y} \\ k_z E_{0x} - k_x E_{0z} \\ k_x E_{0y} - k_y E_{0x} \end{pmatrix} \sin(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t) = \mp \omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)$$

$$\rightarrow \vec{B} = \pm \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

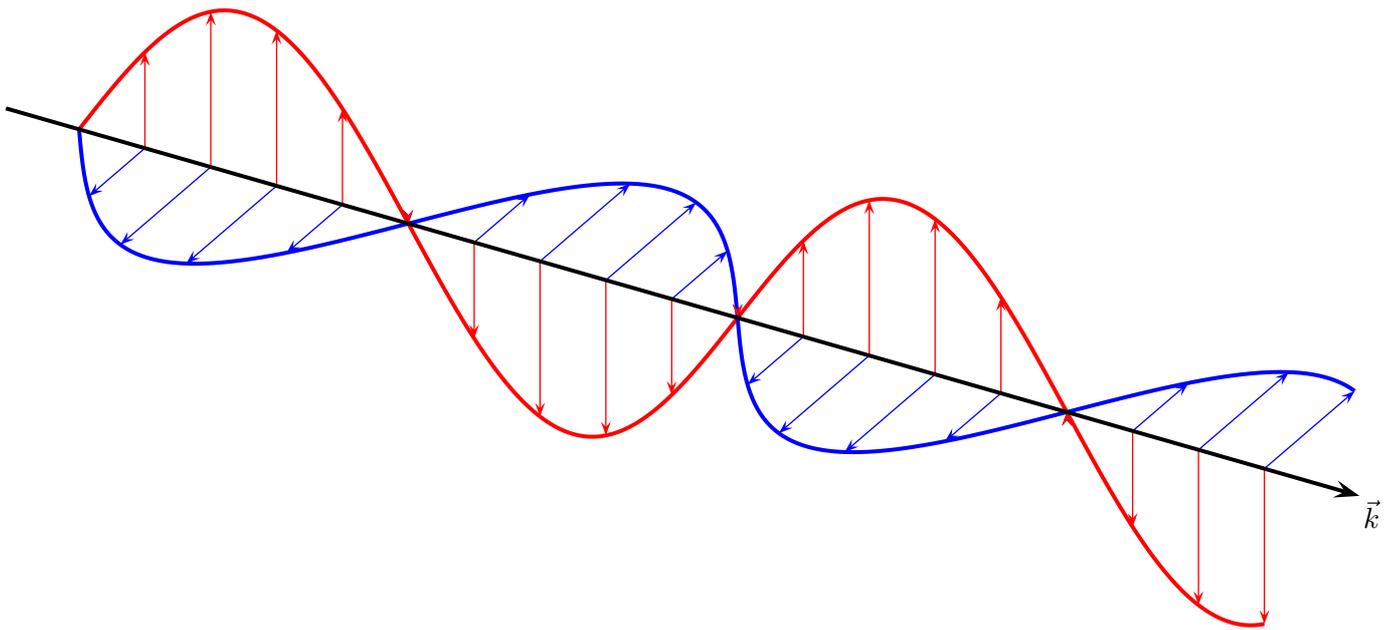
d.h. $\vec{B} \perp \vec{k}$ und $\vec{B} \perp \vec{E}$.

aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$-(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) \sin(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t) = 0$$

$$-\vec{k} \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t) = 0$$

$\vec{k} \vec{E}_0 = 0$ d.h. $\vec{H} \perp \vec{k}$.



!SKIZZE FEHLT!

