SS 2012

Klassische Experimentalphysik II

© Patrick Schönfeld

KIT Karlsruhe – Prof. Wegener

SS 2012

Keine Garantie auf Vollständigkeit und korrekte Formeln!

INHALT

1. Was ist Elektrodynamik? 2
2. Die Basisgröße Stromstärke 2
3. Ladungen und Ströme 3
   3.1 Die Spannung und das Ohmsche Gesetz 5
   3.2 Die Kirchhoffschen Regeln 6
4. Das zeitlich konstante elektromagnetische Feld 9
   4.1 Das elektrische Feld und das elektrostatische Potential 9
   4.2 Die Verschiebungsdichte und die 1. Maxwellsche Gleichung 11
   4.3 Der Kondensator und seine Kapazität 14
   4.4 Der Energiegehalt des elektrischen Feldes 17
   4.5 Elektrische Dipole 18
5. Das zeitlich konstante magnetische Feld 19
   5.1 Die 3. & 4. Maxwellsche Gleichung 19
   5.2 Das Lorentzsche Kraftgesetz 25
      5.2.1 Der Hall-Effekt 25
      5.2.2 Kraft zwischen zwei Leitern 26
      5.2.3 Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld 26
   5.3. Übergänge in magnetischen Materialien 28
6. Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder 30
   6.1 Das Induktionsgesetz 30
   6.2 Elektrische Schaltkreise 34
      6.2.1 Ein- und Ausschaltvorgänge 34
      6.2.2 Schwingkreise 37
      6.2.3 Wechselstromschaltkreise und –widerstände 38
   6.3 Der Verschiebungsstrom 42
7. Die Maxwellschen Gleichung in Differentieller Form 45
8. Elektromagnetische Wellen 50
   8.1 Energieflüsse und der Poynting-Vektor 53
   8.2 Der Skin-Effekt und Hohlleiter 55
9. Elektrodynamik der Kontinua 62
   9.1 Der Depolarisationsfaktor 74

Wenn ihr Fehler findet, meldet euch bitte bei mir, dann werde ich sie korrigieren. Alle Formeln, Definitionen und Zeichnungen ohne Gewähr auf Vollständigkeit und Korrektheit.

1. WAS IST ELEKTRODYNAMIK?

Neue Eigenschaft: elektrische Ladung → Elektromagnetische Felder → Kraft (Lorentzkraft)

2. DIE BASISGRÖßE STROMSTÄRKE

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	Relative Genauigkeit
Stromstärke	Ampere	A	10^{-6}

1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendliche Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge elektrodynamisch die Kraft $\frac{1}{5.000.000}\frac{kg \cdot m}{s^2}$ (=Newton) hervorrufen würde.

3. LADUNGEN UND STRÖME

Ladung ist eine Eigenschaft von Materie. Die Ladung ist gequantelt

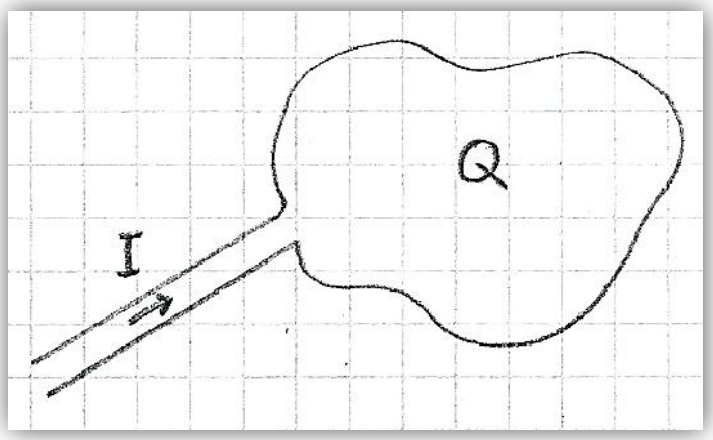
$$Q = n \cdot e \qquad n \in \mathbb{Z}$$

e ist die Elementarladung, eine Naturkonstante

$$e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19} C$$

MILLIKANVERSUCH (1909)

