

Experimentalphysik 2, Elektrodynamik
SS11 bei Prof. Dr. Weiß

Mitschriebe ausgearbeitet von
Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

24. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Beobachtete Phänomene	5
1.2	Elektrodynamik ist	6
1.3	Basisgröße Stromstärke	6
1.4	Ladungen und Ströme	6
1.5	Die Spannung	10
2	Grundlagen der Elektrostatik	17
2.1	Das elektrische Feld und das elektrische Potential	17
2.2	Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential	20
2.3	Der Kondensator und seine Kapazität	38
2.4	Die Energie des elektrischen Feldes	41
2.5	Isolatoren im elektrischen Feld	42
3	Das zeitlich konstante magnetische Feld	57
3.1	Grundlegendes	57
3.2	Das Amperesche Durchflutungsgesetz	61
3.3	Das Biot-Savartsche Gesetz	66
3.4	Materie im Magnetfeld	77
3.5	Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder	88
4	Elektrische Schaltkreise	95
4.1	Wechselstromschaltkreise und Widerstände	100
5	Elektromagnetische Wellen	109
5.1	Der Verschiebungsstrom	109
5.2	Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form	112

5.3	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen	114
5.4	Energiedichte einer elektromagnetischen Wellen, der Pointing-Vektor	118
5.5	Elektromagnetischen Wellen im Dielektrikum	119
5.6	Der Stein-Effekt	119
5.7	Der Hertzsche Dipol	119

Kapitel 1

Einführung

1.1 Beobachtete Phänomene

- Blitze
- Reibungselektrizität
- Griechen: Bernstein : electron
- Coloumb (1736-1806)
- Galvani (Froschschenkel)
- Volta (Spannungsquellen)
- Oerstaedt (Magnetfeld von stromdurchflossenen Leitern)
- Ampere
- Ohm
- Faraday
- Gauß
- Siemens
- Kirchhoff
- Maxwell

- Hertz
- Einstein
- Feynman

1.2 Elektrodynamik ist ...

- Berechnung elektromagnetischer Felder, erzeugt durch ruhende oder bewegte Ladungen
- Berechnung von Kräften aufgrund elektromagnetischer Felder
- fundamental: Maxwellsche Gleichungen, Satz von Differential- oder Integralgleichungen

1.3 Basisgröße Stromstärke

Definition

Stromstärke J , Einheit Ampere A , rel. Genauigkeit : 10^{-6}

1A ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stroms, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander aufgeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter, von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Länge elektrodynamisches die Kraft für $\frac{1}{5000000}$ N hervorgerufen wird.

1.4 Ladungen und Ströme

Ladung ...

- ist eine Eigenschaft von Materie
- bewirkt elektromagnetische Kräfte
- Symbol Q, q

- 2 Sorten : positiv(+), negativ(-)
gleichnamige: abstoßend
ungleichnamige : anziehend
- ist in der Natur gequantelt
 $Q = \pm n \cdot e, n = 0, 1, 2, \dots$
 $e = 1.6021892E - 19C$ Elementarladung
Millikan-Versuch (1909)
Öltröpfchen in Plattenkondensator
 - ohne angelegte Spannung:
gedämpfter Fall im Schwerfeld der Erde, mit bekannter Dichte $\eta \rightarrow Radius \rightarrow Masse$
 - mit angelegter Spannung: Stelle Spannung so ein, dass das Tröpfchen schwebt,
d.h. Gleichgewicht der Kräfte $q \frac{U}{d} = mg$
experimentell $q = n \cdot e$

Grund der Quantelung:

Eigenschaften von Elementarteilchen

- Elektron (Symbole): $q = -e$
- Positron (e^+): $q = +e$
- Proton (p): $q = +e$
- Neutron (n): $q = 0$
- Neutrino (ν): $q = 0$
- Photon (γ): $q = 0$
- Quarks: u, c, t: $q = +\frac{2}{3}e$
d, s, b: $q = -\frac{1}{3}e$
treten aber nur in gebundenen Zuständen auf, so dass $q = 0, \pm e$, dies ist noch nicht völlig verstanden!
- Ladung $+e$ und $-e$ sind betragsmäßig sehr gleich ($+e + -e < 10E - 19e$)

- Ladung ist eine Erhaltungsgröße. Im abgeschlossenen System gilt Ladungserhaltung.

mikroskopisch: bei Elementarprozessen: $n \rightarrow p + e^- + \nu$

$$q = 0 \rightarrow +e + -e + 0, q = 0$$

- Gesamtladung ändert sich nicht

$$\sum_i q_i = 0, \text{ vorher und nachher}$$

- makroskopisch

zeitliche Änderung der Ladung ΔQ während eines Zeitintervalls Δt sind durch Ströme gegeben. $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ oder $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$ Umkehrung: $Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^t I(t') dt'$ Ladung ist die Fläche unter dem Strom $I(t)$.

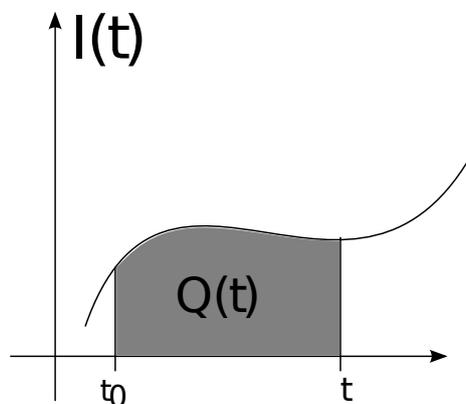


Abbildung 1.1: Schaubild zur Ladung

Einheit der Ladung: $[Q] = [I] \cdot [t] = As = C$ (Coulomb)

1.4.1 Coulombsches Kraftgesetz

Definition

Kraft zwischen zwei ruhenden, punktförmigen Ladungen Q_1 und Q_2 :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

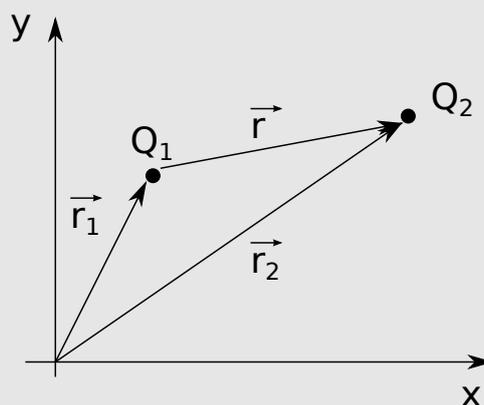


Abbildung 1.2: Kräfte zwischen Ladungen

\vec{F} ist die Kraft, die Q_1 auf Q_2 ausübt

formal ähnlich zum Gravitationsgesetz, Gravitation ist immer anziehend

Coulombkraft abstoßend oder anziehend

quantitativ: Coulombkraft zwischen zwei Protonen ist 10^{36} ! mal stärker als die Gravitationskraft

Vorfaktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ist durch Konvention festgelegt wegen der enthaltenen Basisgrößen

Definition

ε_0 ist eine Naturkonstante und heißt Dielektrizitätskonstante des Vakuums.

Zahlenwert: $\varepsilon_0 = 8.854E - 12 \frac{As}{Vm} \frac{As}{Vm} = \frac{C^2}{Nm^2}$

graphisch:

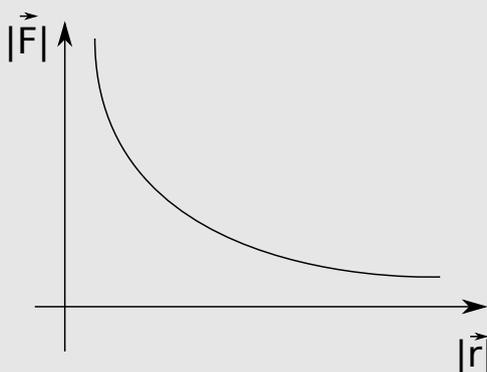


Abbildung 1.3: Schaubild zu ε

Zusätzliche Bemerkung: Lorentzkraft: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

1.5 Die Spannung

Definition

Man muss Arbeit verrichten um Ladungen verschiedener Vorzeichen zu trennen.

Die **Spannung** U ist ein Maß für die aufgewendete Ladungstrennarbeit:

$$U := \frac{W}{Q} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}}$$

z.B. mit Coulombkraft: $W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} d\vec{r}$ damit Einheit: $\frac{Nm}{As} = \frac{J}{As} = \frac{Ws}{As} =$

$\frac{W}{A} := V$ (Volt)

Arbeit im Van de Graaff-Generator

Definition

Pole nennt man Ladungsansammlungen $+$, $-$ an zwei Orten. Zwischen den Polen herrscht eine Spannung. Werden die Pole verbunden, so fließt aufgrund der anziehenden Kräfte Strom

In elektrisch leitenden Festkörpern (z.B. Metallen) herrscht Elektronenüberschuss am Minuspol und Elektronenmangel am Pluspol. Elektronen fließen vom Minus- zum Pluspol. Technische Stromrichtung: Im passiven Bauelementen fließt der Strom von $+$ nach $-$. Bei diesem Ladungstransport wird mechanische Arbeit verrichtet:

$$W = Q \cdot U \quad \text{bei } U = \text{const.}$$

Definition

Die **Leistung** ist definiert als Arbeit pro Zeit:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot U = I \cdot U$$

Einheit: W (Watt)

1.5.1 Das Ohmsche Gesetz**Definition**

Für viele Systeme, insbesondere Metalle, findet man folgenden Zusammenhang zwischen Spannung und Strom.

$$U = R \cdot I$$

R nennt man **Ohmschen Widerstand**. Einheiten Ω (Ohm).

Symbol:



Ein makroskopischer Widerstand ist mit einer mikroskopischer Dämpfung und Dissipation verknüpft

$$P = U \cdot I = U \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$

Achtung: Halbleiterdioden verhalten sich nicht ohmsch. R hängt im Allgemeinen von der Temperatur ab.

1.5.2 Die Kirchhoffschen Regeln

Einige allgemeine (nicht nur für Ohmsche Widerstände) Zusammenhänge zwischen I und Q in Systemen von Bauelementen

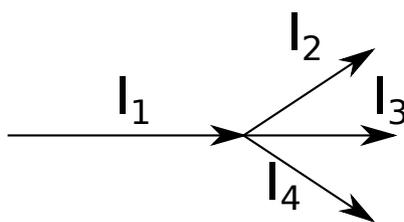
- (1) Kirchhoffsche Regel (Knotenregel)

Definition

Die Summe aller Ströme eines Stromknotens ist Null

$$\sum_n I_n = 0$$

zum Beispiel Knotenpunkt



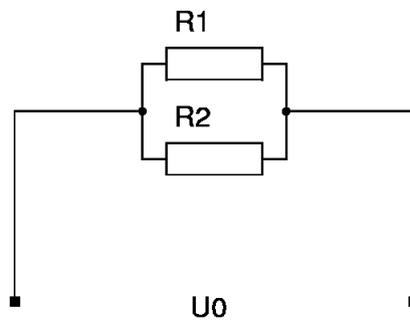
bei Ladungserhaltung am Knoten muss innerhalb eines Zeitintervalls Δt die Ladung

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_3 - \Delta Q_4 = 0 \\ &= \int_{\Delta t} I_1 dt - \int_{\Delta t} I_2 dt - \int_{\Delta t} I_3 dt - \int_{\Delta t} I_4 dt = 0 \end{aligned}$$

bei $I_n = \text{const}$

$$= \Delta t(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \implies I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

Beispiel: Parallelschaltung von Widerständen



2 Ohmsche Widerstände R_1 , R_2 parallel geschaltet. Nach der Knotenregel gilt dann

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_{ges}}$$

mit

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Der Gesamtwiderstand ist somit kleiner als jeder einzelne Widerstand.

(2) Kirchhoffsche Regel (Maschenregel)

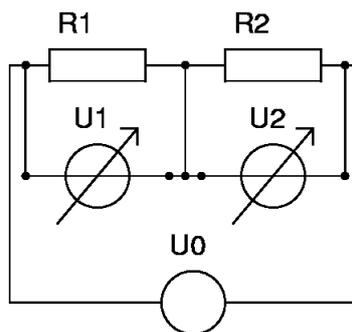
Definition

Die Summe aller treibenden Spannungen in einer Masche ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle in dieser Masche. Die Energiezuflüsse (z.B. Batterie) korrespondieren zu Spannungsquellen. Die Energieabflüsse zu Spannungsabfällen.

$$\sum_n U_n = 0$$

Quellen werden positiv, Spannungsabfälle negativ gezählt.

Beispiel: Serienschaltung von Widerständen



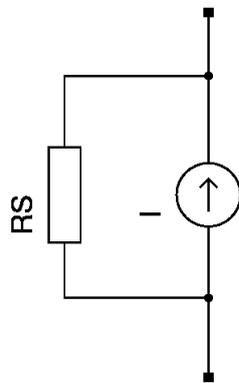
es gilt:

$$U_0 = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = R_{ges} I$$

mit

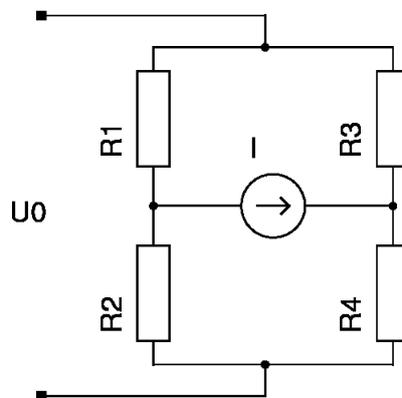
$$R_{ges} = R_1 + R_2$$

Beispiel: Bereichserweiterung von Messinstrumenten. z.B. Ampèremeter mit Vollanschlag 1 mA bei Strom von 1 A ?



R_S nennt man Shuntwiderstand.

Beispiel: Weatstonsche Brückenschaltung

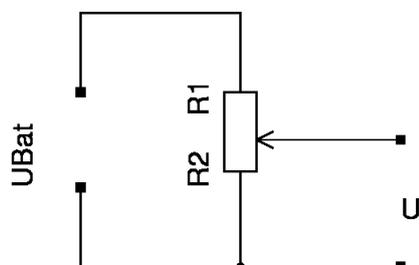


Abgleich der Widerstände so, dass $I = 0$, dann ist

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

bei Kenntnis von 3 Widerständen ist der vierte berechenbar. Nullabgleich ist sehr empfindlich.

Beispiel: Potentiometerschaltung

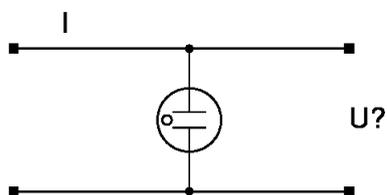


Es gilt: $U = R_2 I$ und $U_{Bat} = (R_1 + R_2)I$

$$U = R_2 \frac{U_{Bat}}{R_1 + R_2}$$

variabel je nach Abgriff.

Experiment: Widerstand einer Glühbirne



Bei $I = 10 \text{ mA}$ (die Glühbirne leuchtet nicht) findet man $U = 100 \text{ mV}$. Damit ist $R = 10 \text{ } \Omega$. Bei $I = 100 \text{ mA}$ (die Glühbirne leuchtet) findet man hingegen $U = 5 \text{ V}$. Damit gilt jetzt $R = 50 \text{ } \Omega$. Der Unterschied liegt in der Temperatur des Metalldrahtes in der Glühbirne (ungefähr $R \propto T$ in Kelvin)

Kapitel 2

Grundlagen der Elektrostatik

2.1 Das elektrische Feld und das elektrische Potential

Definition

Eine physikalische Größe $f = f(x, y, z, t)$ nennt man **Feld** (z.B. Gravitationsfeld oder Coulomb-Kraftfeld). Falls f ein Vektor ist, spricht man von einem **Vektorfeld**. Ist f hingegen eine skalare Größe, spricht man von einem **Skalarfeld**.

Auf unseren Themenbereich angewandt, bietet sich folgende Definition für ein Feld an:

Definition

Die **elektrische Feldstärke** \vec{E} ist definiert durch

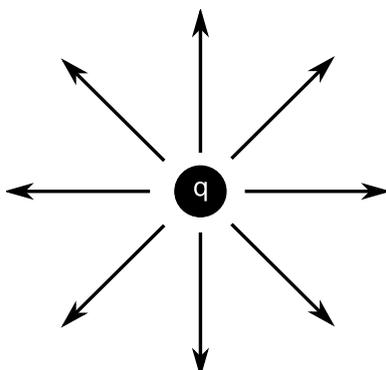
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

Die Kraft ist z.B. die Feldstärke der Ladung Q_1 nach dem Coulombschen Gesetz. Dann gilt

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|r|}$$

Die Feldstärke wird visualisiert durch die Feldlinien. Das Feld einer Punktladung wird

somit visualisiert mit



Für Vektorfelder gilt folgende Vereinbarung

- Das Feld zeigt tangential zu den Feldlinien
- Feldlinien kreuzen sich nicht (sonst nicht eindeutig)
- Feldliniendichte ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke
- Richtungspfeil zeigt von + nach -

Superpositionsprinzip

Die experimentelle Beobachtung zeigt, dass sich elektrische Kräfte additiv überlagern. z.B. die Coulombkraft von zwei Ladungen Q_1 und Q_2 auf eine Probeladung q

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 q}{|\vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{Q_2 q}{|\vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right)$$

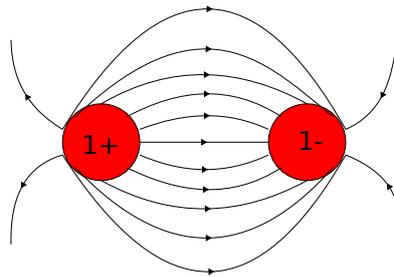
entsprechend für die Feldstärke

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|\vec{r}_1|^3} \vec{r}_1 + \frac{Q_2}{|\vec{r}_2|^3} \vec{r}_2 \right)$$

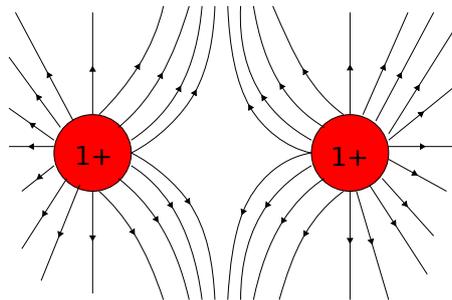
elektrische Felder überlagern sich additiv. Dies ist ein nichttriviales Prinzip! Dreierkräfte - also Kräfte, die nur zwischen drei Teilchen (oder Objekten) bestehen - sind offenbar von der Natur ausgeschlossen.

Weitere Feldlinienbilder:

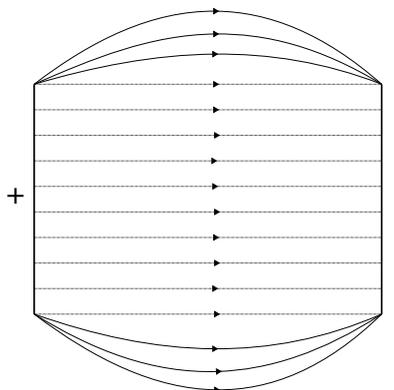
zwei ungleichnamige Punktladungen:



zwei gleichnamige Punktladungen:



homogenes, elektrisches Feld



Gesamt vieler Ladungen, Ladungsverteilung auf eine Ladung q



kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\rho(r)$: Probeladung erfährt durch dQ die Kraft

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdQ}{|R-r|^2} \frac{R-r}{|R-r|}$$

Die Gesamtkraft ergibt sich durch integrieren

$$Q = \int_V \rho(R) dV$$

also

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{R-r}{|R-r|^3} \rho(r) dV$$

Bemerkung: Elektrisches Feld einer Punktladung divergiert mit $\frac{1}{r^2}$ für $r \rightarrow 0$. Wir müssen annehmen, dass alle realen Ladungsträger eine endliche Ausdehnung mit endlicher Ladungsdichte besitzen.

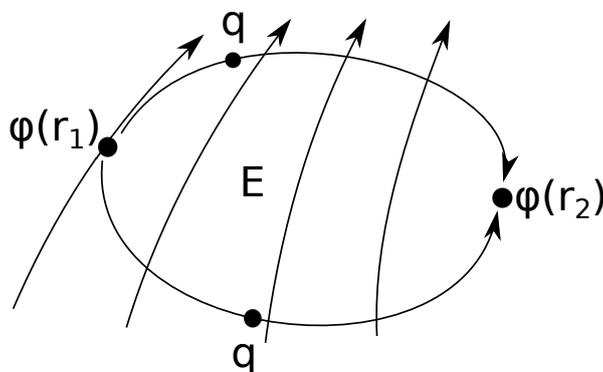
2.2 Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \frac{\vec{F}(x, y, z, t)}{Q}$$

Das elektrostatische Potential

Arbeit, um Ladung q im Feld anderer Ladungen vom Ort \vec{r}_1 zum Ort \vec{r}_2 zu bringen, ist

$$W_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$



Spannung:

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{q} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

z.B. : Coloumbfeld einer Punktladung mit $|\vec{F}| = \frac{1}{4\epsilon_0\pi} \frac{Q_1}{r^2}$

$$U_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

kommt man aus dem Unendlichen ($r_1 = \infty$), dann

$$U_{\infty 2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2}$$

Dies hängt nur noch vom Abstand r_2 und von der Ladung Q_1 ab.

Diese Größe wird **Potential** $\varphi(r_2)$ des Ortes Abstand r_2 genannt

$$\varphi(r_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2}$$

damit kann eine Spannung U_{12} als **Potentialdifferenz** geschrieben werden.

$$U_{12} = \varphi(r_2) - \varphi(r_1)$$

Können wir die elektrische Feldstärke \vec{E} als Funktion von φ ausdrücken?