5.4 Energiedichte einer elektromagnetischen Welle und der Poynting-Vektor

$$\text{Energiedichte } w = \frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H})$$

Die Energie der Welle ist zu gleichen Teilen im elektrischen und im magnetischen Feld.

$$\text{mit } E^2 = \frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r} H^2 \quad (\text{s.o.})$$

$$\text{wird } w = \epsilon_0\epsilon_r E^2 = \mu_0\mu_r H^2$$

„Energieplatten“ $\perp \vec{k}$ wandern mit Lichtgeschwindigkeit.

$$S = w \cdot c = \epsilon_0\epsilon_r E^2 \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{\mu_0\mu_r}} E^2 = E \cdot H$$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

5.5 Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum

$$\text{Lichtgeschwindigkeit } c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} < c_0 \quad \text{i.A.}$$

außer in Ferromagnetika ist $\mu_r \approx 1$

also

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c_0}{n}$$

mit Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r}$ Maxwellrelation

Dispersion:

$$n = n(\lambda) \quad \text{oder} \quad n = n(\omega)$$

$$\text{wegen} \quad \epsilon_r = \epsilon_r(\lambda), \chi = \chi(\lambda)$$

!SKIZZE FEHLT!

5.6 Der Skin Effekt

Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Leitern

Verschiebungsdichte \ll Leitungsstromdichte

$$\rightarrow \oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 \int \vec{j} \, d\vec{A}$$

solange $\omega <$ Stoßfrequenz $\frac{1}{\tau}$ der Elektronen, gilt das ohmsche Gesetz: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$
z.B. Kupfer bei 300K: $\frac{1}{\tau} \sim 10^{13} \text{s}^{-1}$

$$\rightarrow \oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 \sigma \int \vec{E} \, d\vec{A}$$

mit $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ und $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ ist

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}})$$

und

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (\text{rot } \vec{B} = \mu_0(j))$$

addiert:

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Lösung:

$$E_y = E_{y0} e^{-\frac{x}{l}} \sin(\omega t - kx)$$

mit Eindringtiefe

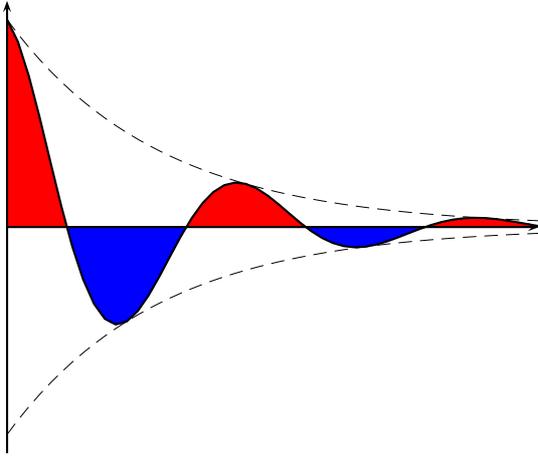
$$l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu_0 \sigma \omega}} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

und $k = \frac{1}{l}$ frequenzabhängig.

Beispiel Kupfer:

$$\omega = 2\pi \cdot 50 \text{Hz} \rightarrow l \approx 1 \text{cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 100 \text{Hz} \rightarrow l \approx 7 \text{cm}$$



Bei hohen Frequenzen werden elektromagnetische Wellen in Hohlleitern geführt.

!SKIZZE FEHLT!

Welle im Innern geführt mit $\vec{E}(\text{Rand})=0$
 → stehende Welle in y und z -Richtung
 propagierend in x -Richtung

!SKIZZE FEHLT!

5.7 Der Hertzsche Dipol

Ladungszosillator $\hat{=}$ stehende Welle

$\frac{\lambda}{2} = l \sim 0.5\text{m}$ im Heinrich-Hertz-Versuch
 $\nu = \frac{c}{\lambda} \approx 300\text{MHz}$

Breite der Resonanz

- Joulsche Wärme (Leitungswiderstand)
- Strahlungsverluste

Abstrahlcharakteristik:

Nahfeld: Feldverteilung sehr kompliziert

Fernfeld ($r \gg \lambda$):

$\vec{E} \perp \vec{B}$ und $\vec{E} \perp$ Abstandsvektor \vec{r}

Beträge:

$$E = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 \frac{\sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 r} \underbrace{\sin(kr - \omega t)}_{\text{Welle}}$$

$$E \sim \frac{\sin \varphi}{r}$$

$$B = \frac{E}{c}$$

!SKIZZE FEHLT!

$$|S| = E \cdot H \cdot c \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}$$

!SKIZZE FEHLT!