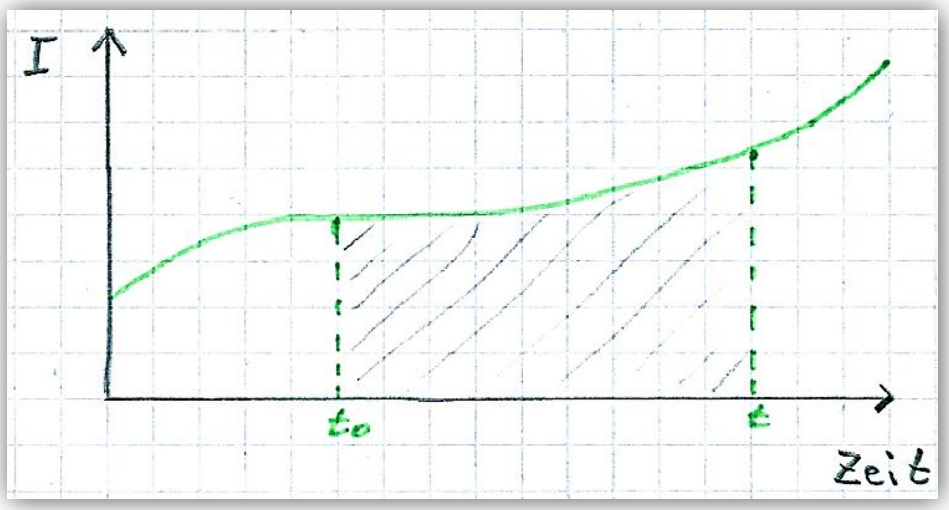
Im abgeschlossenen System ist die Ladung eine Erhaltungsgröße



$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

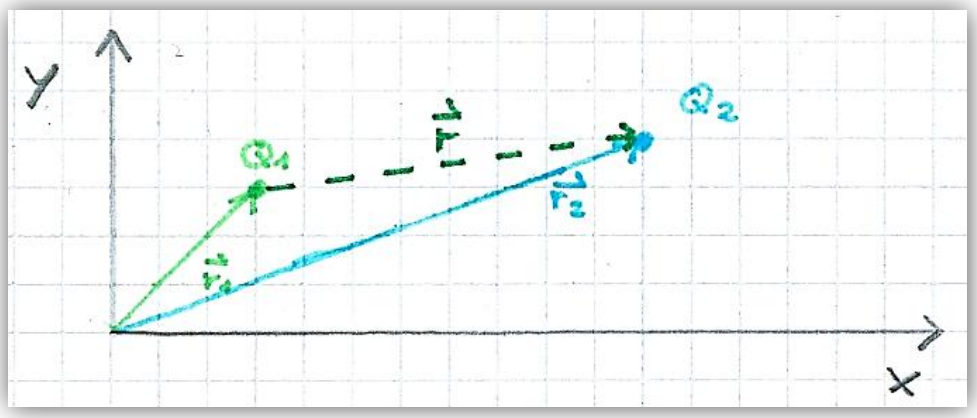
$$\Rightarrow I =: \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(t')dt'$$



$$\Rightarrow [Q] = [I] \cdot [t] = As =: C$$

KRAFT ZWISCHEN ZWEI PUNKTFÖRMIGEN LADUNGEN:



$$\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$
$$r = |\vec{r}|$$

Kraft auf Massepunkt #2:

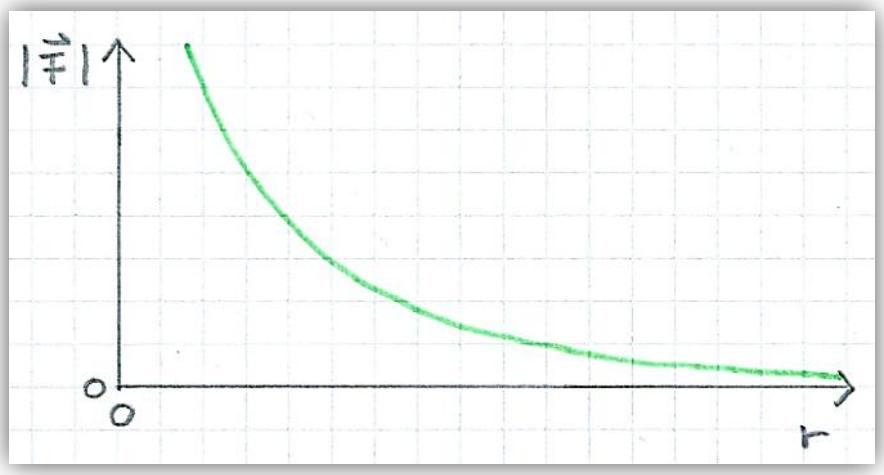
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

COULOMBSCHES KRAFTGESETZ

- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab
- Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an

ϵ_0 ist eine Naturkonstante, die Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$$



3.1 DIE SPANNUNG UND DAS OHMSCHE GESETZ

Beim Trennen von ungleichnamigen Ladungen müssen wir Arbeit verrichten

$$W_{12} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} -\vec{F}\,d\vec{r}$$

Coulomb-Kraft:

$$= -\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot d\vec{r}$$

DEFINITION: Spannung U

$$U := \frac{W_{12}}{Q}$$

$$[U] = \frac{J}{As} = \frac{Ws}{As} = \frac{W}{A} =: V$$

In passiven Bauelementen fließt der Strom von „Plus“ nach „Minus“. Bei diesem Ladungstransport wird im Allgemeinen mechanische Arbeit verrichtet.