Zunächst können wir feststellen, dass obiges Arbeitsintegral W_{12} und damit die Potentialdifferenz U_{12} unabhängig vom Weg ist.

Das gilt auch für Felder von nicht punktförmigen Ladungsverteilungen, die wir uns aus Coloumbfeldern zusammengesetzt vorstellen können.

Wir sehen dann die Analogie zum Zusammenhang zwischen potentieller Energie und konservativen Kraftfelder aus der Mechanik.

Auch $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ ist ein konservatives Kraftfeld.

eindimensional :

$$\varphi(x) = - \int_{\infty}^x E(x') dx'$$

oder umgekehrt :

$$E(x) = - \frac{d\varphi}{dx}$$

mit

$$\varphi(\infty) = 0$$

(praktische Wahl)

In drei Dimensionen :

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

d.h. das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ entspricht dem negativen Wert der Arbeit, um eine positive Einheitsladung in einem elektrischen Feld von ∞ nach \vec{r} zu führen.

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

Nochmal Einheiten : $[\varphi] = V = \frac{Nm}{C} = \frac{J}{C} = \frac{W}{A}$

potentielle Energie $[W_{pot}] = [q\varphi] = CV$

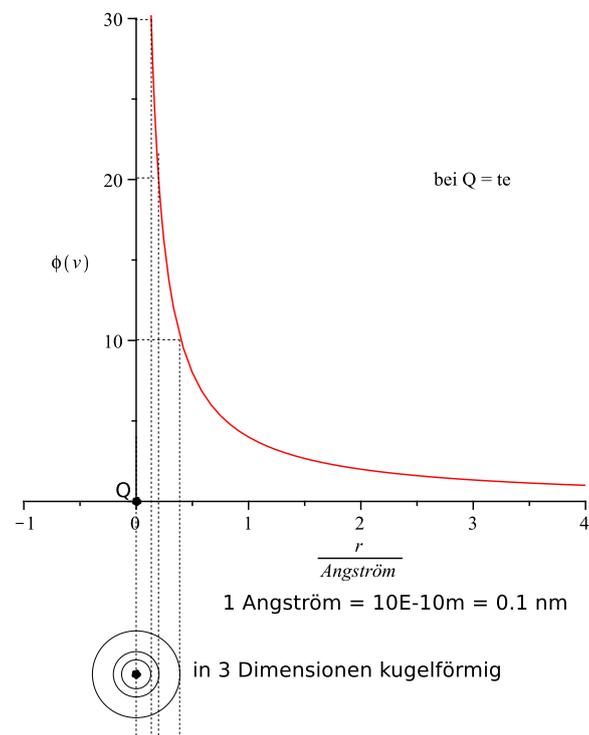
elektrisches Feld: $[E] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$

Das Linienintegral der elektrostatischen Felder über eine geschlossene Kurve ist Null

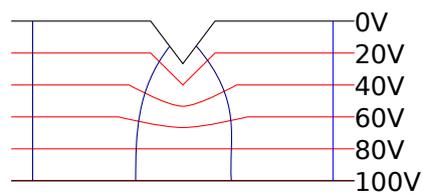
$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$$

Beide Beschreibungsweisen des elektrischen Feldes durch $\vec{E}(\vec{r})$ oder durch $\varphi(\vec{r})$ sind gleichberechtigt.

Das Potential wird durch **Äquipotentialflächen** oder **-linien** veranschaulicht.



Auf Äquipotentialflächen herrscht immer das gleiche Potential ($\varphi = const$) bei Bewegung auf einer Äquipotentialflächen ist $\delta\varphi = 0 \implies \vec{E}d\vec{r} = 0 \implies \vec{E} \perp d\vec{r}$
 Metallische Oberflächen sind Äquipotentialflächen, sonst gäbe es Ladungsverschiebungen, elektrische Feldstärke $\vec{E} \perp$ Oberfläche
 z.b. Metallspitzen



Elektrische Feldstärke und elektrostatischen Kräfte sind in Spitzenhöhe **hoch**
 Anwendungen :

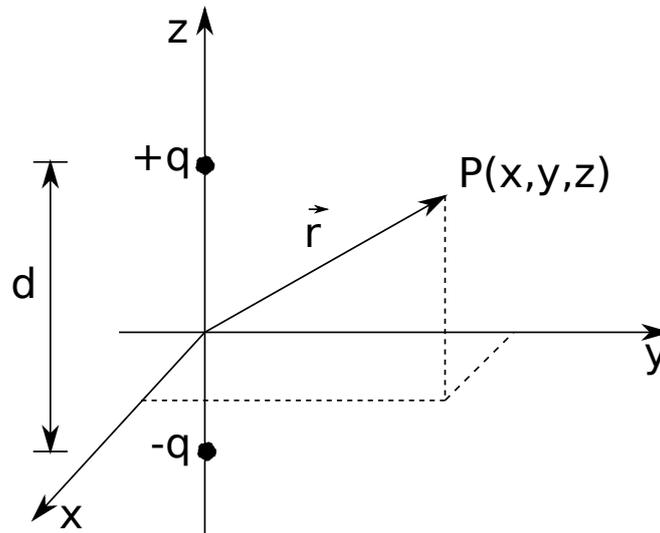
- Blitzableiter
- Geigersche Spitzenzähler
- Feldionenmikroskop

Zahlenbeispiele für Feldstärken :

Interplanetarer Raum :	$10^{-3} \frac{N}{C}$
Zündung bei trockener Luft :	$10^6 \frac{N}{C}$
in Atomen(Van de Graaf) :	$10^9 \frac{N}{C}$
in Kernen :	$10^{21} \frac{N}{C}$

Potential und Feldstärke eines elektrischen Dipols

Wir betrachten zwei Punktladungen $+q, -q$ im Abstand d auf der z -Achse



Das Potential des Nahfeldes ist gegeben durch:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{d}{2})^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \frac{d}{2})^2}} \right)$$

Das Fernfeld in weiten Entfernungen (die Entfernung der beiden Ladungen ist vernachlässigbar) mit der Näherung

$$d \ll r \quad \frac{d^2}{r^2} \approx 0 \quad (1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad \text{für } x \ll 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z \pm \frac{d}{2}\right)^2}^{-1} = \sqrt{r^2 \left(1 \pm \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)}^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{zd}{2r^2}\right)$$

ist gegeben durch:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q \cdot d)z}{r^2}$$

Das Produkt $q \cdot \vec{d}$ wird als **Dipolmoment** \vec{p} bezeichnet. \vec{p} ist Vektor, der von der negativen zur positiven Ladung zeigt.

Allgemeiner:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos(\theta)}{r^2}$$

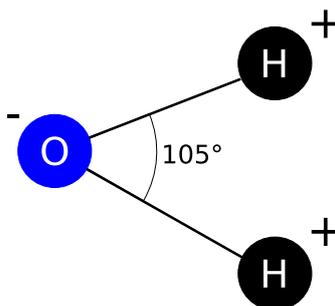
wenn θ der Winkel zwischen Probeladung und Ladungsverbindungsline ist.

Die elektrische Feldstärke im Fernfeld ist dann gegeben durch (mit $\vec{E} = -\nabla\varphi$)

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{3zx}{r^5} \\ \frac{3zy}{r^5} \\ \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \end{pmatrix}$$

zum Beispiel bei polaren Molekülen:

$$\begin{array}{ll} H^+Cl^- & p_{HCl} = 3,43 \cdot 10^{-30} \text{ Cm} \\ H_2O & \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{array}$$

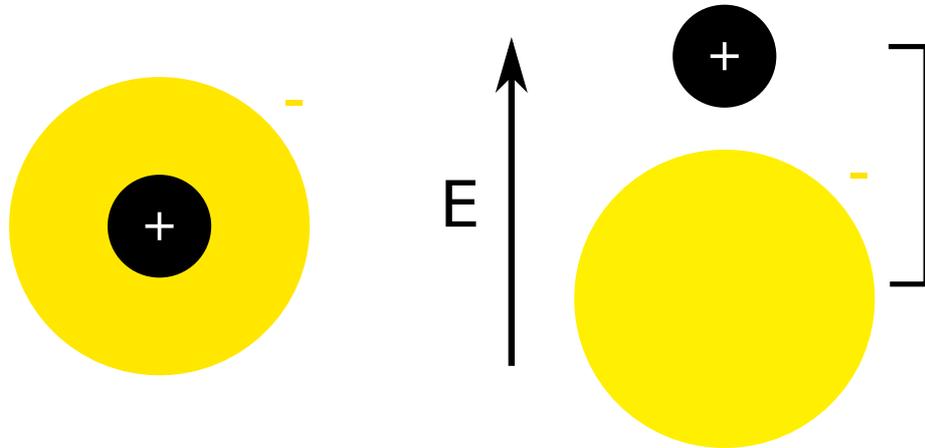


Dipolmomente (wie bei H_2O) lassen sich vektoriell addieren.

$O - C - O$ resultierender Dipolmoment ist 0, der Quadrupolmoment verschwindet jedoch nicht

Atome, die keinen Dipolmoment besitzen erfahren im elektrischen Feld eine Ladungverschiebung. Es entsteht ein **induzierter Dipolmoment**.

zum Beispiel: Wasserstoffatom



ohne \vec{E} -Feld: kein Dipolmoment

mit \vec{E} -Feld: $\vec{p} = q\delta$

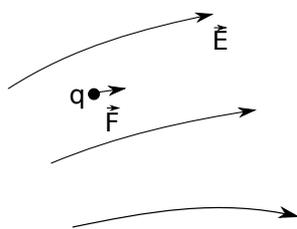
\vec{p} hängt von der **Polarisierbarkeit** α ab:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$$

Atom	H	He	Li	Be	C	Ne	Na
Zahlenwerte (10^{-24} cm^3)	0.66	0.21	12	9.3	1.5	0.4	27

Bei großen Feldstärken ($\geq 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}}$) wird \vec{p} nichtlinear von \vec{E} abhängen (vgl. nichtlineare Optik)

Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld



Im Feld gilt:

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

und mit Newton ist die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

Abbildung 2.1: Elektrisches Feld

Im homogenen Feld ist \vec{a} konstant. Im inhomogenen Feld hingegen von Ort zu Ort verschieden, was in der Regel die Rechnung aufwändiger macht. Aber: pauschal gilt die Energieerhaltung: Zuwachs der kinetischen Energie auf Kosten der potentiellen Energie

$$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot,el}$$

also

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -q(\varphi - \varphi_0) = qU$$

2.2.1 Definition

Elektronenvolt

In der Kernphysik gilt dies als Energiemaß mit der Einheit eV. Dies ist die Energie, die ein Elementarteilchen mit der Ladung e beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz von 1 V erhält:

$$1 \text{ Elektronenvolt} = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Die erreichte Geschwindigkeit liegt dann bei

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m} + v_0^2}$$

Bei schnellen Teilchen muss allerdings der relativistische Masseneffekt beachtet werden mit

$$qU = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Bewegung eines geladenen Teilchens quer zum elektrischen Feld

hier: homogenes Feld

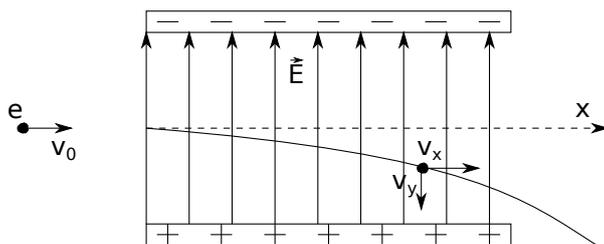


Abbildung 2.2: Geladenes Teilchen im homogenen Feld

Die Geschwindigkeiten erhält man (wie beim horizontalen Wurf) mit

$$v_x = v_{x0} = \text{const.} \quad v_y = a_y t$$

Experiment: Anwendung: Braunsche Röhre

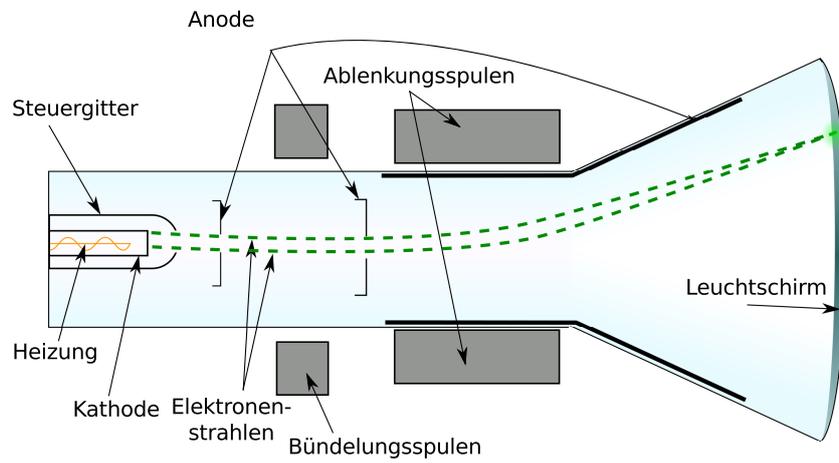


Abbildung 2.3: Braunsche Röhre (Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Kathodenstrahlröhre>, 30.06.2011)

2.2.2 Elektrische Verschiebungsdichte \vec{D} und der Gaußsche Satz

2.2.3 Definition

Allgemein ist der **Fluss eines Vektorfeldes** (z.B. eines Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{r})$, Teilchendichte oder Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$) pro Zeiteinheit durch dA ist

$$d\Phi = \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

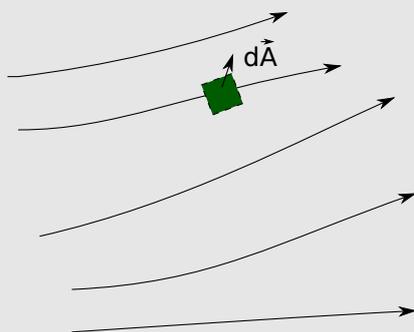


Abbildung 2.4: Fluss eines Vektorfeldes

Der Gesamtfluss durch die geschlossene Fläche F ist dann

$$\Phi = \oint_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

misst die Ergiebigkeit einer Quelle Q , die sich innerhalb F befindet. Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes.

Welche Feldgröße ist unmittelbar mit den freien Ladungen verknüpft? Dies führt auf:

Materie im elektrischen Feld

Leiter/Metalle Influenz (Verschiebung frei beweglicher Ladungsträger, sodass das Leiterinnere feldfrei ist)

$$E = 0$$

Nichtleiter Polarisierung (s.u.) führt zu Dipolzeugung und -ausrichtung. Dadurch ist die

elektrische Feldstärke im Inneren erniedrigt.

$$E_{innen} = \frac{1}{\epsilon_r} E_{aussen}$$

Wir benutzen **Influenz** für folgende Überlegungen:

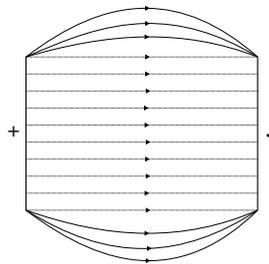


Abbildung 2.5: Normaler Plattenkondensator

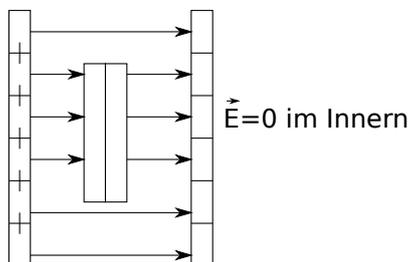


Abbildung 2.6: Plattenkondensator mit zwei Metallplatten

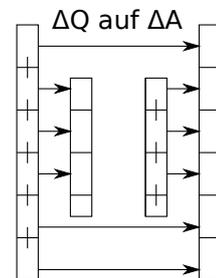


Abbildung 2.7: Plattenkondensator und feldfreier Raum

2.2.4 Definition

Die **Flächenladung** ΔQ auf ΔA und die **Flächenladungsdichte** $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ ergeben im homogenen Fall direkt die Verschiebungsdichte

$$|\vec{D}| = \sigma$$

ΔQ ist messbar über einen Entladungsstrom. Die Feldlinien von \vec{D} bilden einen Verschiebungsdichtefluss

$$d\Phi = \vec{D} \cdot dA$$

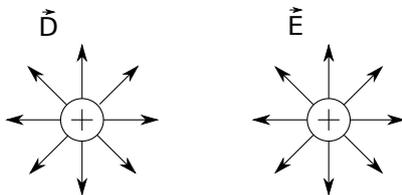
und bei geschlossener Fläche

$$\Phi = \oint_F \vec{D} \cdot dA = \int_V dQ = Q$$

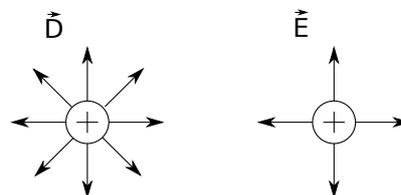
wobei Q die Gesamtladung ist und V die Fläche innerhalb F . Dies ist der **Gaußsche Satz** und einer der **Maxwell Gleichungen**. Weiterhin: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ im Vakuum und $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ in vielen Dielektrika.

\vec{D} - und \vec{E} -Felder einer Punktladung Q

im Vakuum:



im Medium mit $\epsilon_r = 2$:



Die elektrische Feldstärke ϵ_0 gibt an, welche Ladungsdichte σ in As/m^2 von einer Feldstärke $E = 1 V/m$ gebunden wird.

Satz

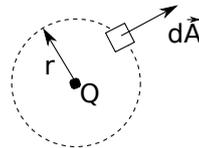
Gaußscher Satz (eine Maxwellgleichung)

$$\oint_F \vec{D} d\vec{A} = Q = \int_V dq$$

$$(\Phi_D) \oint_F \vec{E} d\vec{A} = \begin{cases} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ im Vakuum} \\ = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \text{ in Materie} \end{cases}$$

Einige grundlegende Beispiele

(1) Feld um eine Punktladung Q



Hüllfläche sei eine Kugeloberfläche mit Radius r

$$\oint_{\text{Kugel mit Oberfläche } F} \vec{D} d\vec{A} = Q$$

Aus Symmetriegründen ist \vec{D} parallel zu $d\vec{A}$ und $|\vec{D}|$ auf der Kugeloberfläche überall gleich.

$$D(r) \cdot A(r) = D(r) 4\pi r^2 = Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

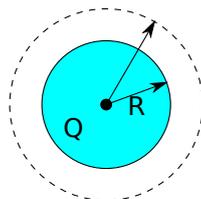
und

$$E(r) = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{Q}{r^2}$$

Coulomb-Gesetz

Der Gaußsche Satz und das Coulomb-Gesetz sind äquivalente Darstellungen der Elektrostatik. Feldverteilung \iff Ladungsverteilung

- (2) in Beispiel 1) wird nirgends davon Gebrauch gemacht, dass die Ladung punktförmig ist; für jede kugelsymmetrische Ladungsverteilung gilt die gleiche Überlegung.
 \curvearrowright wieder $E(r) \propto \frac{Q}{r^2}$
 \curvearrowright hat man ein Coulombfeld, lässt sich daraus nicht auf den Radius der kugelsymmetrischen Ladungsverteilung schließen, z.B. bei Durchmesser von Atomkernen.
- (3) Der Gaußsche Satz lässt sich auch auf die Gravitation anwenden, wegen $F \propto \frac{1}{r^2}$, d.h. insbesondere als ob Gesamtmasse der Erde im Mittelpunkt konzentriert wäre.
- (4) Feld einer homogen geladenen Kugel



im Außenraum $r \geq R$

Hüllfläche: Kugelfläche mit Radius r

$$\oint_{\text{Kugel}OF(r)} \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ s.o. wie Punktladung}$$

im Innenraum: $r \leq R$

Die Kugelfläche mit Radius r umschließt die Ladung Q . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{Q_r}{Q} &= \frac{V_r}{V_R} \\ \vdots & \\ E(r) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3} \end{aligned}$$

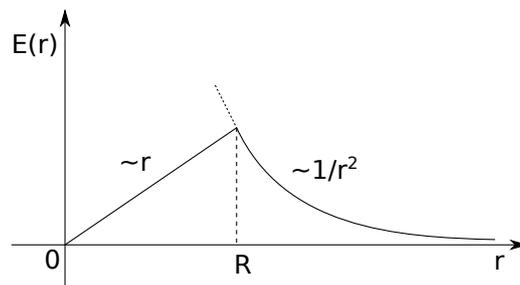


Abbildung 2.8: E-Feld einer homogen geladenen Kugel

- (5) In einem Leiter (Metall) muss im statischen Fall die elektrische Feldstärke $E = 0$ sein. Sonst verschöbe sich unter ihrer Einwirkung die Ladung so lang bis $E = 0$ erreicht ist. Nach dem Gaußschen Satz heißt dies, dass im Volumen eines Leiters im statischen Fall keine Ladung sein kann.

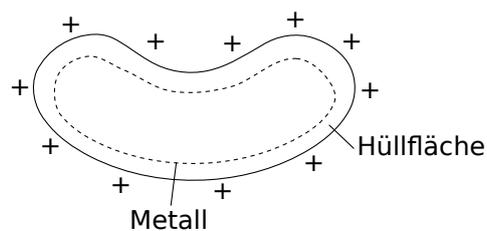


Abbildung 2.9: Leiter mit feldfreiem Inneren

bei $\vec{E} = 0$ ist $\oint_{\text{Hüllfläche}} \vec{E} d\vec{A} = 0$

$\leadsto Q$ innerhalb Hüllfläche = 0

\leadsto Ladung kann nur auf der Metalloberfläche sitzen.

Gilt auch für metallische Hohlkörper. Anwendungen: Faraday-Käfig etc.