Abgestrahlte Leistung

$$\frac{dW}{dt} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \sim \omega^4$$

Streuung von Licht an Atomen (oder Partikeln $\Phi \ll \lambda$)
eingestrahlt E-Feld induziert Dipol

$$p = p_0 \sin \omega t = \epsilon_r \alpha E \sin \omega t$$

 α : Polarisierbarkeit des Atoms

→ Abstrahlung

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\alpha^2 \omega^4}{12\pi c^3} \epsilon_0 E_0^2 \quad \text{Rayleigh-Gesetz}$$

→ Himmelsblau und Abendrot

Kapitel 6

Konstanten

Name	Symbol	Wert
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8,854\,178 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$12,566\,371 \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Elementarladung	e	$1,602\,176 \cdot 10^{-19} \text{C}$
Protonenmasse	m_p	$1,672\,622 \cdot 10^{-27} \text{kg}$
Elektronenmasse	m_e	$9,109\,382 \cdot 10^{-31} \text{kg}$
Neutronenmasse	m_n	$1,674\,927 \cdot 10^{-27} \text{kg}$
Boltzmannkonstante	k_B	$1,380\,650 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Index

- Analog
 - Differenzierer, 73
 - Integrierer, 72
- Boltzmannkonstante, 34
- Coulombkraft, 8
- Diamagnetismus, 56
- Dipolmoment, 19
- Durchflutungsgesetz, 81
- elektrisches Potential, 15
- elektromagnetisches Spektrum, 84
- Energie
 - im elektrischen Feld, 29
 - im magnetischen Feld, 66
- Energiedichte einer elektromagnetischen Welle, 86
- Feldlinien, 14
- Ferromagnetismus, 57
- Flächenladungsdichte, 22, 27
- Hall-Effekt, 51
- Hertzsche Dipol, 88
- Hysterese, 57
- Induktionsgesetz, 81
- Induktivität, 66, 69, 74, 77
- Influenz, 22
- Innenwiderstand, 69
- Integralsatz
 - von Gauß, 82
 - von Stokes, 82
- Kapazität, 26, 27, 29, 74
 - einer Kugel, 28
- Kirchhoffsche Regeln, 10, 75
- Knotenregel, 10
- Koerzitivkraft, 58
- Kondensator, 26
- Ladung, 6
- Laplace-Operator, 84
- Lenzsche Regel, 63
- Lorentzkraft, 41, 49, 63
- magnetische
 - Erregung, 43
 - Flussdichte, 42
- magnetisches Moment, 48
- Magnetisierung, 55
- Maschenregel, 11
- Maxwellrelation, 87
- Maxwellsche Gleichung, 81
 - 1., 80
 - 2., 81
- Millikan-Versuch, 6
- Nabla-Operator, 16
- Orientierungspolarisation, 32
- Paramagnetismus, 56
- Phasengeschwindigkeit, 84
- Plattenkondensator, 6
- Polarisation, 30
- Poynting-Vektor, 86
- Quanten Hall-Effekt, 52
- Relaxation, 35
- Remanenz, 58
- Schwingkreis, 73
- Selbstinduktion, 65
- Skin-Effekt, 87
- Spannung, 9, 10
- Superpositionsprinzip, 13
- Suszeptibilität
 - elektrische, 30, 32, 36, 38
 - magnetische, 55, 81
- Transversalwellen, 83
- Vakuumlichtgeschwindigkeit, 84
- Vakuumwiderstand, 84
- Verschiebungsdichte, 80
- Verschiebungspolarisation, 31

Verschiebungsstrom, 80

Wellengleichung, 84

Wellenwiderstand, 84

Wheatstonesche Brücke, 70

Wirbelstrombremse, 63

Zeigerdiagramm, 77

Zyklotron, 49