$$W = Q \cdot U$$

Betrachte $U = const$

$$\frac{dW}{dt} = U \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$= U \cdot I = P \;\; (Leistung)$$

$$[P] = \frac{J}{s} = V \cdot A$$

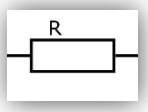
DAS OHMSCHE GESETZ:

Für viele Systeme, insbesondere für Metalle, findet man phänomenologisch folgenden Zusammenhang:

$$U = R \cdot I$$

Mit dem OHMSCHEN WIDERSTAND R $\quad [R] = \frac{V}{A} =: \Omega$ (Ohm)

Symbol:



Beispiel:

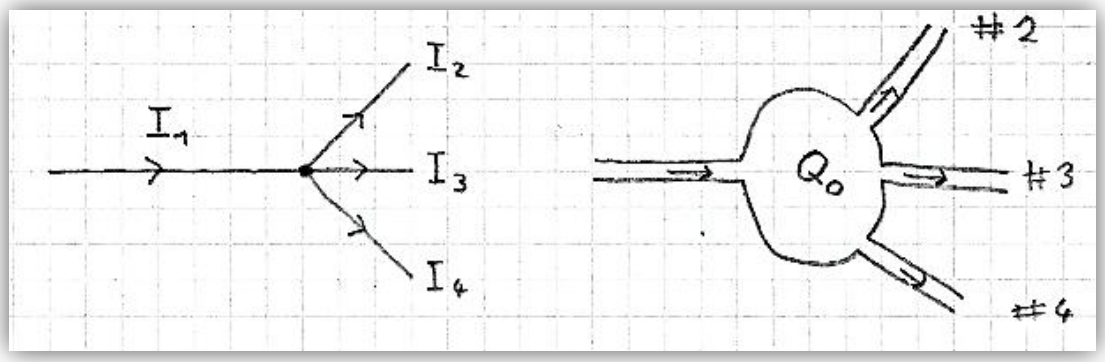
$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} = R \cdot I \cdot I = R \cdot I^2$$

(später mehr zum Ohmschen Gesetz)

3.2 DIE KIRCHHOFFSCHEN REGELN

DIE 1. KIRCHHOFFSCHE REGEL (KNOTENREGEL)

Die Summe aller Ströme eines Stromknotens ist identisch Null.

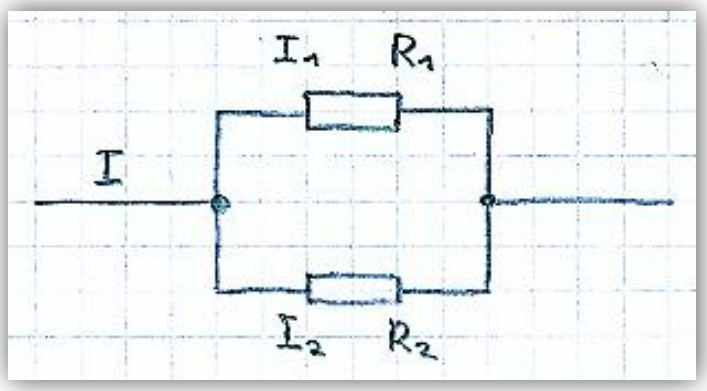


Ladungserhaltung, betrachte das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$, nehme Stationarität an:

$$\Delta Q_0 = 0 = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_3 - \Delta Q_4$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} I_1 dt - \sum_{n=2}^{4} \int_{t_1}^{t_2} I_n dt = I_1 \cdot (t_2 - t_1) - (\sum_n I_n) \cdot (t_2 - t_1) \qquad \Rightarrow I_1 - \sum_n I_n = 0$$

BEISPIEL: (Parallelschaltung von Widerständen)



$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} =: \frac{U}{R_{ges}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

DIE 2. KIRCHHOFFSCHE REGEL (MASCHENREGEL)

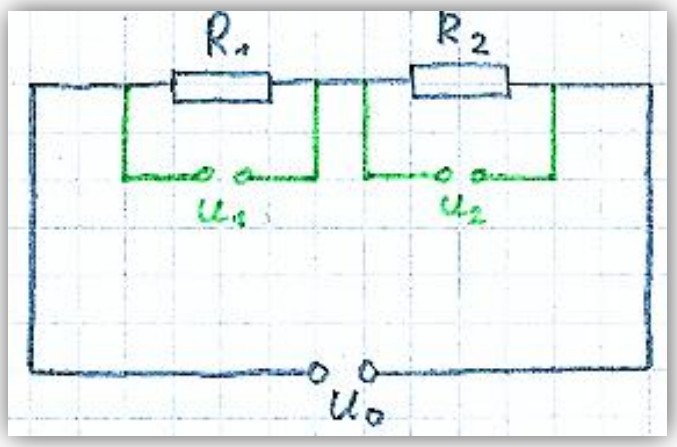
Die Summe aller treibenden Spannungen in einer Masche ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle in der gleichen Masche.