- (6) Feldüberhöhung an metallischen Spitzen

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

$$E_{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2}$$

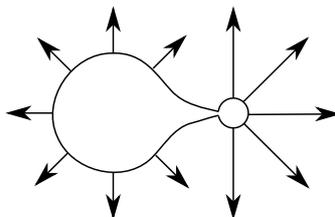
bei einer Kugeloberfläche

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Potential an der Kugeloberfläche

$$E_{\perp} = \frac{\varphi}{R}$$

verbunden zwei Kugeln, gleiches Potential



Auf der Oberfläche der kleineren Kugel ist die Feldstärke größer als auf der Oberfläche der größeren, $E_{\perp} \propto \frac{1}{R}$

↪ hohe Feldstärken an Spitzen

Anwendungen: Blitzableiter etc.

in Hochspannungsgeräten werden nur Bauteile mit großen Krümmungsradien verwendet

(7) Bildladung

wir wollen Feldverteilung berechnen zwischen geladenen Metallen beliebiger Form, ist i.A. schwierig (→ Computer)

Bei einfachen Geometrien hilft: Metalloberflächen sind Äquipotentialflächen $\vec{E}_{\perp OF}$
z.B. Feld zwischen einer ebenen Metallplatte und einer Punktladung Q im Abstand r

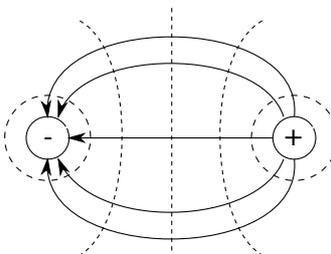


Abbildung 2.10: 1. in Gedanken, zwei Ladungen mit Äquipotentiallinien

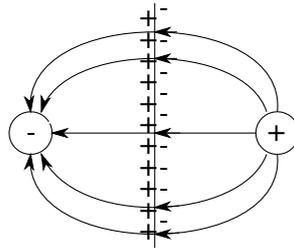


Abbildung 2.11: 2. Metallplatte einschieben, es entstehen OF-Ladungen, Feldverteilung ändert sich nicht

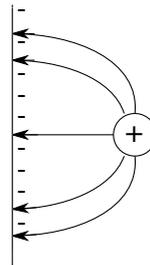


Abbildung 2.12: 3. Entfernen von $-Q$ ändert die Feldverteilung nicht

Feld so, als wäre eine negative Ladung $-Q$ auf der Metalloberfläche nennt man Bildladung.

Entsprechend gibt es eine Bildkraft

$$F_{Bild} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2r)^2}$$

2.3 Der Kondensator und seine Kapazität

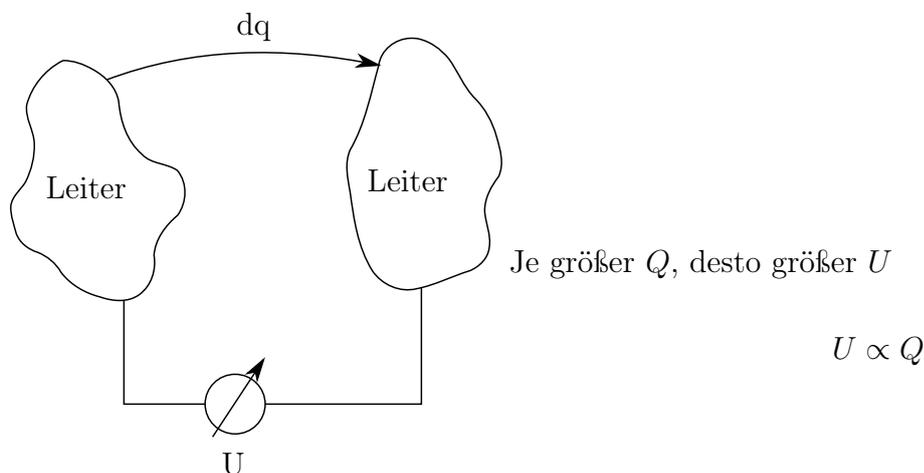


Abbildung 2.13: Allgemeines Schaubild eines Kondensators

2.3.1 Definition

Zwei gegeneinander isolierte Leiterstücke, die entgegengesetzt geladen werden können, nennt man **Kondensator**. Der Proportionalitätsfaktor zwischen U und Q ist die **Kapazität**

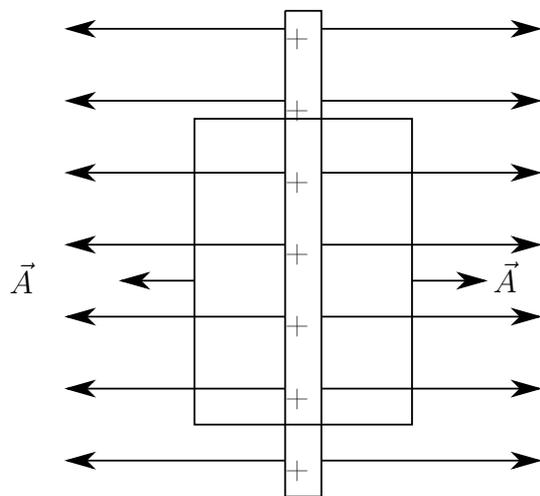
$$C = \frac{Q}{U}$$

Dies ist die Speicherfähigkeit bei gegebener Spannung.

Einheit: 1 F (Farad).

Experiment: Plattenkondensator

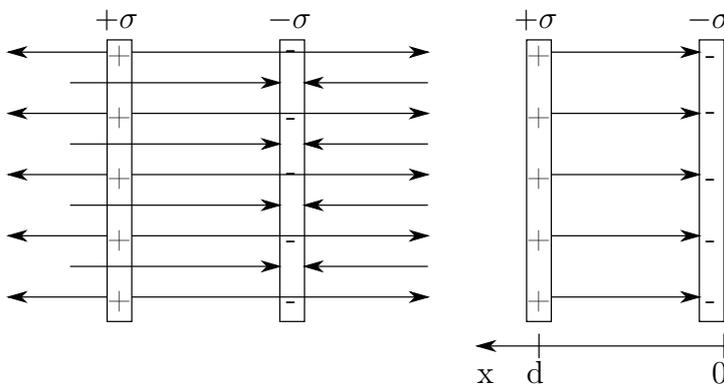
Berechnung mit Gaußschem Satz. Feld einer ebenen, unendlich ausgedehnten geladenen Fläche mit Flächenladungsdichte σ .

Symmetrie: $\vec{E} \perp$ Fläche

Der Gaußsche Satz sagt

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\text{eingeschlossene Ladung}}{\epsilon_0} = 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

In diesem Fall sind es jedoch zwei entgegengesetzt geladene Platten:

außen feldfrei. innen: $E =$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

Spannung/Potentialdifferenz:

$$U = \int_0^d E dx = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} d = \frac{d}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \cdot Q$$

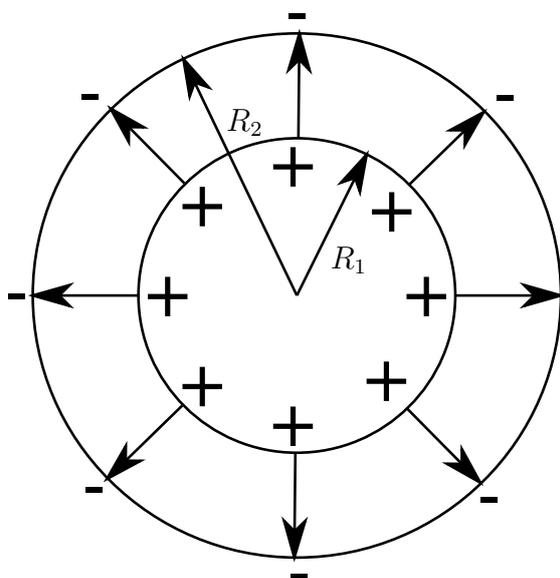
Also kurz

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$$

Achtung: Annahme war unendlich große Platten. Das heißt: homogenes Feld (Randbereiche wurden ignoriert!)

Experiment: Kugelkondensator

Berechnung der Kapazität mit der Definition des Potentials



$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Achtung: Für R_2 gegen unendlich entspricht dies der Kapazität einer Kugel. Gegenladung im Unendlichen ist erforderlich.

Parallelschaltung zweier Kondensatoren

An C_1 und C_2 liegt die gleiche Spannung U an

$$C = \frac{C_1 U + C_2 U}{U} = C_1 + C_2$$

Serienschaltung zweier Kondensatoren

$$U = U_1 + U_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Also addieren sich die reziproken Kapazitäten.

2.4 Die Energie des elektrischen Feldes

2.4.1 Definition

Um einen Leiter aufzuladen, muss Arbeit gegen die abstoßenden Kräfte der Ladung q verrichtet werden, die sich schon auf dem Leiter befindet.

$$dW = Udq = \frac{Q}{C}dq \implies W = \frac{1}{2}CU^2$$

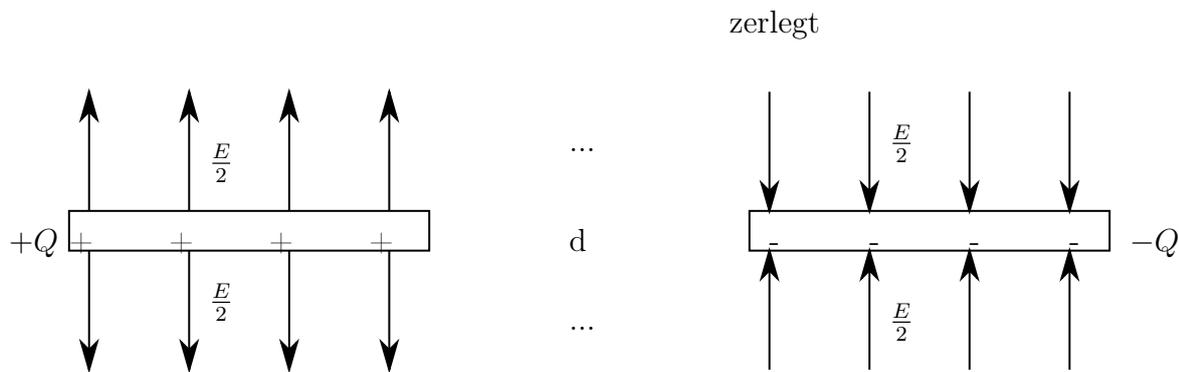


Abbildung 2.14: Aufgespalteter Plattenkondensator

Betrachtung mit einem Plattenkondensator Bei Übereinanderlegen erfährt die Platte der Ladung Q im Feld $\frac{E}{2}$ der anderen Platte die Kraft $F = Q\frac{E}{2}$, also

$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$

im Plattenkondensator gespeicherte Energie (also die Arbeit um die Platten von Abstand 0 auf d auseinander zu ziehen) ist dann

$$W = \int_0^d F dx = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Diese Energie ist im elektrischen Feld, also im Volumen zwischen den Platten gespeichert. Mit $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$ und $U = Ed$ erhält man

$$W = \frac{1}{2}DEV$$

Energiedichte des elektrischen Feldes Die Formel

$$w_{el} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}$$

gilt allgemein mit $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$ in vielen Fällen.

Bemerkung: In anisotropen Medien (Festkörper) muss D nicht parallel zu E sein. ϵ_r ist dann ein Tensor (siehe unten)

2.5 Isolatoren im elektrischen Feld

Dielektrika (bisher pauschale Berücksichtigung durch die Dielektrizitätskonstante) ist der Faktor, um den das E-Feld geschwächt ist gegenüber dem Wert im Vakuum oder das Verhältnis der Kapazität eines Plattenkondensators mit und ohne Dielektrikum. Ursache der dielektrischen Wirkung ist die Polarisation des Mediums im elektrischen Feld. Es werden atomare Dipolmomente induziert oder vorhandene Dipole ausgerichtet.

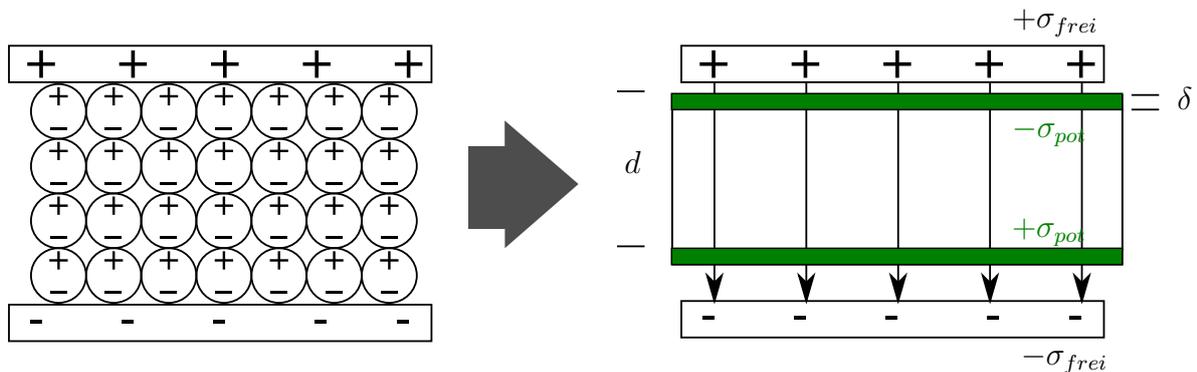


Abbildung 2.15: Polarisation durch ein Dielektrikum

Durch die kleine Verschiebung der Ladungsschwerpunkte entsteht eine Flächenladung σ_{pol} auf der Oberfläche A des Isolatoren, sein Inneres bleibt neutral

$$\sigma_{pol} = \frac{Q_{pol}}{A} = n \cdot q \cdot \delta \cdot \frac{A}{A} = nq\delta = np$$

Wobei n die Dichte der polarisierbaren Atome ist und p das atomare Dipolmoment.

Gesamter Isolator ist ein Dipol mit dem zugehörigen Dipolmoment : $Q_{pol} \cdot d = \sigma_{pol}Ad =$

$$np \underbrace{Ad}_{\text{Volumen}}$$

Polarisation = Dipolmoment pro Volumen

$$\vec{P} = n\vec{p} \quad P = \sigma_{pol}$$

In vielen Fällen ist \vec{P} proportional zu \vec{E} im Dielektrikum

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

Wobei χ die dielektrische Suszeptibilität

Bemerkung: In Festkörpern ist χ oft ein Tensor, \vec{P} ist nicht immer parallel zu \vec{E}

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Im einfachsten Fall, z.B. für nicht polare Moleküle/Atome ist $\chi = n\alpha$, α ist die atomare Polarisierbarkeit.

\vec{E} hängt von der Polarisation der Nachbaratome ab. In dichten Medien ist die Linearität nicht mehr gut erfüllt.

Feld im Inneren des Isolators?

$$\text{leerer Kondensator } E_0 = \frac{\sigma_{frei}}{\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon_0}$$

$$\text{mit Dielektrikum } E = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{frei} - P}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_{frei} = D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 E (1 + \chi)$$

oder $E = E_0 - \chi E$

$$\frac{E_0}{E} = 1 + \chi = \varepsilon_r$$

$$D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$$

χ und ε_r können Tensoren sein.

Bei festem Plattenabstand gilt $E = \frac{U}{d}$, $E_0 = \frac{U_0}{d}$, also $\frac{U_0}{U} = \varepsilon_r$ bei gegebener Ladung Q auf

den Platten. Damit wird das Verhältnis der Kapazitäten

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\frac{Q}{U}}{\frac{Q}{U_0}} = \frac{U_0}{U} = \frac{E_0}{E} = \varepsilon_r$$

Zahlenbeispiele	Dielektrizitätskonstante (ε_r)
Luft (1bar)	1.0006
H_2O gas(110°,1bar)	1.012
H_2O flüssig	81
Polymere	2 - 4
Glas	4 - 8
Al_2O_3 Kristall	12
spezielle Keramiken	bis $10^4 \rightarrow$ große Kapazitäten bei kleinen Volumen.

Durch die **Verschiebungspolarisation** im elektrischen Feld werden Ladungen (Elektronen gegen Kerne) gegeneinander verschoben, rücktreibende Kräfte proportional zur Auslenkung.

Was passiert in einem elektrischen Wechselfeld, z.B.: den Elektronen im Atom?

Antwort: Siehe harmonischer Oszillator mit periodischen Antrieb.

Bewegungsgleichung 1-dimensional

$$m_e \ddot{x} + m_e \omega_0^2 x = q E_0 \cos(\omega t)$$

Lösung $x = x_0 \cos(\omega t)$ mit $x_0 = \frac{q E_0}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Die Auslenkung x entspricht einem oszillierendem Dipolmoment $p = qx$

$$p = \frac{q^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} E = \varepsilon_0 \alpha(\omega) E$$

$\alpha(\omega)$ gibt hier die Polarisierbarkeit des Atoms an in Abhängigkeit von ω

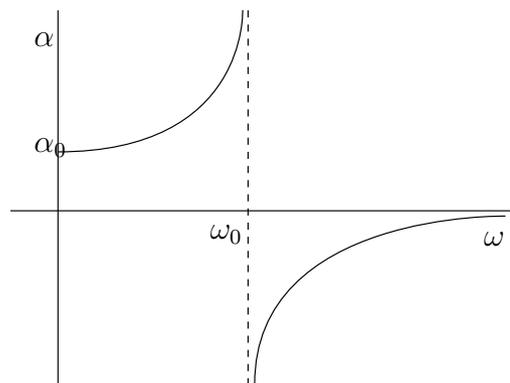


Abbildung 2.16: Polarisierbarkeit in Abhängigkeit von ω : $\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\varepsilon_0} m_e \omega_0^2$

Bei $\omega = \omega_0$ wird α groß und wechselt das Vorzeichen! Für $\omega \gg \omega_0$ geht α gegen Null
 ω_0 liegt bei optischen (sichtbar,UV) Frequenzen für Verschiebungen der Elektronen und Infraroten für Verschiebungen von Ionen in Festkörpern \rightarrow Optik, Atom- und Festkörperphysik.

Verschiebungspolarisation ist unabhängig von der Temperatur.

Dielektrische Suszeptibilität $\chi = n\alpha$

Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r = 1 + \chi$

Elektromagnetische Wellen haben eine Brechzahl $\propto \sqrt{\varepsilon_r}$

Orientierungspolarisation

Elektrischer Dipol im homogenen elektrischen Feld

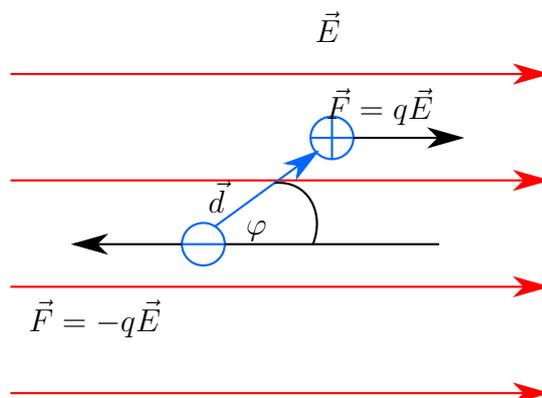


Abbildung 2.17: Elektrischer Dipol im homogenen elektrischen Feld

Der Dipol erfährt keine resultierende Kraft, aber ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = q(\vec{d} \times \vec{E}) = \vec{p} \times \vec{E}$$

Wobei $\vec{p} = q\vec{d}$ das Dipolmoment ist.

Betrag : $|\vec{M}| = M = pE \sin \varphi$

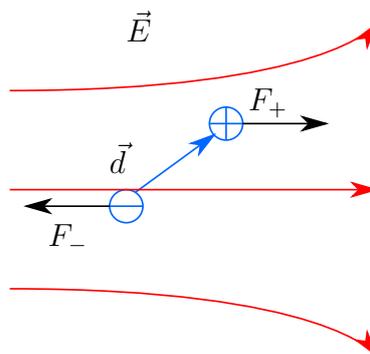
Mit der Drehung ist Arbeitsleistung verbunden, Dipol verliert potentielle Energie, wenn φ kleiner wird

$$dW = -M d\varphi$$

$$W_{pot}(\varphi) = - \int M d\varphi = pE \cos \varphi + C = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Wir wählen $W_{pot}(90^\circ) = 0 \implies C = 0$

Elektrischer Dipol im inhomogenen Feld



Resultierende Kraft $\neq 0$, hängt vom Ort und der Orientierung ab. Dipol wird in Richtung wachsendes Feld gezogen.

Nichtpolare Moleküle (Atome) besitzen im elektrischen Feld ein **induziertes** Dipolmoment $p = \epsilon_0 \alpha E$, werden also ebenfalls in Richtung wachsendes Feld gezogen mit $F \propto E^2$.

Anwendung: elektrostatischer Staubfilter

Zurück zur Orientierungspolarisation:

Gas oder Flüssigkeit mit polaren Molekülen

ohne elektrisches Feld Ihre Orientierung ist aufgrund von Größen statistisch verteilt, mittlere Polarisation pro Volumeneinheit ist Null.

mit elektrischem Feld Drehmoment bewirkt, dass sich die Moleküle teilweise in Feldrichtung ausrichten \rightarrow Orientierungspolarisation.