Wir setzen Stationarität voraus. Also ist die zugeführte Energie in einem Zeitintervall gleich der abgeführten Energie – in einem betrachteten Teilsystem (Masche).

$$\sum_n U_n = 0$$

Hierbei werden Quellen positiv gezählt und Spannungsabfälle negativ.

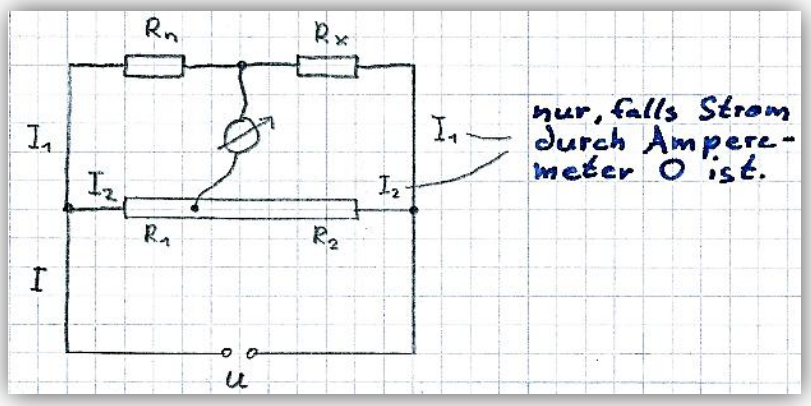
BEISPIEL: (Serienschaltung von Widerständen)



$$U_0 = U_1 + U_2$$
$$= I \cdot R_1 + I \cdot R_2$$
$$=: I \cdot R_{ges}$$

$$\Rightarrow R_{ges} = R_1 + R_2$$

BEISPIEL: (Wheatstonesche Brücke)

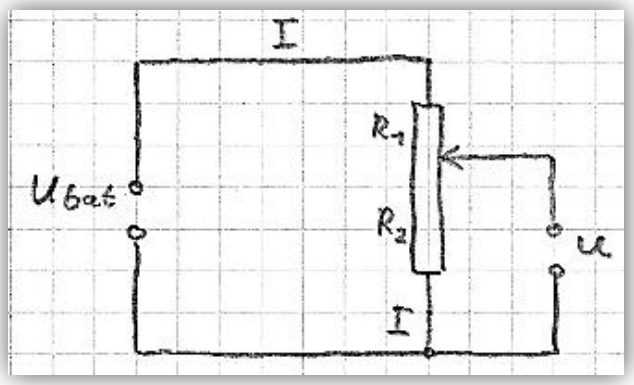


Maschenregel:

$$R_n \cdot I_1 + R_1 \cdot I_2 = 0$$
$$R_x \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 0$$
$$\Rightarrow R_n \cdot I_1 = -R_1 \cdot I_2$$
$$R_x \cdot I_1 = -R_2 \cdot I_2$$
$$\Rightarrow \frac{R_n}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$R_x = R_n \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

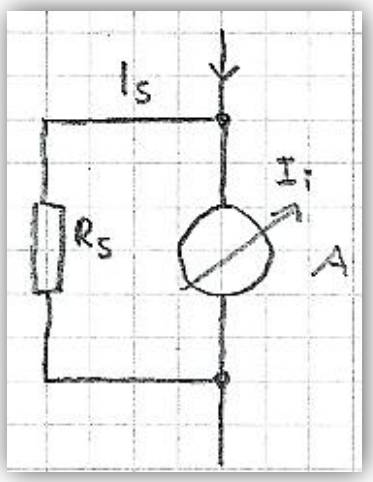
BEISPIEL: (Potentiometerschaltung)



$$I = \frac{U_{bat}}{R_1 + R_2}; U = R_2 \cdot I$$

$$\Rightarrow U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{bat}$$

BEISPIEL: (Bereichserweiterung von Messinstrumenten)



R_i = Innenwiderstand

$$U_i = U_S = R_i \cdot I_i = R_S \cdot I_S$$

Knotenregel:

$$I = I_S + I_i$$

$$I_S = I - I_i$$

$$\Rightarrow R_S = \frac{R_i I_i}{I_S} = \frac{R_i I_i}{I - I_i}$$

z.B. $R_i = 1\Omega, I = 1A, I_i = 1mA \qquad \Rightarrow R_S = 1m\Omega$

4. DAS ZEITLICH KONSTANTE ELEKTROMAGNETISCHE FELD

4.1 DAS ELEKTRISCHE FELD UND DAS ELEKTROSTATISCHE POTENTIAL

EXKURS: DER FELDBEGRIFF

Wir wollen eine Größe f mit

$$f = f(x, y, z, t)$$

als Feld bezeichnen. Ist f ein Vektor, sprechen wir von einem Vektorfeld. Ist f ein Skalar, sprechen wir von einem skalaren Feld.

Wir definieren das ELEKTRISCHE FELD

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}}{Q}$$

BEISPIEL: (Coulombsches Gesetz)

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

⇒ Feldstärke $\vec{E}$ der Ladung Q,

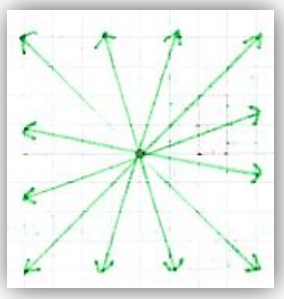
$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Visualisierung von Feldern mittels FELDLINIEN

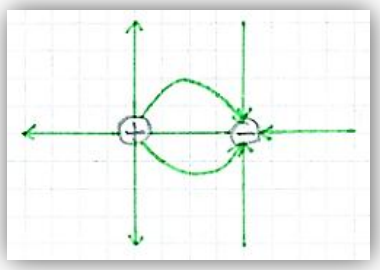
- Der Feldvektor zeigt tangential zu den Feldlinien (⇒ Feldlinien kreuzen sich nicht)
- Die Feldliniendichte ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke an diesem Ort
- Der Richtungspfeil zeigt von „+“ nach „-“

BEISPIELE:

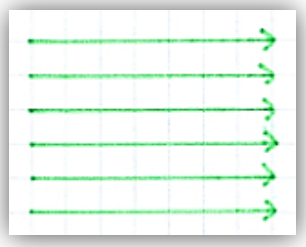
Feld einer Punktladung



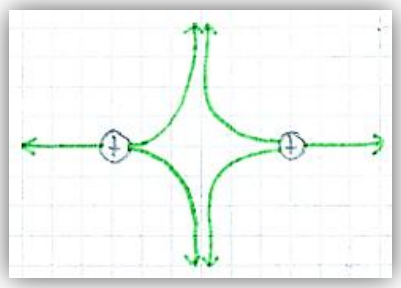
Feld zweier ungleichnamiger Ladungen



homogenes elektrisches Feld



Feld zweier gleichnamiger Ladungen



DEFINITION DES ELEKTROSTATISCHEN POTENTIALS

Betrachte Ladung Q

$$W_{12} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -Q \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Daraus folgt die Spannung U

$$U = U_{12} = \frac{W_{12}}{Q}$$

BEISPIEL: (Coulombsches Feld)

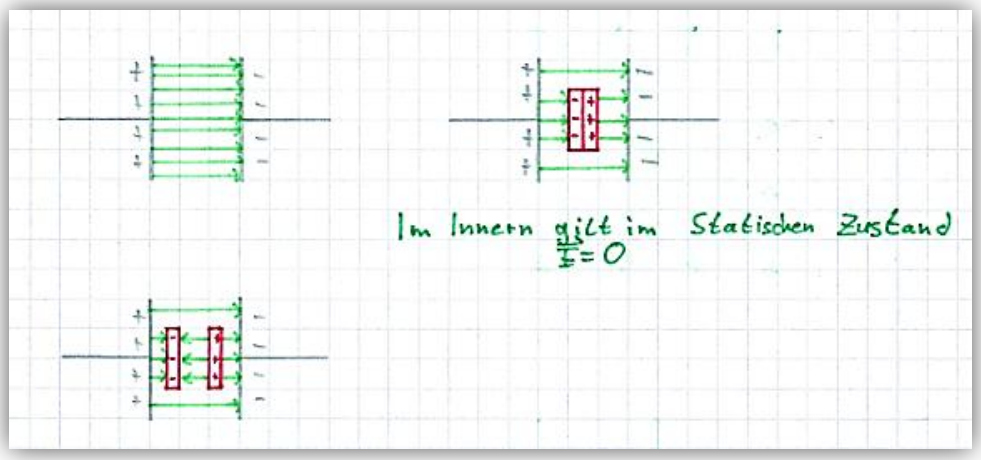
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2}$$

$$\Rightarrow U_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) =: \phi(r_2) - \phi(r_1) \mathrel{\widehat{=}} \text{Potentialdifferenz}$$