Grad der Orientierung/Polarisation hängt von der Temperatur ab

Im thermischen Gleichgewicht ist entscheidend das Verhältnis der potentiellen Energie der Dipole im elektrischen Feld mit der Harmonischen Energie $k_B T$, die bei Größen übertragen wird ($k_B \hat{=} \text{ Boltzmannkonstante } \approx 1.38E - 23 \frac{J}{K}$)

Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül den energetisch höheren Zustand einnimmt, wird durch den Boltzmannfaktor bestimmt (siehe Barometrische Höhenformel)

$$e^{-\frac{W_{pot}}{k_B T}}$$

Näherung für hohe Temperaturen

$$e^{-\frac{W_{pot}}{k_B T}} \approx 1 - \frac{W_{pot}}{k_B T} = 1 + \frac{pE \cos \varphi}{k_B T}$$

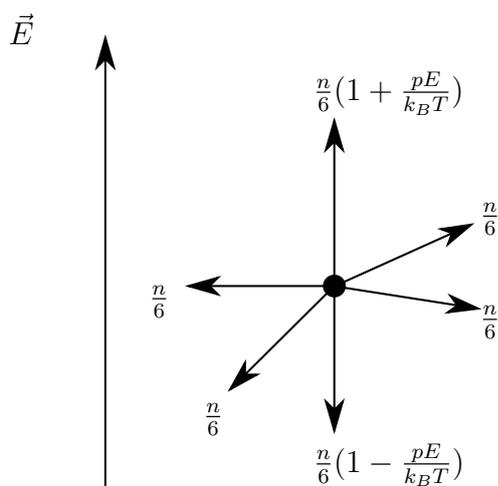


Abbildung 2.18: Vereinfachtes Bild: Nur $\pm x, \pm y, \pm z$ Orientierungen kommen vor: $\vec{E} = (0, 0, E_z)$

Zusammenzählen: $P = \frac{n}{6}(1 + \frac{pE}{k_B T})p - \frac{n}{6}(1 - \frac{pE}{k_B T})p$

$$P = \frac{np^2 E}{3k_B T}$$

Parelektrische Suszeptibilität

$$\chi_0 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = \frac{np^2}{\varepsilon_0 3k_B T} \propto \frac{1}{T}$$

Hierbei gilt für χ_0 , dass es statisch ist. Die angenommene Frequenz ist 0.

$\frac{1}{T}$ -Verhalten heißt Curie-Verhalten

Relaxation

Die Orientierungspolarisation stellt sich nach Einschalten eines elektrischen Feldes nur mit zeitlicher Verzögerung ein.

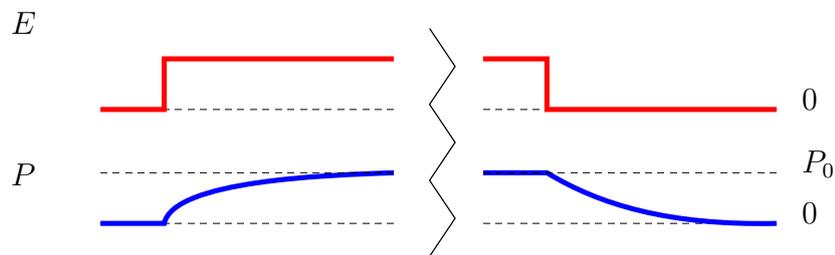


Abbildung 2.19: exponentieller Zeitverlauf

Idee:

$$\frac{dP(t)}{dt} \propto P_0 - P(t)$$

Änderungsrate \propto Abstand vom Gleichgewichtswert

bekannte und bewährte Mathe

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{P_0 - P(t)}{\tau}$$

$$P(t) = P_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$P_0 = \chi_0 \varepsilon_0 E$, χ_0 statische Suszeptibilität s.o.

Was passiert beim Anlegen von Wechselfeldern? $E = E_0 \text{const.}$

bei niedrigen Frequenzen:

$\omega \ll \frac{1}{\tau}$: Polarisation kann folgen, $\chi \approx$ statischer Grenzfall

$$\chi = \frac{P}{\varepsilon_0 E} \approx \frac{P_0}{\varepsilon_0 E_0} = \chi_0$$

bei hohen Frequenzen:

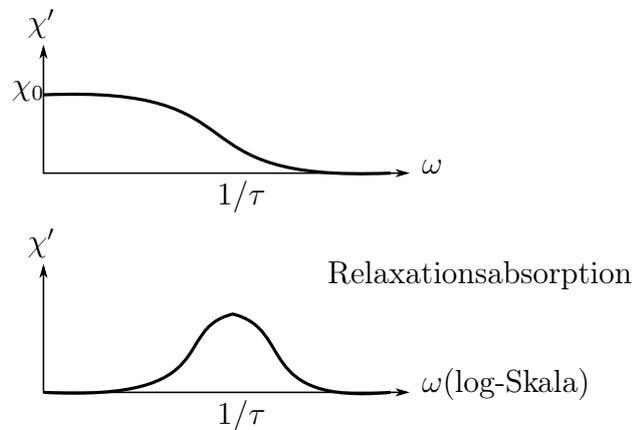
$\omega \gg \frac{1}{\tau}$: Dipole haben nicht genügend Zeit, sich auszurichten, Polarisation kann sich nicht aufbauen: $P = 0, \chi = 0$

Übergang bei mittleren Frequenzen $\omega \propto \frac{1}{\tau}$

Dort gibt es ein Maximum in der dielektrischen Absorption, die mit dem Imaginärteil von χ verknüpft ist.

Dynamische Suszeptibilität $\chi(\omega) = \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)}$

$$\chi(\omega) = \underbrace{\chi'(\omega)}_{\text{Realteil von } \chi \text{ in Phase}} + i \underbrace{\chi''(\omega)}_{\text{Imaginärteil außer Phase}}$$



wichtiger, nicht-resonanter Mechanismus, für die Wechselwirkung von Materie mit elektrischen, mechanischen, magnetischen Feldern.

- Aufklärung atomarer Bewegungsprozesse in den Materialwissenschaften
- Anwendung: Mikrowellenofen (2.45 GHz)

maximale Absorption bei $\omega\tau = 1$

τ ist:

makroskopisch Relaxationszeit von P

P hat ein e-tel der Änderung erreicht

mikroskopisch charakteristische Zeit für Umorientierung der Moleküle

τ ist i.A. temperaturabhängig z.B.

$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{E_A}{k_B T}}$$

Arrheniusgesetz

E_A Aktivierungsenergie, τ_0^{-1} heißt Versuchsfrequenz

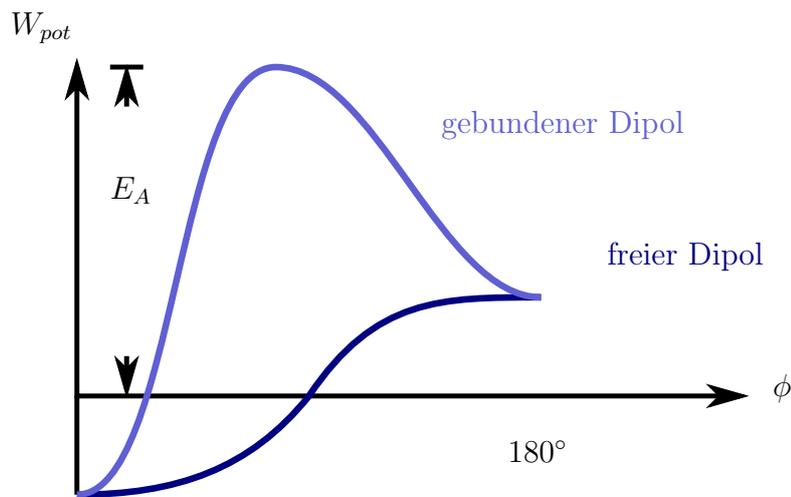


Abbildung 2.20: freier und gebundener Dipol

Die Dielektrizitätskonstante eines dichten Mediums

In diesem Kapitel soll der Zusammenhang zwischen ϵ_r und α hergeleitet werden.

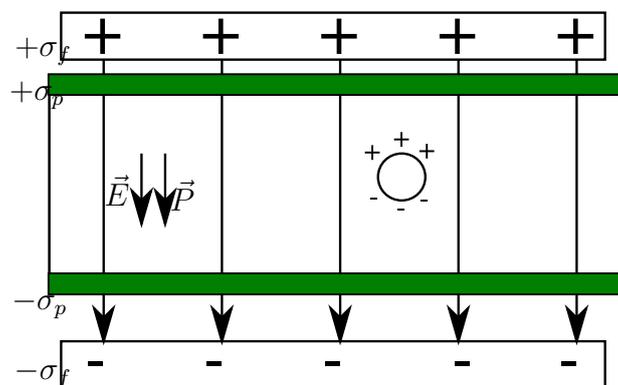


Abbildung 2.21: Dielektrikum im Plattenkondensator

	ε_{ges}	ρ_{ges}	ρ_{fl}	$\frac{\rho_{fl}}{\rho_{ges}}$	ε_r
O_2	1.000523	0.00143	1.19	832	1.509
CCl_4	1.0030	0.00489	1.59	325	2.45

Bisher galt

$$E = \frac{\sigma_{frei} - \sigma_{pol}}{\varepsilon_0}$$

Dies gilt aber nur bei geringer Dichte des Mediums! In dichtem Medium wirkt eine größere Feldstärke auf jedes Atom, weil jedes innere Atom selbst Polarisationsladungen enthält. Annahme: Ein Atom sitze in einem kugelförmigen Hohlraum mit

$$E_{Loch} = E + \frac{1}{3} \frac{P}{\varepsilon_0}$$

Das P ist überhaupt nur vorhanden, aufgrund der Polarisationsladungen am oberen und unteren Rand des Lochs. Die $\frac{1}{3}$ ist ein numerischer Faktor (Depolarisierungsfaktor siehe unten; $1/3$ bei Kugel, 1 bei Platte senkrecht zu E , 0 bei Platte parallel zu E)

Damit kann man die Polarisation umschreiben zu

$$\vec{P} = n\alpha\varepsilon_0\vec{E}_{Loch} = n\alpha\varepsilon_0\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}}\varepsilon_0\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

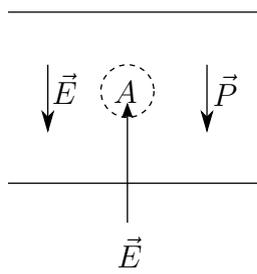
Also ist die Suszeptibilität für dichte Medien (Clausius-Mosotti-Beziehung)

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}}$$

Damit lässt sich die DK einer Flüssigkeit berechnen, wenn man die DK des Gases kennt ($\varepsilon_{ges} = 1 + n_{ges}\alpha$)

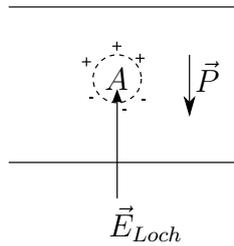
Zurück zum Depolarisierungsfaktor einer Kugel (das $1/3$)

Wegen des Superpositionsprinzips gilt



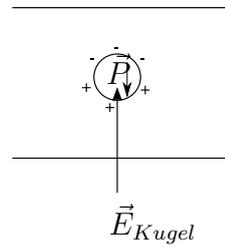
$$\vec{E}$$

im kompakten Dielektrikum



$$= \vec{E}_{Loch}$$

Feld im Hohlraum

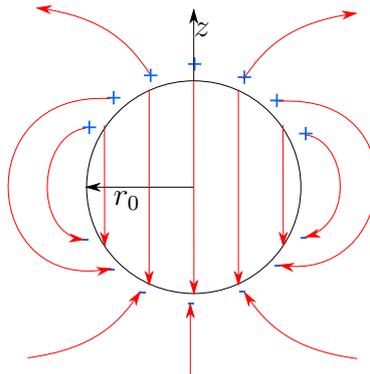


$$\vec{E}_{Kugel}$$

$$+ \vec{E}_{Kugel}$$

Feld im Inneren einer homogen polarisierten dielektrischen Kugel

Und das elektrische Feld einer homogen polarisierten Kugel ist



- im Inneren muss \vec{P} und \vec{E}_{Kugel} homogen sein
- im Außenraum: Feld eines elektrischen Dipols, weil die positive und negative Ladungen kugelsymmetrisch verteilt sind und daher als Gesamtladung im Kugelmittelpunkt betrachtet werden können mit kleiner Verschiebung $\vec{\delta}$

$$\vec{p}_0 = Q \cdot \vec{\delta} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \underbrace{nq \cdot \delta}_{= \text{Polarisation}} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \vec{P}$$

Potential eines Dipolmomentes \vec{p}_0 im Abstand \vec{r}_0 , das heißt auf einer Kugeloberfläche

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r_0^3} z \quad \phi = \frac{P}{3\epsilon_0} z$$

in der Kugel:

$$\phi = -E_{Kugel}z$$

weil E_{Kugel} homogen ist. An der Oberfläche müssen beide Potentiale übereinstimmen. Also

$$E_{Kugel} = \frac{-\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

und es ergibt sich die verwendete Formel.

2.5.1 Permanente elektrische Polarisation in Festkörpern

Durch geordneten Aufbau von Molekülen mit permanentem Dipolmoment können ganze Kristalle ein permanentes Dipolmoment (Polarisation) besitzen, auch ohne angelegtes Feld. DF-Ladungen sind normalerweise neutralisiert durch Adsorbat, Änderungen können aber nachgewiesen werden: bei Temperaturänderungen: Pyroelektrizität; bei Druckänderung: Piezoelektrizität (z.B. Quarz, Dickenschwinger als Frequenznormal oder polarisierte PVDF-Folie)

Ferroelektrische Kristalle besitzt permanente Polarisation nur unterhalb einer kritischen Temperatur T_C . z.B. Bariumtitanat $T_C = 118^\circ C$

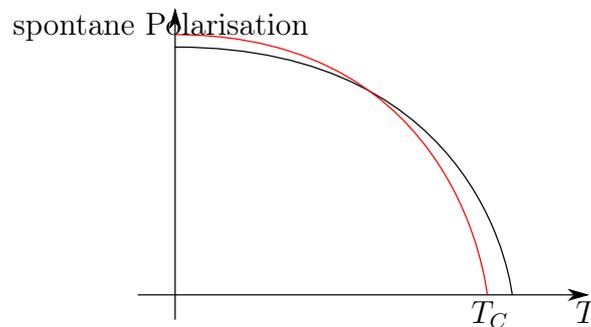


Abbildung 2.22: Polarisation in Abhängigkeit von der Temperatur

Polarisation zeigt Hysterese

Erklärung zur Clausius-Mozotto-Beziehung mit $\chi = \frac{3n\alpha}{3-n\alpha}$ oberhalb von T_C mit $n\alpha \leq 3 \implies \chi$ endlich, beim Abkühlen wächst $n\alpha$ wegen thermischer Kontraktion, bei T_C wird $n\alpha = 3 \implies \chi$ divergiert (Polarisationskatastrophe).

Kleinste elektrische Felder erzeugen große Polarisationen \rightarrow spontane Polarisation des Gitters.

Knapp oberhalb T_C etwas detaillierter:

Wir entwickeln $n\alpha \leq 3$:

$$n\alpha = 3 - \beta(T - T_C)$$

Wobei β in einer Größenordnung von $10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$. Somit

$$\chi = \frac{3(3 - \beta(T - T_C))}{\beta(T - T_C)} \approx \frac{9}{\beta(T - T_C)} \propto \frac{1}{T - T_C}$$

Da $\beta(T - T_C) \ll 1$

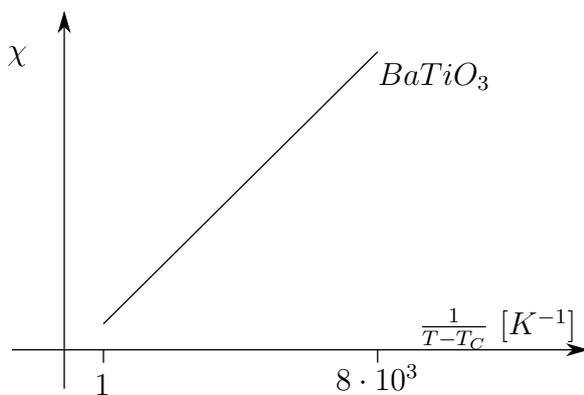


Abbildung 2.23: Proportionalität von χ und $T - T_C$

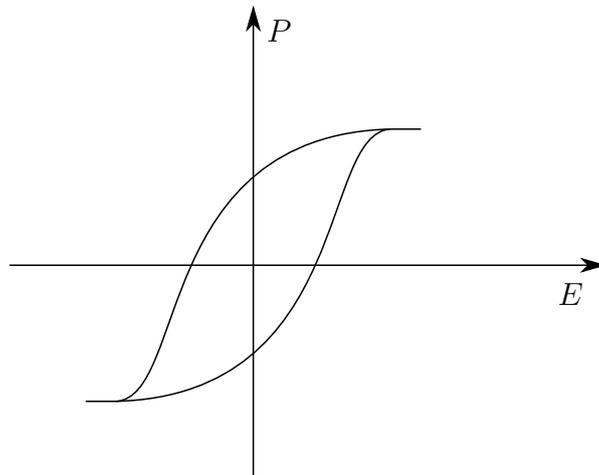


Abbildung 2.24: Polarisation in Abhängigkeit vom elektrischen Feld

Gemessen wird $D = \epsilon_0 E + P$. Exp: ein TGS (Triglyzinsulfat)-Kristall, $T_C = 49^\circ\text{C}$

Zusammenfassung des zweiten Kapitels Elektrostatik :

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$$

Elektrisches Feld ist wirbelfrei und das elektrische Feld hat ein Potential

$$\oint_F \vec{D} d\vec{A} = Q$$

Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes.

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

in vielen Fällen

Kapitel 3

Das zeitlich konstante magnetische Feld

3.1 Grundlegendes

Erfahrung: Es gibt Kräfte, die sich grundlegend von Coloumb- oder Gravitationskräften unterscheiden. Sie treten auf zwischen

- Stromdurchflossenen Leitern und bewegten Ladungen
- Werkstoffen (Magnete), in denen geordnete atomare Ströme existieren

Stärke und Richtung der Kraft werden durch ein Vektorfeld beschrieben. Das magnetische Feld wird durch Feldlinien veranschaulicht.

z.B.: Stabmagnet

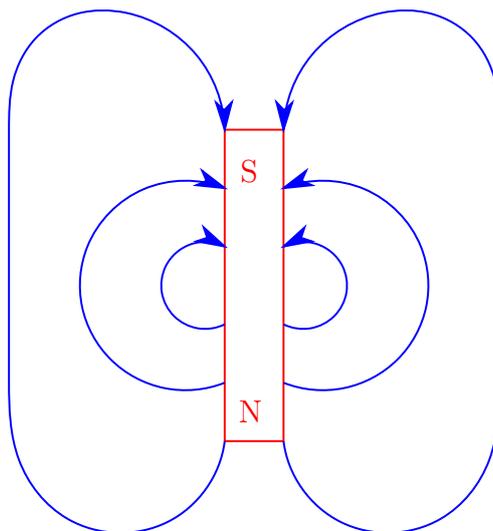


Abbildung 3.1: Verteilung der magnetischen Feldlinien bei einem Stabmagnet

Besitzt Nord- und Südpol, außerhalb laufen die Feldlinien von N nach S (vgl. elektrisches Feld eines elektrischen Dipols)

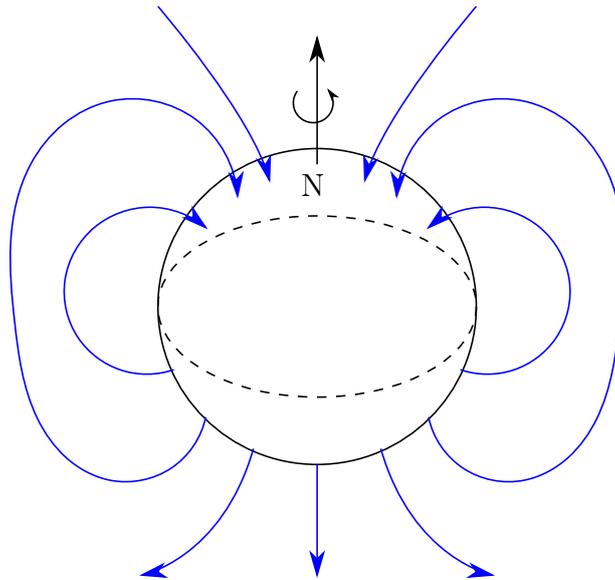


Abbildung 3.2: Magnetfeld der Erde

Vereinbarung: Geografischer Nordpol ist ca der magnetische Südpol.

Magnetfeld ist eindeutig bestimmbar, z.B. durch Kraft auf bewegte Ladungen

$$\vec{F}_{Lorenz} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Das Hauptfeld, \vec{B} -Feld, oft auch als magnetische Flussdichte hat die Einheit $1T \hat{=} 1 \text{ Tesla} \hat{=} 1 \frac{N}{Am}$
oder $1 \text{ Gauss} = 10^{-4}T$

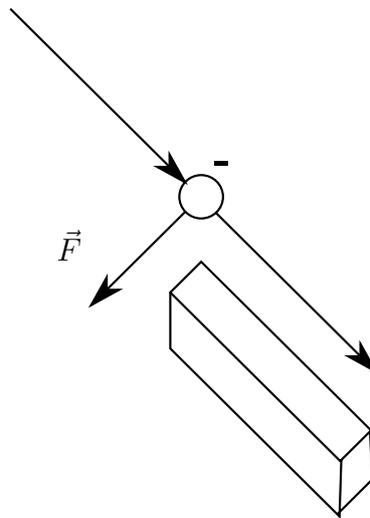


Abbildung 3.3: Experiment von Oersted , 1820

Magnetfeld eines stromdurchflossenen geraden Leiters

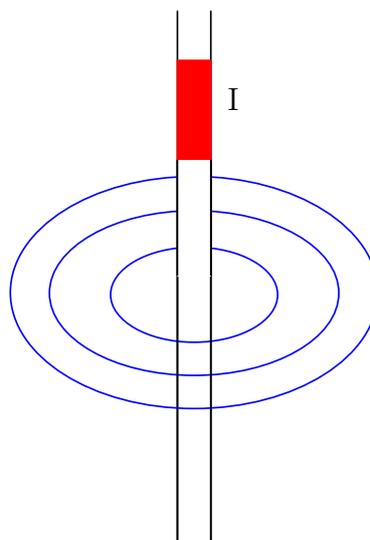


Abbildung 3.4: Magnetfeld in einem geraden Leiter

Konzentrisch, Orientierung nach rechter Hand-Regel.