$$\vec{E} = -grad(\phi)$$

4.2 DIE VERSCHIEBUNGSDICHTE UND DIE 1. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

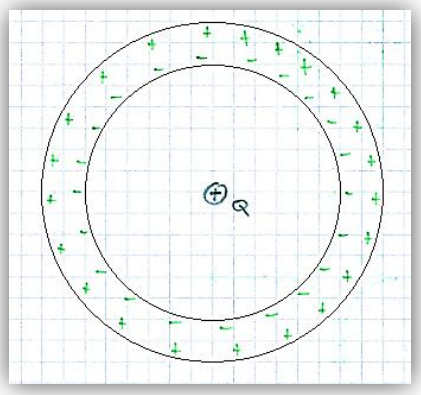
INFLUENZ



Elektrische Verschiebungsdichte D:

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$$

BEISPIEL: (Metallische Hohlkugel)



$$Q = D \cdot A_{Kugeloberfläche} \qquad \Rightarrow [D] = \frac{As}{m^2}$$

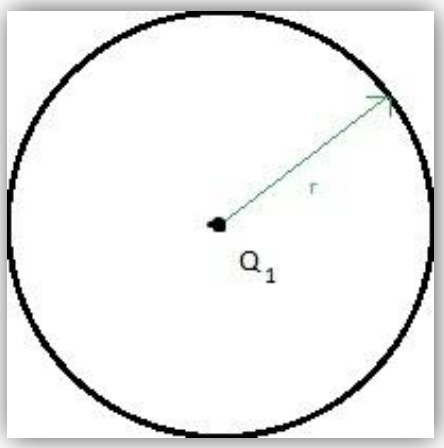
Wir postulieren:

1. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Mit $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ im Vakuum
Und $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$ in vielen Materialien, wobei ϵ_r materialspezifisch ist. $[\epsilon_r] = 1$

BEISPIEL: Feld einer Punktladung im Vakuum



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Isotropie: $\Rightarrow "\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)"$

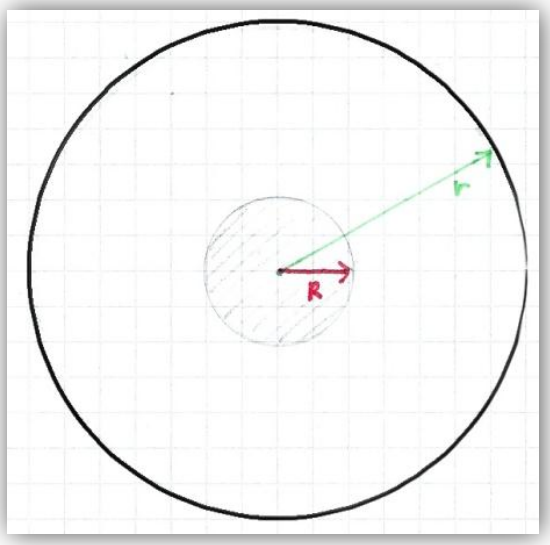
$\Rightarrow$ nur radiale Komponente E

$$\Rightarrow E \cdot A = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

BEISPIEL: (Feld einer homogen geladenen Kugel)



a) Im Außenraum, d.h. r ≫ R*:*

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$= E(r) \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2}$$

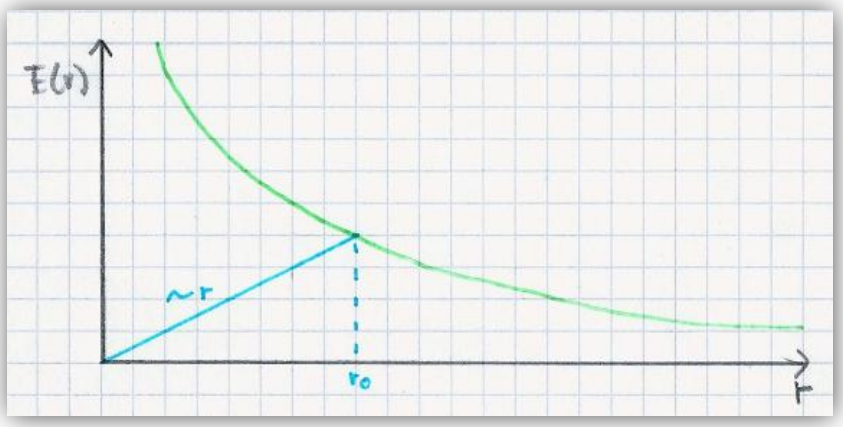
b) im Innenraum, d.h. r < R

$$Q_1 : \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad Q_2 : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \frac{Q_r}{Q_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{r^3}{R^3}$$

1. Maxwellsches Gesetz: $\oint \vec{E} dA = \frac{Q_r}{\epsilon_0}$

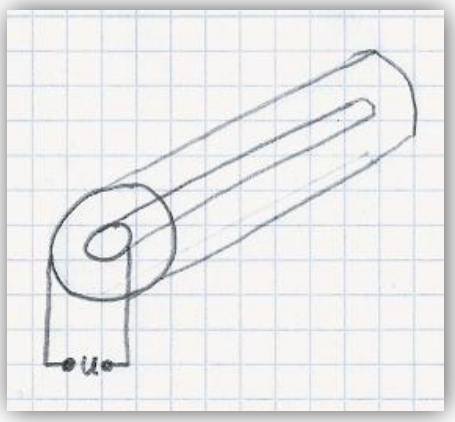
$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$



4.3 DER KONDENSATOR UND SEINE KAPAZITÄT

Wir wollen zwei gegeneinander isolierte, beliebig geformte Leiteroberflächen als KONDENSATOR bezeichnen.

BEISPIEL



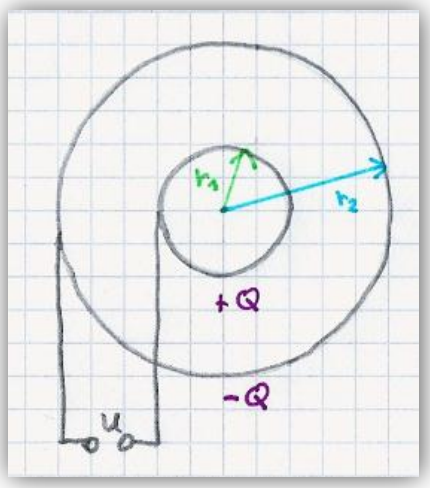
Zwischen den beiden Leitern herrsche eine Potentialdifferenz U.

Wir wollen unter der Kapazität C ein Maß für die Ladung Q pro Spannung U verstehen.

$$C \coloneqq \frac{Q}{U}$$

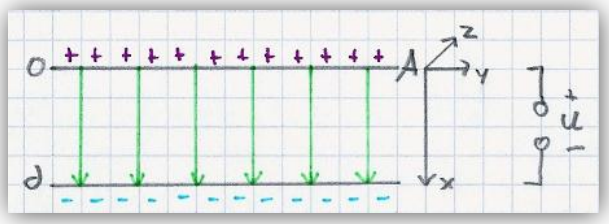
$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = : F\ (Farad)$$

BEISPIEL: Kapazität eines Kugelkondensators



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{r_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$
$$= 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right)$$

BEISPIEL: Kapazität eines Plattenkondensators



Geometrie: $E = const. \neq E(y,z)$

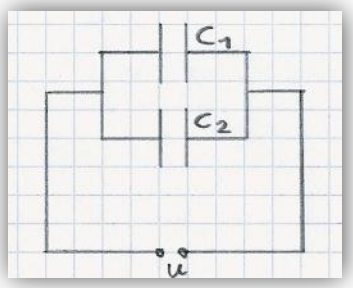
$$U = -\int_d^0 E dx = Ed$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\epsilon_0 E \cdot A}{E \cdot d} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

⇒ benutzen um ϵ_0 experimentell zu bestimmen:

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

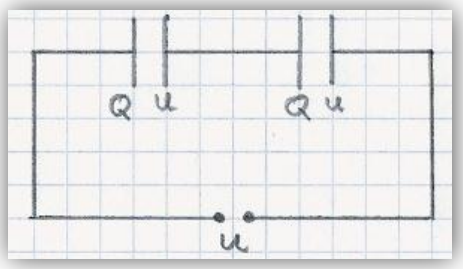
BEISPIEL: (Parallelschaltung von Kondensatoren)



$$C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{C_1 \cdot U + C_2 \cdot U}{U}$$

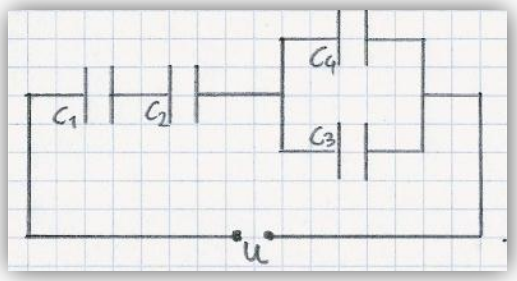
$$\Rightarrow C_{ges} = C_1 + C_2$$

BEISPIEL: (Serienschaltung von Kondensatoren)



$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_{ges}}$$

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



$$U_3 = \frac{(Q_3 + Q_4)}{C_x}, C_x = \frac{Q_3}{U_3} + \frac{Q_4}{U_4} = C_3 + C_4$$

$$U = \frac{Q}{C_{ges}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{(Q_3 + Q_4)}{C_x}$$

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4}$$

$$E = const., F = q \cdot E$$

Also ist auch die Kraft konstant auf ein e^- mit $Q = -e$. Auf dieses wirkt $F = -eE = -e\frac{U}{d}$. Hiermit können wir die Geschwindigkeit v berechnen. Wie folgt daraus I?