Skalar:

$$B \propto \frac{I}{r} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Vektoriell:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r^2} (\vec{I} \times \vec{r})$$

Mit μ_0 als die magnetische Feldkonstante und

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Dies ergibt sich aus der Kraftwirkung elektrischer Ströme, siehe Definition des Ampere

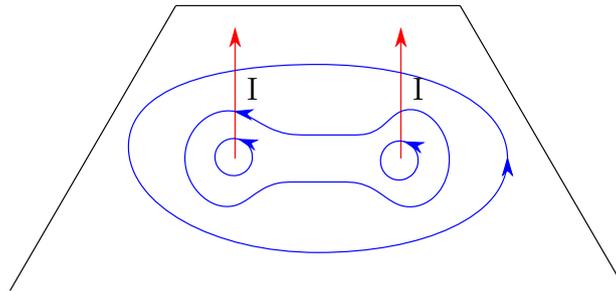


Abbildung 3.5: Superpositionsprinzip bei gleicher Stromrichtung

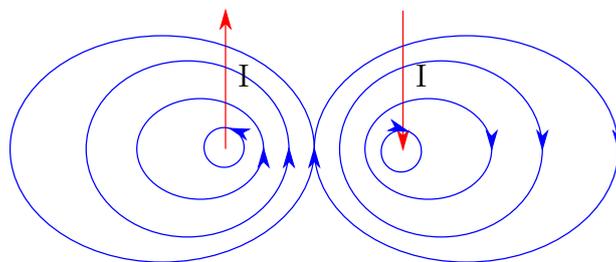


Abbildung 3.6: Superpositionsprinzip bei unterschiedlichen Stromrichtungen

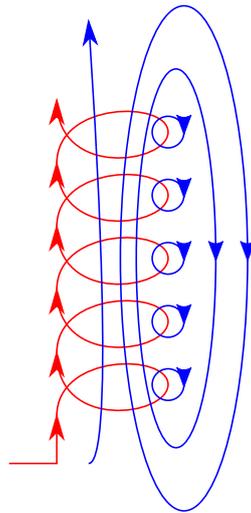


Abbildung 3.7: Spule

3.2 Das Amperesche Durchflutungsgesetz

Fluss und Zirkulation eines Magnetfeldes

- Magnetischer Fluss

$$\phi = \int_F \vec{B} d\vec{A}$$

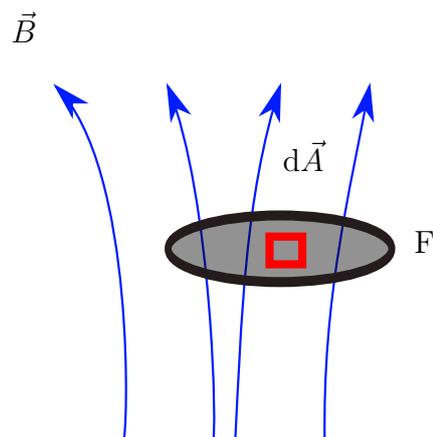


Abbildung 3.8: Magnetischer Fluss

Wichtige Größe bei Effekten, die mit zeitabhängigen Feldern zusammenhängen (z.B.

Induktion, siehe weiter unten)

Einheit $[\phi] = 1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2 = 1 \text{ Vs}$

Definition

Es gilt: Magnetische Feldlinien sind immer geschlossen! Fluss auf einer geschlossenen Fläche ist Null, Magnetfelder sind quellenfrei, es gibt keine magnetischen Monopole

$$\oint_F \vec{B} d\vec{A} = 0$$

- Zirkulation $\oint_C \vec{B} d\vec{r}$ über einem geschlossenem Weg C

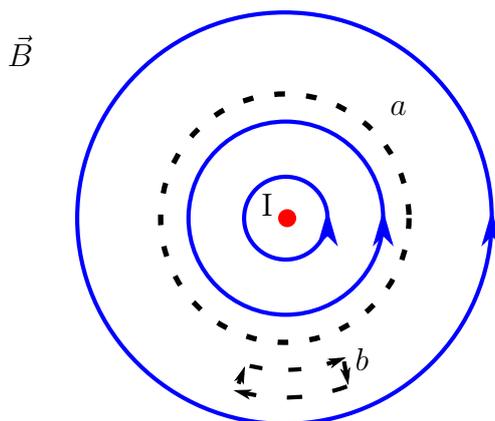
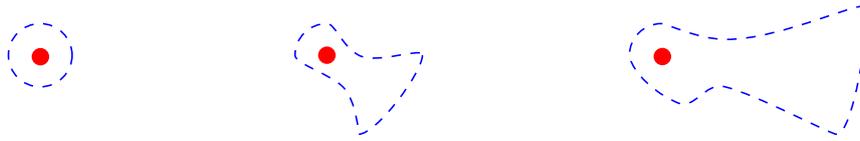


Abbildung 3.9: Zirkulation über einem geschlossenen Weg

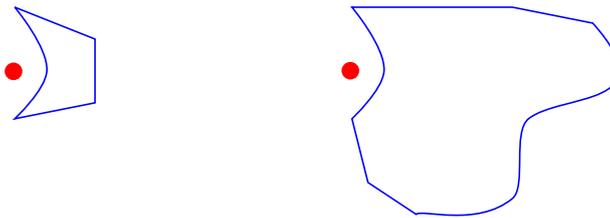
Integrationspfad a , konzentrischer Kreis

$$\oint_a \vec{B} d\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

unabhängig vom Radius wegen $B \propto \frac{1}{r}$ daher auch unabhängig vom exakten Weg.



Integrationspfad b : auf den radial gerichteten Stücken ist $\vec{B}d\vec{r} = 0$
 $\int_{s_1} \vec{B}d\vec{r} = - \int_{s_2} \vec{B}d\vec{r} \rightarrow \oint_b \vec{B}d\vec{r}$ unabhängig vom exaktem Weg.



Es gilt allgemein

Definition

Amperesches Durchflutungsgesetz

$$\oint_c \vec{B}d\vec{r} = \mu_0 I$$

mit I als der von c umschlossene Strom

die eingeschlossenen Ströme können auch verteilt sein : $J = \int_F \vec{j}d\vec{A}$, \vec{j} = Stromdichte in $\frac{A}{m^2}$ und F als die von C umschlossene Fläche.

$$\int_c \vec{B}d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j}d\vec{A}$$

Mit dem Ampereschen Gesetz wird oft als Magnetfeld das \vec{H} -Feld eingeführt mit

$$\oint_c \vec{H}d\vec{r} = I$$

Das H -Feld ist unmittelbar mit dem erzeugenden, makroskopischen Strom verknüpft

und heißt daher auch *magnetische Erregung* mit der Einheit $[H] = \frac{A}{m}$ Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} && \text{im Vakuum} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} && \text{in vielen Materialien} \end{aligned}$$

Beispiel : Magnetfeld eines Stromdurchflossenen Leiters

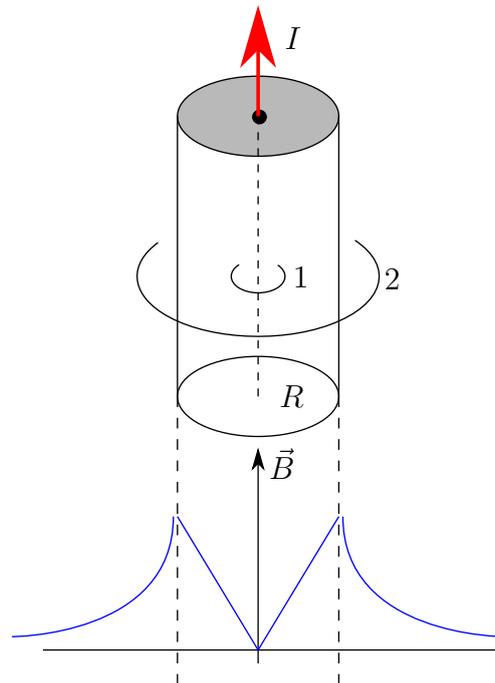


Abbildung 3.10: Stromdurchflossener Leiter

Weg 1 im Inneren : $\oint_{c_1} \vec{B} d\vec{r} = B(r)2\pi r = \mu_0 \frac{J_0}{R^2} r^2 \rightarrow B(r) \rightarrow$

$$\frac{\mu_0 J_0}{2\pi R^2} r$$

Weg 2 im Außenraum

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

Beispiel: Koaxialkabel, Koaxkabel, technisch wichtig

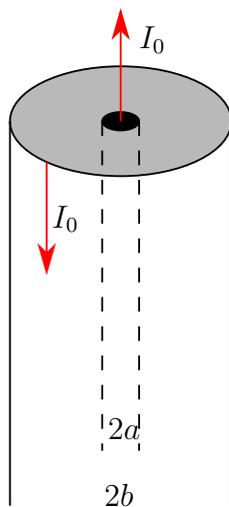


Abbildung 3.11: Koaxkabel

Innen- und Außenleiter tragen entgegengerichtete Ströme für $a \leq r \leq b$:

$$B(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi r}$$

Außenraum ist feldfrei

Beispiel:

lange Spule (Solenoid)

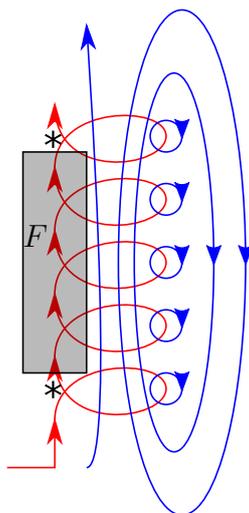


Abbildung 3.12: Lange Spule

Falls die Spule unendlich lang ist, so ist $B_{Aussen} = 0$, bei \star ist $\vec{B} \perp d\vec{r}$ oder $B = 0$. Somit $\oint_F \vec{B} d\vec{r} = B_0 L = \mu_0 N I$, wobei N die Zahl der Windungen ist. Für das Magnetfeld ergibt sich dann

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

Welche Feldstärken kann man erreichen?

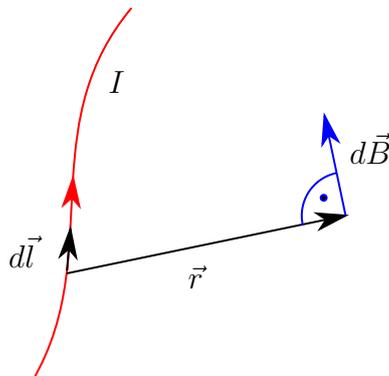
Konstante Felder:

- Cu– Spule $\approx 30 T$ in $\approx 10 cm^3$ Volumen ergibt $\approx 1.5 MW$ Wärmeleitung \rightarrow Wasserkühlung
- Supraleitende Spulen $\approx 25 T$, Kühlung mit flüssigem Helium
- gepulst: bis $\approx 100 T$, maximal $\approx 10^3 T$ Implosionstechnik

3.3 Das Biot-Savartsche Gesetz

Zur Berechnung des Magnetischen Feldes beliebig geformter, stromdurchflossener Leiter in Analogie zum elektrischen Feld

Punktladung	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{r}}{r^2}$
Ladungsverteilung	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i \vec{r}_i}{r_i^3}$



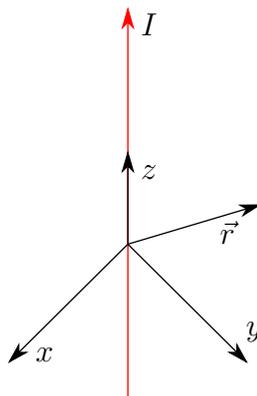
hier: Das Leiterstück $d\vec{l}$ mit dem Strom I erzeugt im Abstand \vec{r} das Magnetfeld

Definition*Biot-Savartsche Gesetz*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r})$$

folgt aus der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes und dem Ampereschen Gesetz

Beispiel: langer Draht



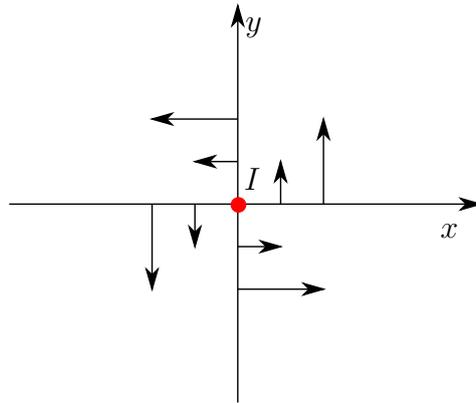
Parametrisierung: $d\vec{l} = (0, 0, 1)dt$, $\vec{r} = (x, y, z - t)$, damit ist $d\vec{l} \times \vec{r} = (-y, x, 0)dt$

Nun Anwendung von Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-y, x, 0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}}. \text{ Setze nun oBdA } z = 0$$

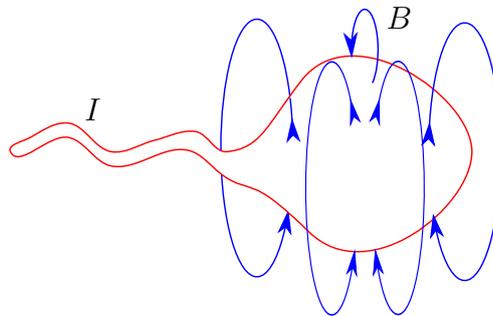
Benutze $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$ mit $X = a^2 + x^2$. Damit ergibt sich

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Beispiel: Magnetfeld eines Ringstroms erzeugt magnetischen Dipol



vgl elektrisches Feld eines elektrischen Dipols.

Magnetisches Moment einer Leiterschleife

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}$$

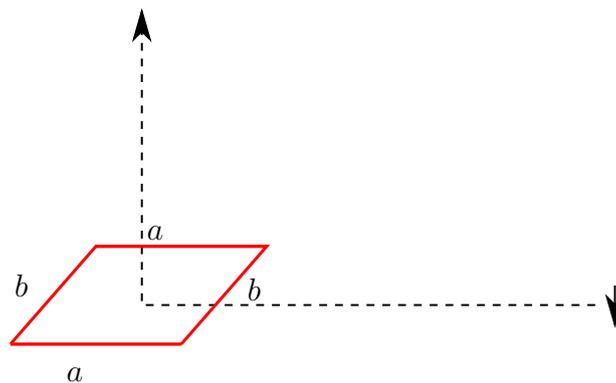


Abbildung 3.13: rechteckige Leiterschleife

Elementarteilchen mit endlichem Drehimpuls haben im Allgemeinen ein charakteristisches Magnetisches Moment. Die Erde hat ein magnetisches Moment von ca 10^{26} Am^2 $\hat{=}$ äquatorialer Kreisstrom von 10^{12} A

Beispiel: Kreisförmige Leiterschleife mit Feld auf der Achse.

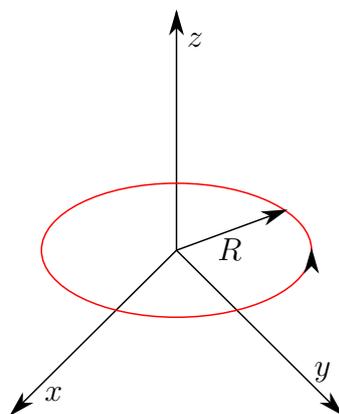
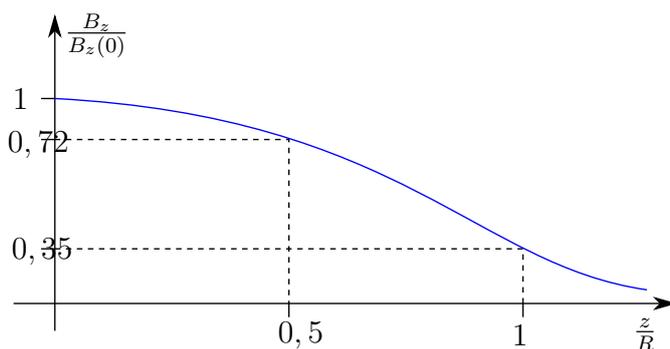


Abbildung 3.14: Kreisleiterschleife

Feld auf der Achse : s.oben $m = I \cdot \pi R^2$, $B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^3}$ Verhältnis des Feldes zum Startwert

Abbildung 3.15: $\frac{B_z}{B_z(0)}$

z.B.: Bewegung von geladenen Teilchen im magnetischen Feld

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{F} \perp \vec{v}$ und $\perp \vec{B}$

3.3.1 Bahnen freier, geladener Teilchen

Homogenes Feld mit $\vec{v} \perp \vec{B}$, dann ist \vec{F} immer $\perp \vec{v}$, $v = \text{konst}$ \rightarrow Kreisbahn mit Zentripetalbeschleunigung

$$\frac{F}{m} = \frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{r}$$

Definition

Zyklotronfrequenz Bei Kreisfrequenzen von $\omega = \frac{v}{r}$ gilt

$$\omega = \frac{q}{m}B$$

Die Zyklotronfrequenz ist unabhängig vom Radius.

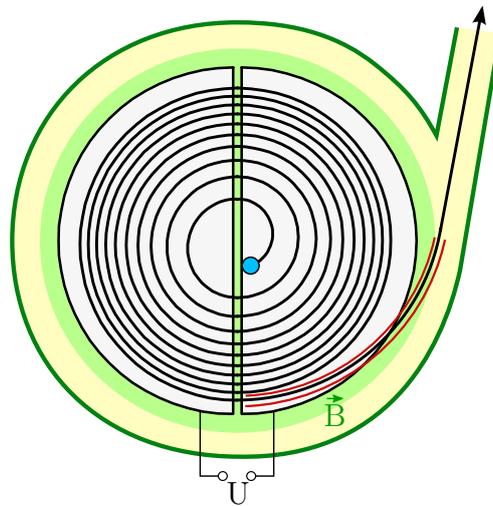


Abbildung 3.16: Zyklotron (Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Zyklotron>, 30.06.2011)

An der D-förmigen hohlen Elektroden wird eine Wechselspannung angelegt, mehrfache Beschleunigung ω bleibt gleich, r steigt an, entsprechend $r = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{eB}$.

Geht nur gut für $v \ll c$, sonst wird das Teilchen träge und kommt aus dem Takt. Lösungsmöglichkeit Synchrozyklotron \rightarrow Synchrotron, bei diesem ist r konstant und B variiert.

Massenspektrometer (hier im Prinzip)

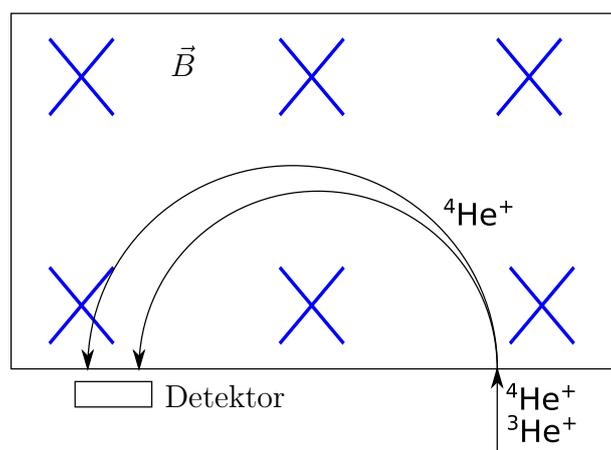


Abbildung 3.17: Massenspektrometer

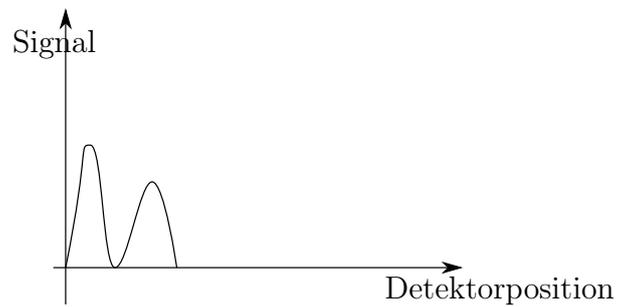


Abbildung 3.18: Signal im Massenspektrometer

empfindlich für kleine Massenpunkte $\frac{\delta m}{m} < 10^{-5}$

3.3.2 Kraft auf einen stromführenden Draht

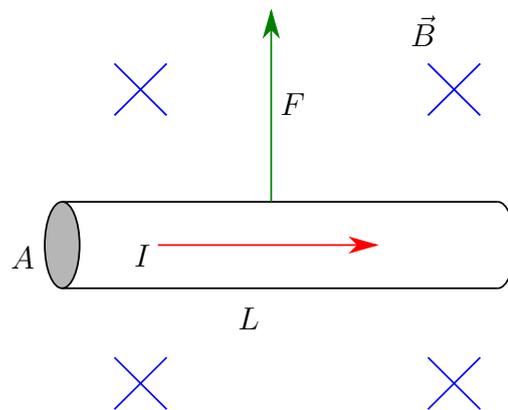


Abbildung 3.19: stromführender Draht

$$\vec{F} = nALq(\vec{v} \times \vec{B})$$

n ist die Ladungsträgerdichte, v_d die Driftgeschwindigkeit mit $I = nAqv_D$

$$\vec{F} = (\vec{I} \times \vec{B})L$$

Grundlage fast aller elektrischer Maschinen

Leiterschleifen erfahren Drehmoment \rightarrow Drehspulinstrument, Motoren

3.3.3 Der Hall-Effekt

1849 E.H. Hall Wie wirkt sich ein Magnetfeld auf die Verteilung der Ladungsträger im Inneren des Leiters aus?

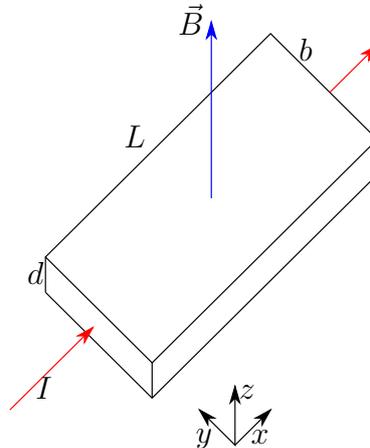


Abbildung 3.20: Hall-Effekt

Strom in x-Richtung $I_x = j_x A = nq v_x b d$ wobei n die Ladungsträgerdichte ist und v_x die Driftgeschwindigkeit in x-Richtung. Die Lorentzkraft ist dann $\vec{F} q(\vec{v} \times \vec{b}) = (0, F_y, 0)$ mit $F_y = -q v_x B_z = q \frac{j_x}{nq} B_z$ Ablenkung positiver Ladungsträger in $-y$ -Richtung. Es baut sich ein elektrisches Feld E_y auf. Im stationären Zustand ist $v_x \neq 0, F_{y, \text{gesamt}} = 0 = q E_y + F_{y, \text{Lorentz}} = q E_y - q \frac{j_x}{nq} B_z$ Daraus ergibt sich das Hallfeld

$$E_y = \frac{1}{nq} j_x B_z$$

Der Hall-Koeffizient ist dann

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

Die Hall-Spannung

$$U_H = E_y b$$

Zur Bestimmung der Ladungsträgerkonzentration bei bekannten j_x und B_z . In den meisten Metallen wird er Strom von negativen Leitungselektronen getragen. In Alkalimetallen (Na, K, Cs,...) stimmt n gut mit der Zahl der Atome pro Volumeneinheit überein. Daraus folgt, dass jedes Atom eines einer Elektronen zum Ladungstransport beisteuert. Aber auch z.B. in Cd, Be,... gibt es positive Ladungsträger. In Halbleitern: positive / negative Ladungsträger je nach Dotierung. Bei bekanntem $R_H = 1/nq$ und j_x kann die magnetische

Feldstärke bestimmt werden. Dabei sollte R_H möglichst groß sein bzw. n klein. Also ein Halbleiter mit kleinem n eignet sich gut als Hall-Sensor.

Quanten-Hall-Effekt v. Kliting NP 1985

2-dimensionales Elektronengas. Hallwiderstand (\neq Hallkoeffizient)

$$R_H = \frac{U_H}{I_X}$$

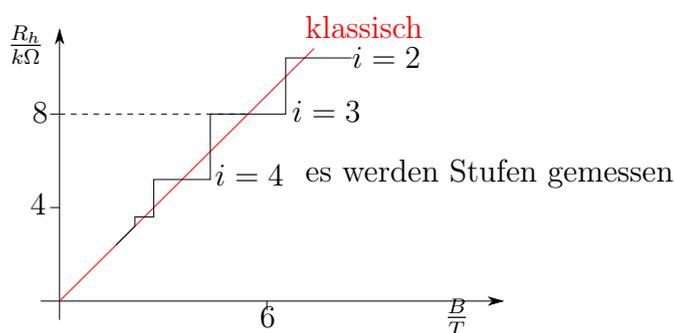


Abbildung 3.21: Vergleich klassischer Halleffekt mit Quantenhallemffekt

$$\frac{h}{e^2} = 25,813 \text{ k}\Omega$$

wobei h der Planksche Wirkungsquant ist und e die Elementarladung.

3.3.4 Der relativistische Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Felder

Coulombkraft zwischen zwei ruhenden Ladungen

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

magnetische Kraft zwischen zwei parallelen stromdurchflossenen Drähten der Länge L

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2 L}{r}$$

bisher waren dies zwei unabhängige Gesetze. Aber wir finden

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

das ist kein Zufall.

Beispiel: Stromdurchflossener Draht im Laborsystem

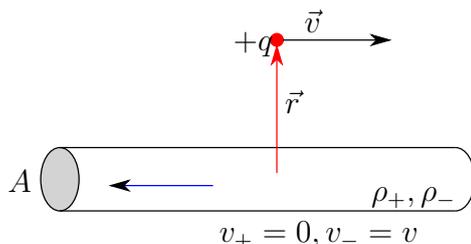


Abbildung 3.22: Fliegendes Elektron neben Leiter

Im Laborsystem s bewege sich das Teilchen mit Ladung q parallel zum Draht mit v nach rechts, Im Draht fließe ein Strom I so, dass sich die Elektronen mit der gleichen Geschwindigkeit $v_- = v$ bewegen. Also

$$I = \rho_- \cdot A \cdot v_-$$

erzeugt ein Magnetfeld

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Die Lorentzkraft ist dann

$$F = qBv = q\mu_0 \frac{I}{2\pi r} v$$

geht radial nach außen. Mit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ erhält man

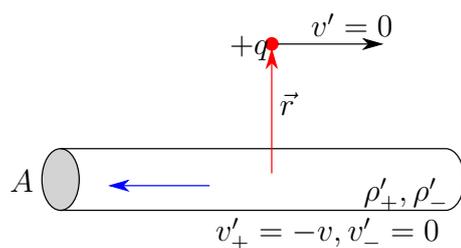
$$F = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q\rho_- A}{r} \frac{v^2}{c^2}$$

Jetzt im Bezugssystem s' , dass sich mit dem Teilchen der Ladung q nach rechts bewegt.

Ladung q ruht, also keine magnetischen Kräfte (Lorentzkraft) !

Mit Einsteins Relativitätsprinzip: Gesamtkraft auf das Teilchen ist (bei $\frac{v}{c} \ll 1$) unabhängig vom Bezugssystem.

Elektrische Kräfte In s ist der Draht neutral: $\rho_+ = \rho_-$. Das E -Feld um den Draht ist dadurch also Null in s' ist $\rho'_+ \neq \rho'_-$ wegen Längenkontraktion. Die Drahtlänge in s ist

Abbildung 3.23: Leiter im Bezugssystem s'

L , in s' ist

$$L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

In s' ist die Ladungsdichte der sich mit $v_+ = -v$ bewegenden positiven Ionen

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und die negative Ladungsdichte der jetzt ruhenden Elektronen erniedrigt

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Der Draht ist in s' nicht elektrisch neutral.

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_- = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Daraus ergibt sich für das elektrische Feld

$$E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho' A}{r}$$

Dies ist radial nach außen gerichtet. Die elektrostatische Kraft auf positive Ladung q ist dann

$$F' = q \cdot E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q\rho_+ A}{r} \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Vergleiche dies nun mit Lorentzkraft F in s ($\rho_- = \rho_+$)

$$F'_{\text{elektrisch}} = \frac{F_{\text{Lorentz}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dies ist gleich für $v \ll c$

Impulsänderung in S und S' sind gleich!. (Auch relativistisch)

$$\begin{aligned} dp' &= F' dt' \\ &= \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= F dt \\ &= dp \end{aligned}$$

Wechsel des Bezugssystem bedeutet eine Transformierung von magnetischer Lorentzkraft in elektrostatische Coulombkraft und umgekehrt.

Beide Kräfte sind Wirkungen desselben Phänomens, der *Elektromagnetischen Wechselwirkung*.

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

ergibt sich aus der Anwendung der speziellen Relativitätstheorie. Es gibt also eine Lorentzinvariante Form (siehe dazu Theo 3)

3.4 Materie im Magnetfeld

Wie bereits erwähnt gilt

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \quad \text{in vielen Fällen} \end{aligned}$$

\vec{H} ist die Magnetische Erregung und μ ist die relative Permeabilitätszahl, oft auch μ_r . Mikroskopische Ursache sind atomare magnetische Momente, die man als atomare Ströme vorstellen kann.

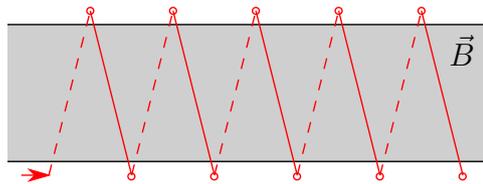


Abbildung 3.24: Magnetfeld durch die Spule erzeugt $B_0 = \mu_0 H$

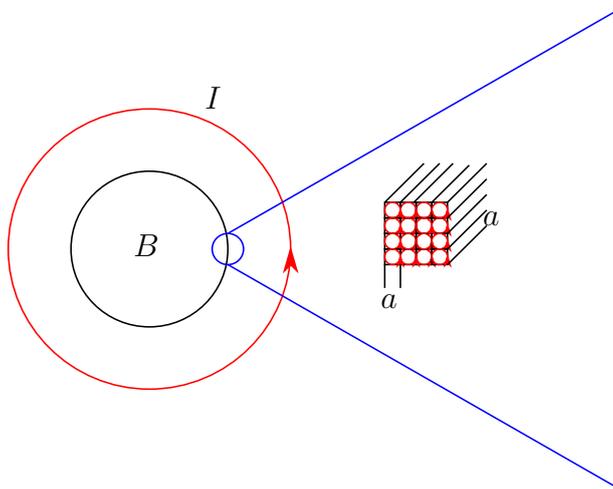


Abbildung 3.25: Ausschnitt

Atomare Ströme im Inneren heben sich auf, um die äußere Berandung läuft ein Oberflächenringstrom. Der Oberflächenstrom pro Längeneinheit ist dann

$$\frac{i}{a}$$

. Das gesamte Magnetfeld im Inneren ist dann

$$B = \mu_0 \left(\frac{N}{L} I + \frac{i}{a} \right)$$

Der Oberflächenstrom ist verknüpft mit dem atomaren magnetischen Moment ia^2 , damit wird

$$\frac{i}{a} = \frac{ia^2}{a^3} = \frac{m}{V} = M$$

Wobei M die Magnetisierung, also das magnetische Moment pro Volumen, angibt. Damit ergibt sich

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}$$

mit

$$\vec{M} = \chi\vec{H}$$

bei vielen Stoffen, außer nichtlinearen Werkstoffen z.B. ferromagnetischen.

χ ist die magnetische Suszeptibilität (evtl mit Index m , χ_m) Somit ergibt sich

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu\mu_0\vec{H}$$

Zahlenbeispiele sind hierzu	$H_2O(\text{gasförmig})$	$-0.2E - 8$
	$H_2O(\text{flüssig})$	$-0.9E - 6$
	Cu	$-1E - 5$
	Bi	$-1.5E - 4$

Falls $\chi < 0$ ist, so nennt man es diamagnetisch. Bei $\chi = -1$ haben wir einen Supraleiter.

O_2 flüssig	$3.6E - 3$
Al	$2.4E - 5$
Pt	$2.5E - 4$

Falls $\chi > 0$, so nennt man es paramagnetisch.

Ferrite	0.3
AlNiCo	3
Fe	10^4
Mu-Metalle	9E4

Diese nennt man ferromagnetisch mit $\chi \gg 0$.

Die Ursache/Unterschiede : Elektronenstruktur der Atome.

Bahnbewegung \rightarrow magnetische Bahnmomente

Eigenrotation \rightarrow magnetische Spinnmomente

Kernmomente i.A. vernachlässigbar

Diamagnetismus Tritt immer auf, kann aber durch andere magnetische Effekte überdeckt werden. In Reinform, wenn die Atome ohne äußeres Feld *kein* magnetisches Moment besitzen. Das äußere Feld *induziert* ein magnetisches Moment, in jedem Atom, \vec{m} ist dann dem äußeren Feld entgegengerichtet. (Lenzsche Regel).

Keine Analogie im elektrischen Fall, in inhomogenen Feldern werden Diamagnete *aus* dem Bereich hoher Feldstärken hinausgedrängt wegen

$$W_{pot} = -\vec{m}\vec{B} \propto B^2, \vec{m} \propto -\vec{B}$$

Damit folgt

$$\chi \propto -nZ\langle x^2 \rangle$$

Wobei $\langle x^2 \rangle$ ein mittlerer atomarer Querschnitt ist, Z die Ordnungszahl ist (Zahl der Elektronen pro Atom) und n die Dichte der Atome ist.

Paramagnetismus Atome besitzen nicht kompensierte magnetische Momente, wegen ungerader Zahl von Elektronen, nicht aufgefüllte Elektronenschalen. Magnetische Momente sind ohne äußeres Feld regellos orientiert, mit Feld werden sie teilweise orientiert. Thermische Bewegung wirkt entgegen \rightarrow Magnetisierung $\propto \frac{1}{T}$

$$\chi = \mu_0 \frac{nm^2}{3k_B T} = \frac{C}{T}$$

Dies ist das Curie-Gesetz.

Elektrische Analoge : Orientierungspolarisation.

Paramagnetische Stoffe werden in inhomogenen Feldern in den Bereich höherer Feldstärke

Ferromagnetismus *Austauschwechselwirkung* zwischen den Magnetischen Atomen ist so groß, dass die magnetischen atomaren Dipole auch ohne Feld in makroskopischen Raumbereichen parallel ausgerichtet sind. Dömänen Weiße Bezirke. z.B.: Fe, Co, Ni, Gd, Dy ...

Legierungen, auch aus Elementen, die mangetisch sind. Nur unterhalb einer kritischen Temperatur T_C (Curie-Temperatur), oberhalb von T_C : paramagnetisches Verhalten

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}$$

Curie-Weiß-Gesetz

ferromagnetische Domänen sind einige μm groß, deren Magnetisierung in einer nicht magnetisierten makroskopischen Probe statistisch orientiert ist. Die Gesamtmagnetisierung ist Null. Magnetisierung geschieht über Drehung der Domänenmagnetisierung oder durch Verschiebung der Domänenwände.

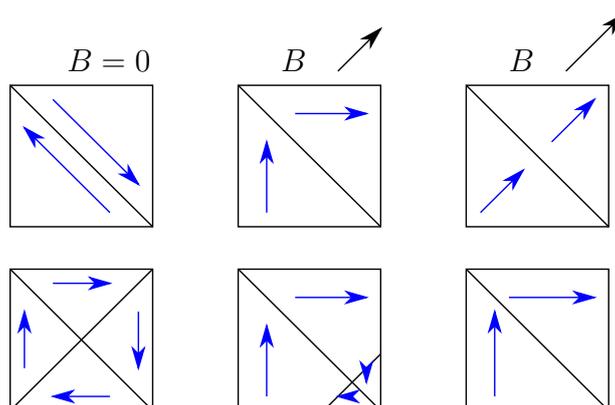


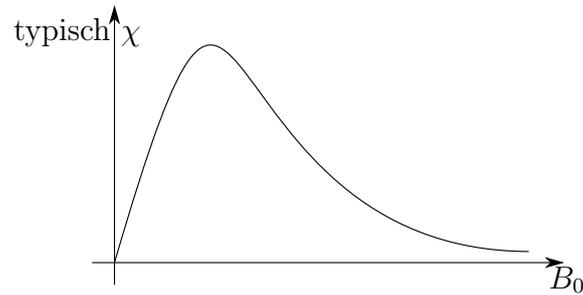
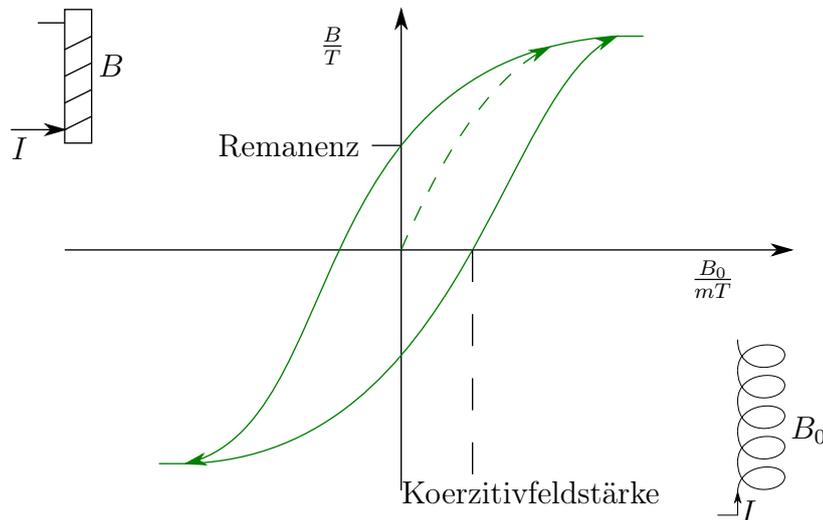
Abbildung 3.26: Experiment: Barkhausenrauschen

bei geeignet hohen äußeren Feldern gibt es eine Sättigungsmagnetisierung

- M ist nicht mehr proportional zu B_0
- χ hängt von B_0 ab

Daraus ergibt sich eine sinnvolle Definition

$$\chi = \frac{dM(B_0)}{dB_0}$$

Abbildung 3.27: Typisches χ Abbildung 3.28: Magnetisierungskurve $B(B_0)$ zeigt Hysterese

B hängt von der Vorgeschichte des Materials ab. Remanenz und Koerzitivkraft hängen von der Legierung und von deren Vorbehandlung ab. Große Remanenz \rightarrow Permanentmagnete, z.B.: AlNiCo 1 – 1.5 T

Große Koerzitivkraft \rightarrow Hartmagnete ($H_C > 10^4 \frac{A}{m}$), Kern von Drehspulinstrumenten

Kleine Koerzitivkraft \rightarrow Weichmagnete ($H_C < 10^3 \frac{A}{m}$) Transformatorbleche, kleine Hystereseffläche \rightarrow kleine Verluste, Weich-Eisen $H_c \approx 10^2 \frac{A}{m}$, amorphe Metalle $H_C \leq 1 \frac{A}{m}$

Zahlenbeispiele

	$\frac{T_c}{K}$	Magnetisches Moment pro Atom in μ_B	Sättigungsmagnetisierung $\mu_0 M_0$ in T bei 0 K
Fe	1043	2.2	2.2
Co	1400	1.7	1.8
Ni	485	0.6	0.6
Gd	292	7.1	2.5
Dy	85	10	

Wobei

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.8 \cdot 10^{-11} \frac{MeV}{T} = 9.3 \cdot 10^{-24} Am^2$$

Bohrsches Magneton.

Magnetische Ordnungszustände

Atomare Ordnung

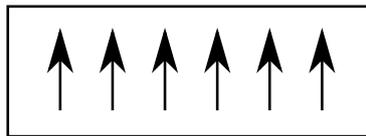


Abbildung 3.29: Ferromagnetismus

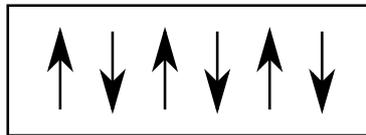


Abbildung 3.30: Antiferromagnetismus

Zwei entgegengerichtete ferromagnetische Untergitter.

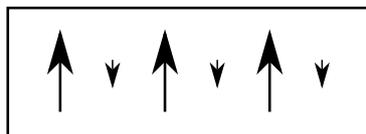


Abbildung 3.31: Ferromagnetismus

Anwendung der magnetischen Feldgleichungen in Materie \vec{B} -Feld ist mit *allen* Strömen verknüpft, den makroskopischen durch Drähte und den atomaren Kreisströmen.

Zirkulation von $\vec{B} \propto$ eingeschlossene Ströme

Definition

Amperesches Gesetz *mit Materie*

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 (I_{\text{makro}} + I_{\text{atomar}})$$

vgl \vec{E} -Feld : äußere Ladung + Polarisationsladung

Ebenso gilt für das mit I_{makro} verknüpfte \vec{H} -Feld

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I_{\text{makro}}$$

(vgl : \vec{D} -Feld : nur äußere, freie Ladungen, keine Polarisationsladung)

Mit

$$\oint \vec{M} d\vec{r} = I_{\text{atomar}}$$

folgt

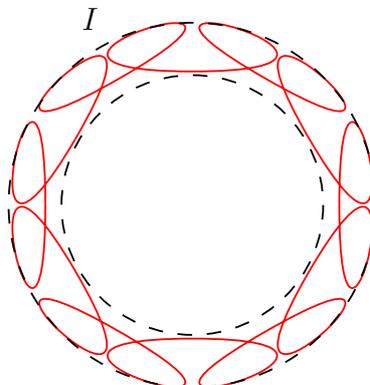
$$\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{makro}}$$

und außerdem

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Beispiel: Elektromagnet, Spule mit Eisenkern

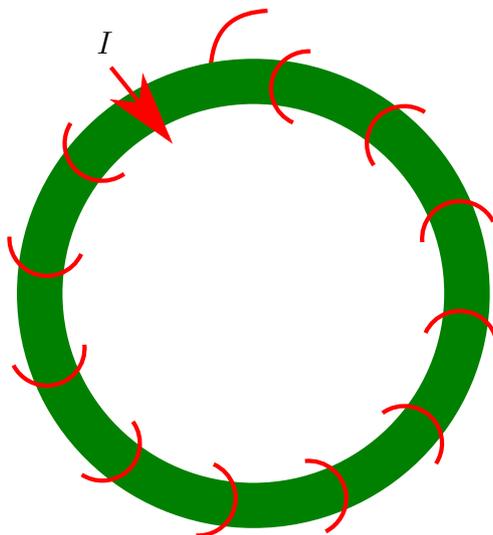
1. Schritt Spule als Torus, Feld nur im Inneren



H : Amperewindungen pro Länge, L : mittlerer Torusumfang,

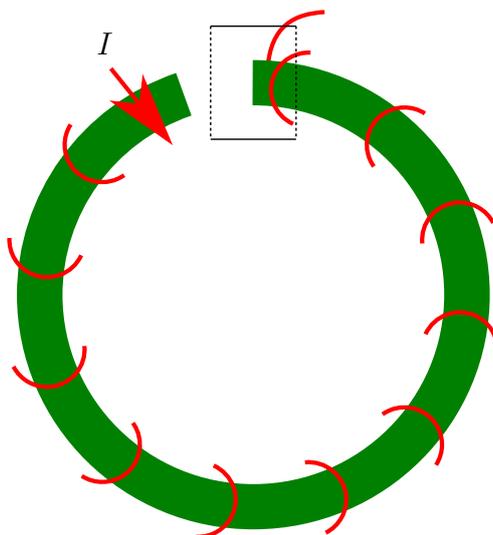
$$H = \frac{N}{L}I, B = \mu_0 \frac{N}{L}I$$

2. Schritt Bei $I = const$ Eisenkern als Ferromagnet einbringen



$$H = \frac{N}{L}I \text{ unverändert, } B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{L}I$$

3. Schritt einen Spalt ins Eisen sägen



$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \rightarrow B_{spalt} = B_{innen}$$

$$B_{spalt} = B_{innen}, \mu_{spalt} H_{spalt} = \mu_{innen} H_{innen}$$

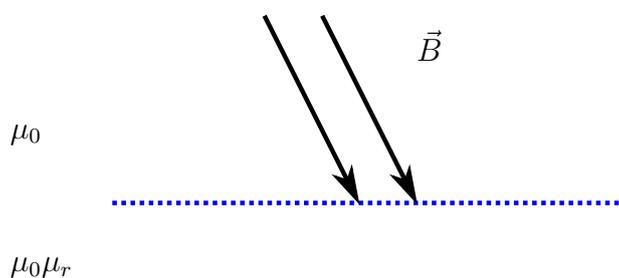
$$H_{spalt} = \frac{\mu_{innen}}{\mu_{spalt}} H_{innen}$$

Bei $\mu_{innen} \approx 10^4 (Fe)$, $\mu_{spalt} = 1$

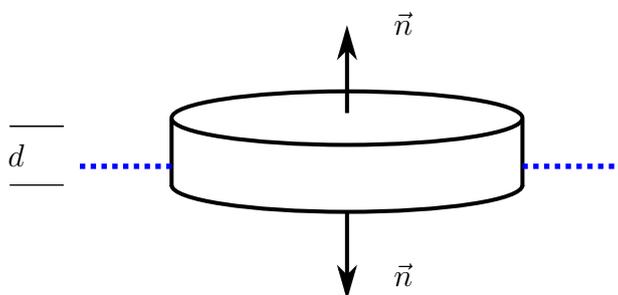
$$B_{spalt} = B_{Fe}$$

$$H_{spalt} = 10^4 H_{innen}$$

Beispiel : Durchgang durch Grenzflächen. hier:

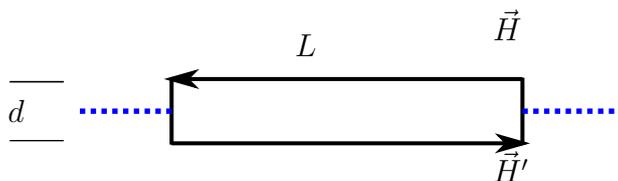


1. Schritt mit $\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$



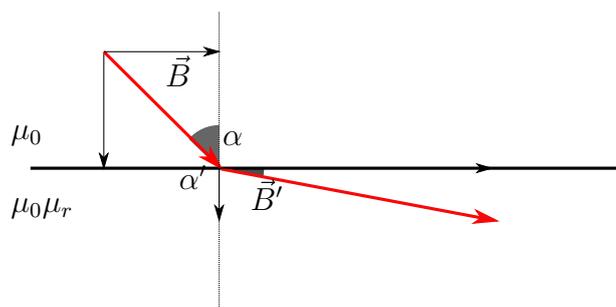
$\oint \vec{B} d\vec{A} = B_N A - B'_N A = 0 (A \rightarrow 0) \implies B_N = B'_N \implies$ Normalkomponente von \vec{B} ist stetig.

2. Schritt mit $\oint \vec{H} d\vec{r} = 0$, wegen $I_{makro} = 0$. Wähle folgenden Weg



kleines Wegstück L , $\oint \vec{H} d\vec{r} = H_t L - H'_t L = 0 \implies H_t = H'_t \implies$ Tangentialkomponente von \vec{H} ist stetig.

Dies zusammengefasst gibt :



$$B'_y = B_y, H'_x = H_x \rightarrow \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B'_x = \frac{1}{\mu_0} B_x \rightarrow B'_x = \mu_r B_x$$

$$\tan \alpha = \frac{B_x}{B_y}, \tan \alpha' = \frac{B'_x}{B'_y} = \frac{\mu_r B_x}{B_y}$$

Daraus ergibt sich eine Art Brechungsgesetz mit

$$\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \mu_r$$

Anwendung :

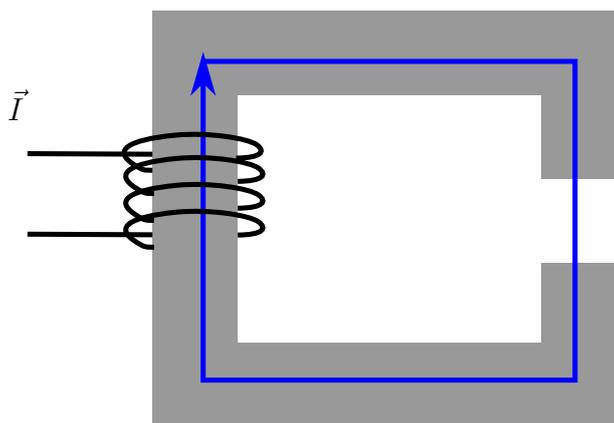


Abbildung 3.32: Elektromagnet

Führen der magnetischen Feldlinien, Zahlenbeispiele $\alpha = 1^\circ, \mu_r = 100 \rightarrow \alpha' = 60^\circ$

3.5 Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

3.5.1 Induktionserscheinung

Statistische elektrische Felder

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \oint \rho dV = Q \quad 1. \text{ Maxwellsche Gleichung}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = 0 \quad 2. \text{ Maxwellsche Gleichung in der E-Statik}$$

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{r}$$

Faraday 1820

zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ϕ durch eine Drahtschleife erzeugen eine elektromagnetische Kraft, oder induzierte Spannung an den Drahtenden

Definition

Faradaysches Induktionsgesetz

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$$

mit $U_{ind} = \oint \vec{E} d\vec{r}$ und $\phi = \int \vec{B} d\vec{A}$ folgt

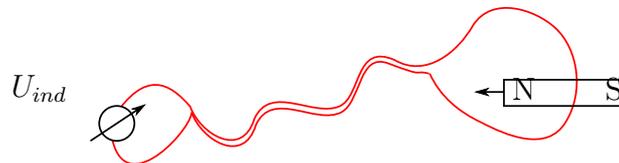
Definition

Zweite Maxwellsche Gleichung

$$\oint_c \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{B} d\vec{A}$$

Wobei c der Rand von F ist

exp:



Beispiel : Strom durch Leiter im \vec{B} -Feld

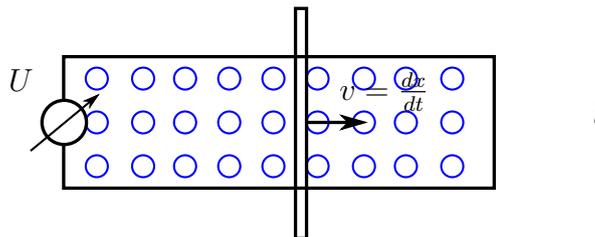
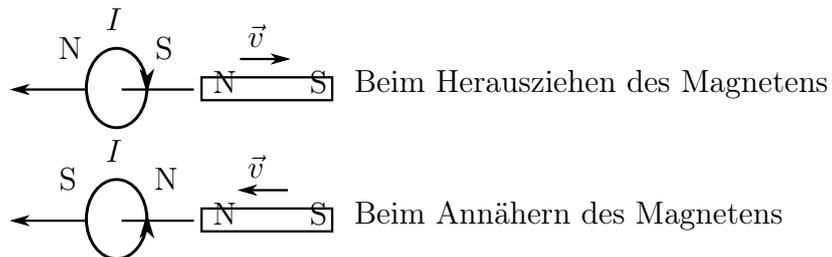


Abbildung 3.33: Draht im \vec{B} -Feld ziehen

$$U_{ind} = -\dot{\phi} = -\frac{d}{dt}(BA) = -B\frac{d}{dt}A = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

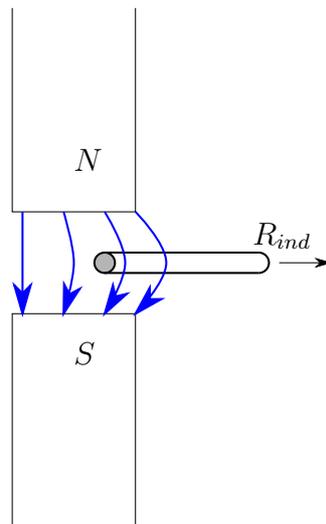
Die Lenzsche Regel

U_{ind} führt zu einem Strom durch die Schleife $I = \frac{U}{R} = -\frac{d\phi}{dt}R$, wobei R der Gesamtwiderstand der Schleife ist. In welche Richtung fließt der Strom?



Solange Strom fließt, wird im Draht die Leistung $P = I^2R$ in Wärme verwandelt. Diese Energie stammt aus der kinetischen Energie des Stabmagneten. Das durch I erzeugte Magnetfeld wird also den Stab abbremsen, unabhängig von seiner Bewegungsrichtung.

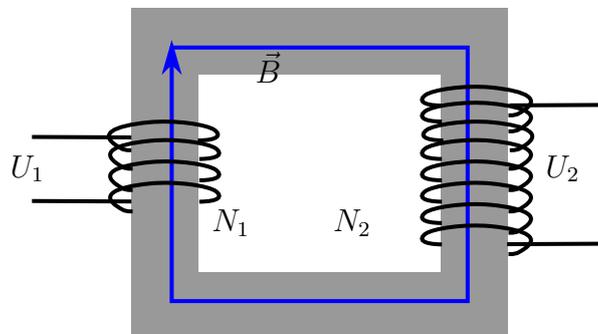
Lenzsche Regel $\hat{=}$ Energieerhaltung



- Deformation des Erdmagnetfeldes im Plasmaoid der Sonne
- Implosionstechnik für große Magnetfelder

Anwendung der Induktion:

Beispiel : Transformator



ϕ_0 ist der Fluss pro Windung. Lenzsche Regel/Induktionsgesetz

$$U_1 = -N_1 \dot{\phi}_0$$

$$U_2 = -N_2 \dot{\phi}_0$$

mit

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

idealer Transformator $P_1 = P_2 \rightarrow I_1 U_1 = I_2 U_2 \rightarrow$

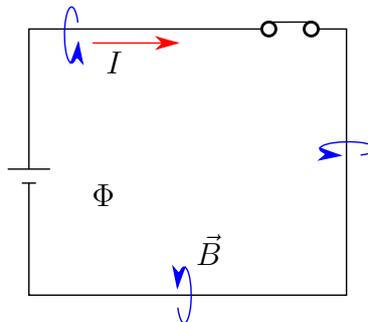
$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

Beispiel: Elektrische Generatoren $\phi = \phi_0 \cos(\omega t) = BA \cos(\omega t)$ mit ω rotierende Leiterschleife im Magnetfeld

$$U_{ind} = -\dot{\phi} = \omega BA \sin(\omega t)$$

je nach Schaltung der Schleifenkontakte entweder eine Wechselspannung oder eine Gleichspannung

3.5.2 Die Selbstinduktion



Ein Strom bildet die Wirbelfäden eines Magnetfeldes. Stromänderungen, z.B. durch Öffnen eines Schalters bedeutet

→ Änderung des Magnetfeldes

→ induzierte Spannung, auch über dem Kreis/Drahtschleife, die den Strom trägt

Es gilt

$$U_{ind} = -\dot{\phi} \propto -\dot{I}$$

Definition

$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

L heißt Selbstinduktionskoeffizient oder (Selbst)Induktivität

Einheit $1 \frac{Vs}{A} = 1H$ (Henry)

in Worten: $1 \frac{A}{s}$ Stromänderung erzeugt 1V Induktionsspannung bei $L = 1 H$

U_{ind} wirkt der Ursache (Stromänderung) entgegen! (Lenzsche Regel)

Beispiel zur Berechnung von L : Lange Spule mit Eisenkern, Länge l und N Windungen:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -N\dot{\phi} \\ &= -NA\dot{B} \\ &= -NA\frac{d}{dt}\left(\mu_r\mu_0\frac{N}{l}I\right) \\ &= -A\frac{N^2}{l}\mu_r\mu_0\dot{I} \\ &= -L\dot{I} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich bei einer langen Spule mit Eisenkern

$$L = \mu_r\mu_0A\frac{N^2}{l}$$

3.5.3 Energie im Magnetischen Feld

Energie = Arbeit, die zum Aufbau des Magnetfelds verrichtet werden muss. Ansteigender Strom induziert Gegenspannung

$$U_{ind} = -L\dot{I}$$

Die erforderliche Leistung dazu ist dann

$$P = \frac{dW}{dt} = -U_{ind}I$$

Somit folgt für die Energie

$$W = \int P dt = \int L \frac{dI}{dt} I dt = \int LI dI$$

Definition

Energie im Magnetfeld

Für die Energie im Magnetfeld gilt

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

Betrachte nun eine Zylinderspule

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$
$$H = I \frac{N}{l} \rightarrow I = \frac{lH}{N}$$
$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \frac{AN^2}{l} \frac{l^2 H^2}{N^2}$$
$$W = \frac{1}{2} BHV$$

Definition

Energiedichte des Magnetischen Feldes

$$w_{\text{magnetisch}} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Kapitel 4

Elektrische Schaltkreise

Beim Zusammenschalten von Ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten gelten weiterhin die Kirchhoffschen Regeln:

Knotenregel

$$\sum_i I_i = 0$$

Maschenregel

$$\sum_i U_i = 0$$

Spannungsabfälle und Spannungsquellen werden mit umgekehrten Vorzeichen gezählt.

4.0.4 Ein- und Ausschaltvorgänge

Einschaltvorgang

Beispiel RL-Kreis

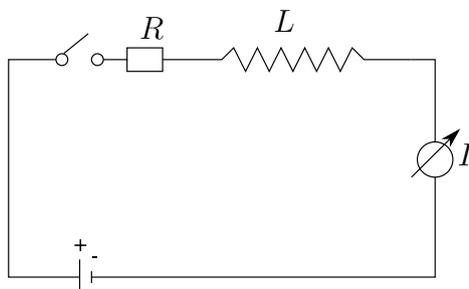


Abbildung 4.1: Schaltkreis mit Schalter, Widerstand und Spule

Experiment zeigt $I(t)$ ist exponentiell und beschränkt
 Verwende $I(0) = 0$ und die Maschenregel, daraus folgt

$$\begin{aligned} U_0 &= U_R + U_L \\ RI_0 &= RI(t) + L\dot{I} \\ \dot{I} &= \frac{R}{L}(I_0 - I(t)) \\ I(t) &= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-t\frac{R}{L}}\right) \end{aligned}$$

Somit gilt für die Abklingzeit

$$\tau = \frac{L}{R}$$

als Zeit, die der Strom braucht um auf $\frac{1}{e}$ -tel zu fallen.

Ausschaltvorgang

$$U_0 = 0, I(0) = \frac{U_0}{R}$$

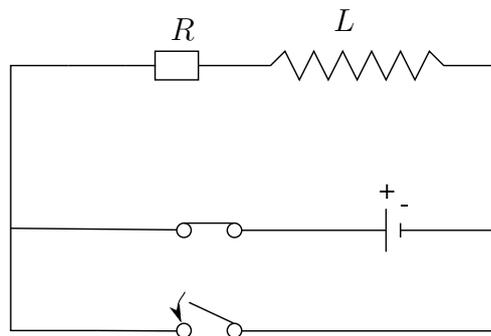


Abbildung 4.2: Ausschaltvorgangsmessung

Diesmal reduziert sich die Differentialgleichung auf

$$0 = RI(t) + L\dot{I}$$

Somit ergibt sich

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Energiebilanz des RL-Kreises (beim Anschalten)

Die Spule dient als neue Energiequelle, also

$$U_R - U_L = 0$$

$$U_R + L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$RI^2 + LI \frac{dI}{dt} = 0$$

$$RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = 0$$

Ohmsche Leistung am Widerstand bedeutet also Abnahme der magnetischen Feldenergie.

Anwendung

RL-Kreis als Integrierer

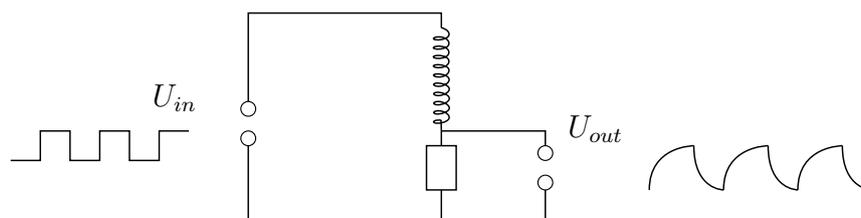
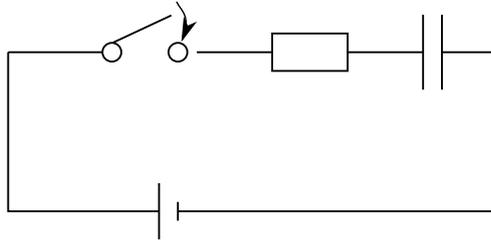


Abbildung 4.3: Größeres $L \rightarrow$ Größeres τ



Abbildung 4.4: Große L oder große Frequenz

Beispiel: RC-Kreis

Einschaltvorgang

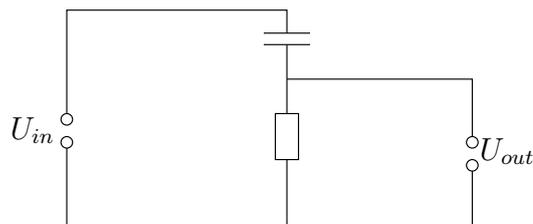
Maschenregel :

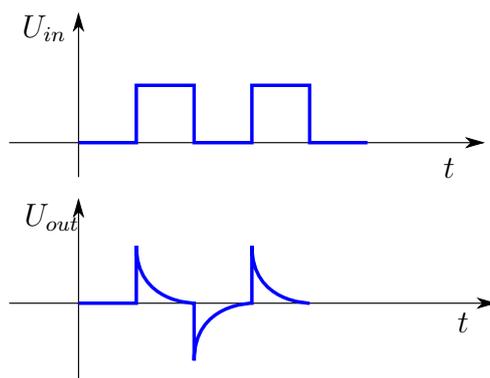
$$\begin{aligned}
 U_0 &= RI + \frac{Q}{C} \\
 U_0 &= R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \\
 \dot{Q} &= \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{C} \\
 Q(t) &= I_0 \left(1 - C R e^{-\frac{t}{RC}} \right)
 \end{aligned}$$

Da wir hier nach $Q(t)$ gelöst haben und somit ableitungstechnisch eine Ebene über $I(t)$ sind, ist eine Additionskonstante verloren gegangen. Mit dieser gilt dann

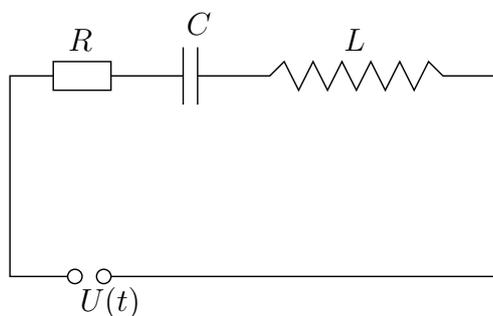
$$I(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Anwendung als Differenzierer





4.0.5 Schwingkreis



Maschenregel

$$RI + \frac{Q}{C} + L\dot{I} = 0$$

Differenzieren :

$$R\dot{I} + \frac{I}{C} + L\ddot{I} = 0 \iff m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = 0$$

Dies entspricht einem gedämpften harmonischen Oszillator.

$$\ddot{I} + \frac{R}{\Omega}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$$

zunächst $R = 0$

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0$$

Lösung ist

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

mit

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Nun $R \neq 0$

Analogie: mechanischer Oszillator, aperiodischer Grenzfall(wichtig für Mess-und Regeltechnik)

Experiment Schwache Dämpfung, Starke Dämpfung

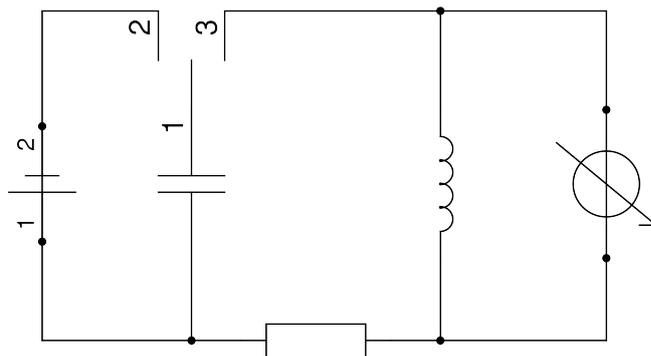


Abbildung 4.5: Schwingkreis

4.1 Wechselstromschaltkreise und Widerstände

Komplizierte Schaltkreise

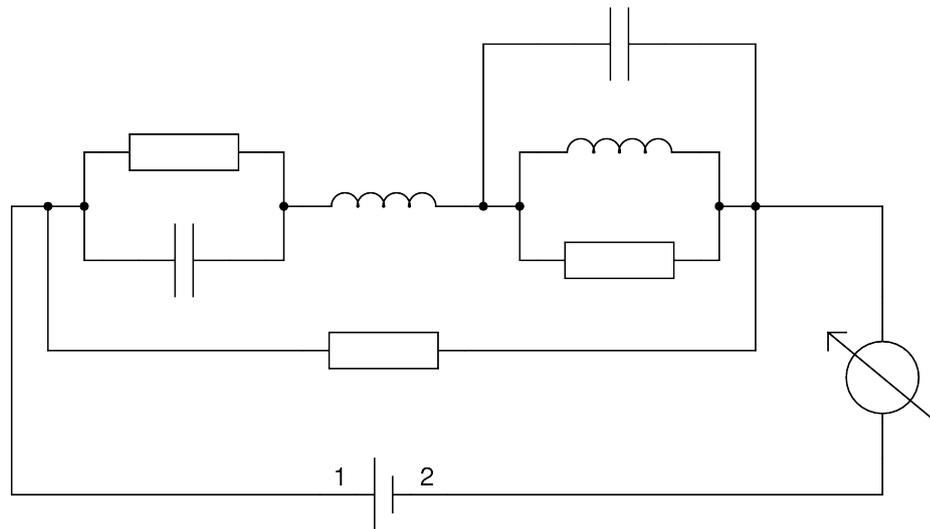


Abbildung 4.6: Komplizierter Schaltkreis

Kirchhoffschen Regeln ergeben lästige Differentialgleichungen in I . Vereinfachung durch Einführen von *Scheinwiderständen*, Impedanzen.

$U(t)$ habe die Form

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad \text{oder} \quad U(t) = U_0 e^{-i\omega t}$$

Ansatz sei

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

Strom und Spannung sind hier in Phase erhalten wir für

Ohmscher Widerstand

$$U_R = R I_0 e^{i\omega t} = R \cdot I = Z_R \cdot I$$

Wobei Z_R als Impedanz für R wirkt.

Kapazität

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

Strom und Spannung sind hier phasenverschoben.

$$U_C = \frac{1}{C} \frac{1}{i\omega} I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} I(t) = Z_C \cdot I$$

mit

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Induktivität

$$U_L = L \cdot \dot{I}$$

$$U_L = Li\omega_0 I e^{i\omega t} = i\omega LI(t) = Z_L I(t)$$

mit

$$Z_L = i\omega L$$

Zusammenfassend ergibt sich für die Scheinwiderstände also

$$\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_C &= \frac{1}{i\omega C} \\ Z_L &= i\omega L \end{aligned}$$

Parallel- und Serienschaltungen dieser Scheinwiderstände erfolgen analog zu ohmschen Widerständen, Folge der Kirchhoffschen Regeln.

Es ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$Z_{ges} = \Re(Z_{ges}) + i\Im(Z_{ges})$$

Der Realteil ist der Wirkwiderstand,, ohmsche Verluste, Anteil I und U in Phase, der Imaginärteil ist der Blindwiderstand.

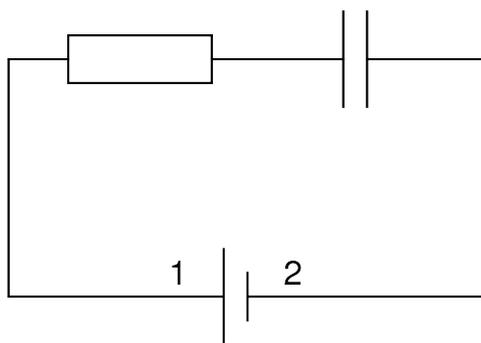
Zerlegen in Betrag und Phase.

$$U = Z_{ges} I$$

$$|U| = |Z_{ges}| |I|$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\Im(Z_{ges})}{\Re(Z_{ges})}$$

Wobei φ der Steigungswinkel bezüglich der Realteil-Achse ist. Bei $\varphi > 0$: U eilt I um φ voraus.



Beispiel

$$Z_{ges} = Z_C + Z_R = \frac{1}{i\omega C} + R = R - i\frac{1}{\omega C}$$

Somit

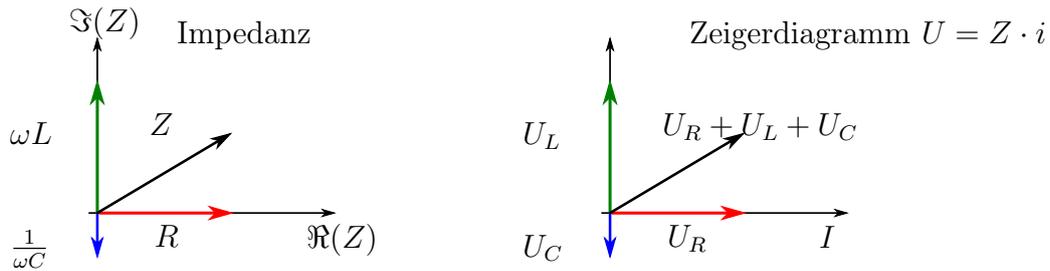
$$|Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{1}{\omega RC}$$

Beispiel: Schwingkreis Sei eine gewöhnliche Serienschaltung aus Ohmschem Widerstand, Kapazität und Spule gegeben.

$$Z_{ges} = Z_R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

R klein $\rightarrow Z_{ges} \rightarrow 0$ bei $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \hat{=}$ Eigenfrequenz. Bandpassverhalten.



Bilder gelten für bestimmte Werte von ω, L, C, R

Für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ wird $|z|$ minimal mit $|z| = R$ und bei gegebenem U wird der übertragene Strom maximal.

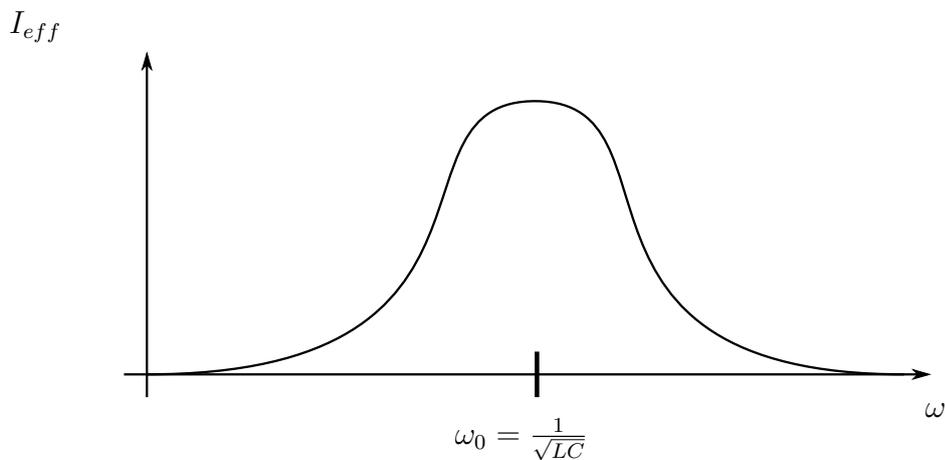


Abbildung 4.7: Strom für verschiedene Frequenzen

Gütefaktor

$$Q = \omega_0 \tau$$

hängt von der Dämpfung ab, hier

$$\tau = \frac{L}{R}$$

siehe Bewegungsgleichung für den Strom.

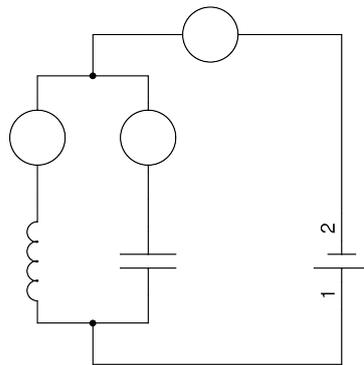


Abbildung 4.8: $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$

Beispiel : Schwingkreis Parallelschaltung

$$\frac{1}{Z_{ges}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$$

$$Z_{ges} = -i \left(\frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} \right)$$

$$|Z_{ges}| \rightarrow \infty \text{ für } \omega C - \frac{1}{\omega L} \rightarrow 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \hat{=} \text{Eigenfrequenz}$$

Für $\varphi \rightarrow 90^\circ$ ergibt sich Sperrkreisverhalten.

Leistung Ohmscher Widerstände

$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{U}{Z_R} = \frac{1}{R} U_0 \cos(\omega t)$$

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

$$P(t) = \frac{1}{R} U_0^2 \cos^2(\omega t)$$

mittlere Leistung

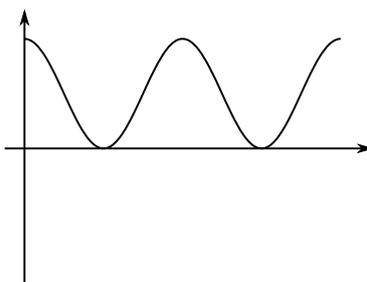
$$\begin{aligned} \langle P \rangle &:= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{1}{R} U_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt \\ &= \frac{U_0^2}{R} \frac{1}{2} \\ &:= \frac{U_{eff}^2}{R} \end{aligned}$$

Mit der Effektivspannung

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Beispiel: 220V Steckdosenspannung heißt

$$U_{eff} = 220V \rightarrow U_0 = 220 \cdot \sqrt{2} V = 311 V$$



Leistungsabfall an einer Induktivität

$$\begin{aligned}U &= U_0 \cos(\omega t) && = L\dot{I} \\ I &= \frac{1}{L} \frac{1}{\omega} U_0 \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Leistung

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{L\omega} U_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{1}{L\omega} U_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \sin(2\omega t) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

ebenso $\langle P \rangle = 0$ bei einer Kapazität

Siehe jetzt noch einmal Gesamtimpedanz oben.

$$Z_{ges} = \Re(Z_{ges}) + i\Im(Z_{ges})$$

Kapitel 5

Elektromagnetische Wellen

5.1 Der Verschiebungsstrom

Erweiterung des Ampereschen Gesetzes für zeitlich veränderliche Felder. Maxwells große Tat

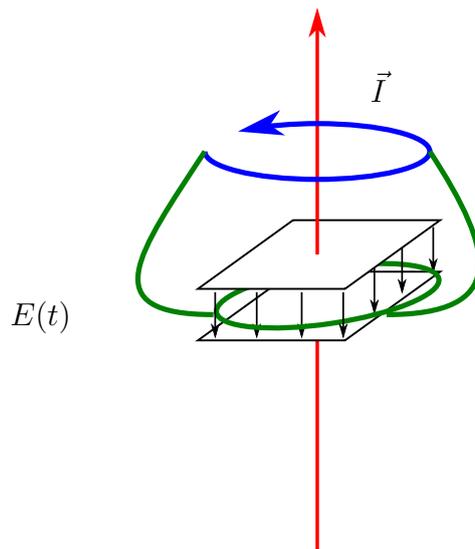


Abbildung 5.1: Kondensator im Leiter

Fläche außerhalb wie gewohnt $\vec{H} \neq 0$, Fläche innerhalb des Kondensators

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I = 0$$

und daraus folgt

$$\vec{H} = 0$$

Idee: innerhalb des Kondensators gibt es zwar keinen Leitungsstrom, aber ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld, dem ein *Verschiebungsstrom* I_v entspricht.

Verschiebungsstrom = Änderung des Flusses des \vec{D} -Feldes

Wobei \vec{D} die elektrische Verschiebungsdichte ist.

$$I_v = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Fläche}} \vec{D} d\vec{A}$$

Also

Definition Vollständiges Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} d\vec{A}$$

oder

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) d\vec{A}$$

Wobei \vec{j} die Stromdichte bezeichnet.

Quellen von \vec{D}

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q$$

Einfügen in Materie

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Materialgleichungen: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ wobei σ die elektrische Leitfähigkeit ist. $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$.

Damit erste Maxwellgleichung mit \vec{B} , \vec{E} schreiben

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \mu_r \int \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \right) d\vec{A}$$

Analog : Zirkulation elektrischer Felder

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{A}$$

Quellen von \vec{B} (gibts nicht)

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Die 4 Maxwell Gleichungen

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q$$

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{A}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Einflüsse von Materie

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Materialgleichung

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Wobei χ_m die magnetische Suszeptibilität (i.A. ein Tensor).

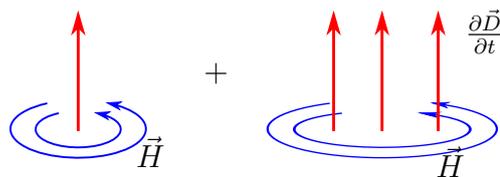


Abbildung 5.2: Durchflutungsgesetz

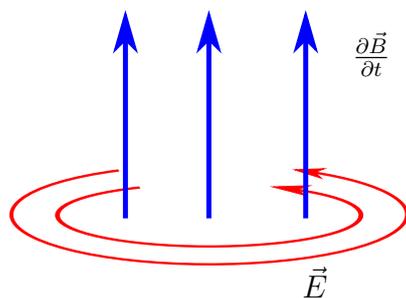


Abbildung 5.3: Induktionsgesetz

Zeitlich veränderliche Ströme führen auf zeitlich verändernde \vec{B} -Felder und wieder von vorne.

Zeitlich veränderliche Ströme, d.h. *beschleunigte* Ladungen rufen elektromagnetische Felder hervor, die sich im Raum ausbreiten.

5.2 Die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form

Definition Die Maxwell'schen Gleichungen in differentieller Form

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}\end{aligned}$$

im Vakuum, in vielen Materialien dann

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H}\end{aligned}$$

Wobei

$$\begin{aligned}\rho &= \text{Ladungsdichte in } \frac{As}{m^3} \\ \vec{j} &= \text{Stromdichte in } \frac{A}{m^2}\end{aligned}$$

Die differentielle Form der Maxwellgleichungen ist äquivalent zu ihrer Integraldarstellung. Das folgt aus den Integralsätzen von Gauß und Stokes.

Gauß: für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{C}(\vec{r})$ folgt

$$\oint_{OF} \vec{C} d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{C} dV$$

Also : Aus $\text{div } \vec{D} = \rho$ folgt

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \vec{C} d\vec{A} &= \int_V \rho dV \\ \oint_{OF} \vec{D} d\vec{A} &= Q\end{aligned}$$

auch

$$\text{div } \vec{B} = 0 \implies \oint_{OF} \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Integralsatz von Stokes für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{C}(\vec{r})$

$$\oint_{Rand} \vec{C} d\vec{r} = \int_A \text{rot } \vec{C} d\vec{A}$$

Also

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \int_A \text{rot } \vec{E} d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} d\vec{A} \implies \oint_A \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

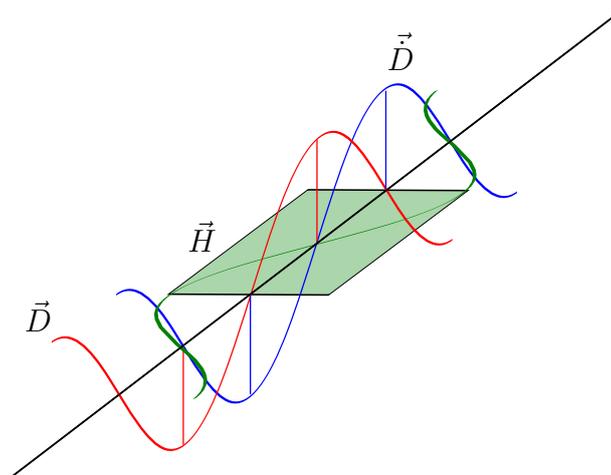
Auch für $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

5.3 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Elektrische und magnetische Felder induzieren sich gegenseitig. Einfachster Fall : Ebene Welle in x -Richtung , z.b.

$$\vec{E} = \vec{E}_a \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right)$$

Wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ und $\text{div } \vec{D} = 0$ müssen \vec{B} und \vec{D} Transversalwellen sein. Longitudinalkomponenten führen zu Quellen und Senken. Dies ist ein Widerspruch.



$\text{rot } \vec{H} = \dot{\vec{D}}$, $\text{rot } \vec{H}$ muss $\perp \vec{D}$ sein. Rahmen (Länge $\frac{\lambda}{2}$ fangt dann an meisten $\dot{\vec{D}}$ ein

$$\oint_{\text{grüner Rand}} \vec{H} d\vec{r} = \int_{\text{grüner Kasten}} \vec{D} d\vec{A}$$

ist maximal, wenn der Rahmen wie im Bild positioniert ist.

Insgesamt ergibt sich, dass \vec{D} und \vec{H} in Phase sind.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Grüne Fläche}} \dot{\vec{D}} d\vec{A} &= b \int_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3\lambda}{4}} \varepsilon_r \varepsilon_0 \dot{E}_y dx \\
 &= y \varepsilon_r \varepsilon_0 \omega E_{y0} \int_{\frac{\lambda}{4}}^{\frac{3\lambda}{4}} \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) dx \\
 &= y \varepsilon_r \varepsilon_0 \omega \frac{c}{\omega} E_{y0} \cdot 2 \\
 &= \int_{\text{Grüner Rahmen}} \vec{H} d\vec{r} = 2H_{z0} \cdot b
 \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen der Amplitude des D/E -Feldes und des H -Feldes, wir finden

$$H_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 c E_0 = c D_0$$

Analog mit

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = - \int \dot{\vec{B}} d\vec{A}$$

folgt

$$E_0 = \mu_r \mu_0 c H_0 = c B_0$$

Gegenseitig einsetzen ergibt

Definition (Phasengeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

für die vier Feldgrößen gilt in linearen Medien

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} H_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} B_0 = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} D_0$$

Definition Wellenwiderstand/Impedanz

$$Z_W = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}}$$

Der Wellenwiderstand bestimmt die Reflexions- und Transmissionseigenschaften beim Übergang von einem Medium zum anderen.

Vakuumwellenwiderstand

$$Z_{W,0} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} = 376.7 \, \Omega$$

Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Wellengleichung aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet im Vakuum gilt

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Zusätzliches rotieren ergibt

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})\end{aligned}$$

Ursprungsgleichungen wieder einsetzen

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Benutze

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{C}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{C}) - \Delta \vec{C}$$

Wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

und

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \nabla \vec{E} = 0$$

ergibt sich

Definition Wellengleichungen

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Beispiel 1-dimensionale , ebene Wellene, wobei

$$\vec{k} = \text{Wellenvektor mit } |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)$$

Einsetzen ergibt

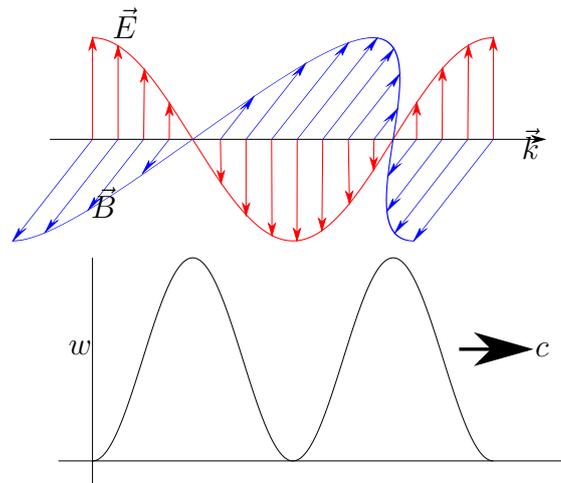
$$\omega^2 = c_0^2 k^2$$

und

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)$$

mit

$$\vec{B} \perp \vec{E} \perp \vec{k}$$



5.4 Energiedichte einer elektromagnetischen Wellen, der Pointing-Vektor

Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

Die Energie der Wellen ist zu gleichen Teilen im elektrischen und magnetischen Feld. Mit

$$E^2 = \frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0} H^2$$

wird

$$w = \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \mu_r \mu_0 H^2$$

Energieplatten $\perp \vec{k}$ wandern mit Lichtgeschwindigkeit c . Energiestromdichte

$$S = wc = \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E^2 = E \cdot H$$

Definition Pointing-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Wobei

$$|\vec{S}| = \frac{P}{A} \hat{=} \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche senkrecht zum Vektor}}$$

5.5 Elektromagnetischen Wellen im Dielektrikum

Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_r}} < c_0$$

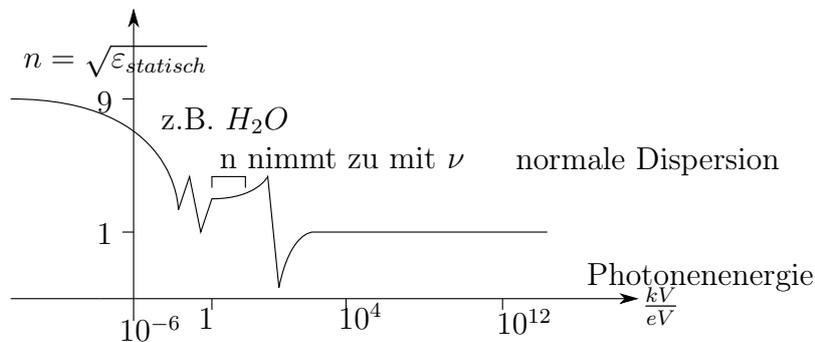
mit $\mu_r \approx 1$, außer in Ferroelektrika

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c_0}{n}$$

mit Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

Dispersion: $n = n(\omega)$ oder $n = n(\lambda)$



ϵ_r kann negativ werden (siehe Oszillatormodell der Verschiebungspolarisation), dann wird n imaginär, Welle wird überdämpft.

5.6 Der Stein-Effekt

Eindringtiefe elektromagnetischer Wellen in Leiter

$$l = \sqrt{\frac{2}{\mu_0}} \sqrt{\frac{1}{\sigma \omega}} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

5.7 Der Hertzsche Dipol

Abstrahlung

$$\frac{dW}{dt} \propto \omega^4$$

Rayleighstreuung wobei σ die Leitfähigkeit des Materials ist.