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN $v \leftrightarrow I$

Im Zeitintervall dt tritt am Drahtende die Ladung dQ aus:

$$\frac{dQ}{Q_{ges}} = \frac{dv}{v} \text{ (Dreisatz)} \qquad \Rightarrow dQ = \left(\frac{Q_{ges}}{v}\right) dv = \left(\frac{Q_{ges}}{v}\right) \cdot A \cdot dx$$

$$\frac{Q_{ges}}{V} = \rho \text{ (Ladungsdichte)} \Rightarrow \qquad I = \frac{dQ}{dt} = \rho \cdot A \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{I = \rho A v}$$

1. Annahme: Nur elektrostatische Kraft

$$ma = m\dot{v} = F = -eE$$
$$v(t) = -\frac{eE}{m} \cdot t$$
$$\Rightarrow I = I(t) = -\rho A \cdot \frac{e}{m} Et = -\rho A \frac{e}{m}\frac{U}{d} t$$

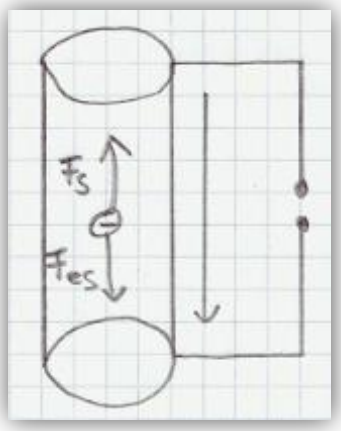
Idee: Stöße im Leiter sind wichtig ⇒ phänomenologisch als Statische Reibung

2. Annahme: Elektrostatische Kraft + Reibung

$$m\dot{v} = F = -eE + \gamma v$$

Statische Lösung:

$$\dot{v} = 0$$
$$v = \frac{eE}{\gamma}$$



$$I = \rho \cdot A \cdot v$$
$$= \rho A \cdot \frac{eE}{\gamma}$$
$$= \frac{\rho A e}{\gamma \alpha} U$$

$$\boxed{I = \frac{U}{R} \; mit \; R = \gamma \cdot \frac{d}{eA\rho}}$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{e\rho} = \frac{1}{\sigma} [\Omega m]$$

4.4 DER ENERGIEGEHALT DES ELEKTRISCHEN FELDES

Für die Energie W haben wir für eine Ladung Q geschrieben:

$$W = U \cdot Q \qquad U = const.$$

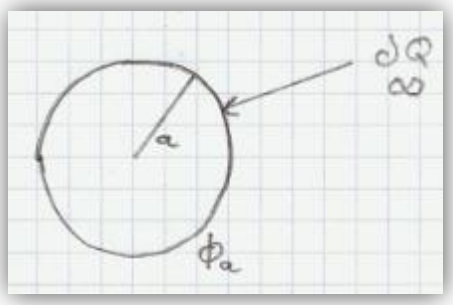
$$dW = -(dQ\phi_\infty - dQ\phi_0)$$

$$dQ \cdot (\phi_\infty - \phi_0) = dQ \cdot U$$

$$dW = dQU(Q)$$

$$W = \int U(Q)dQ$$

BEISPIEL: Kondensator



$$W = \int U(Q)dQ \qquad U = \frac{Q}{C}$$
$$= \int \frac{Q}{C}dQ = \frac{Q^2}{2C} \qquad Q = C \cdot U$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}CU^2$$

BEISPIEL: Plattenkondensator

$$U = E \cdot d \qquad C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot E^2 \cdot d^2 = \frac{1}{2}(A \cdot d) \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot E = \frac{1}{2}V \cdot D \cdot E$$

Oder für die Energiedichte

$$w = \frac{W}{V} \qquad [w] = \frac{J}{m^3}$$

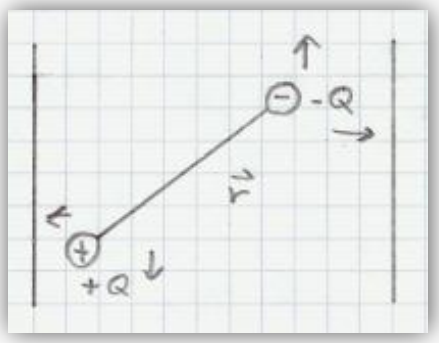
$$w_{el} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$$
$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

4.5 ELEKTRISCHE DIPOLE

Unter einem elektrischen Dipol wollen wir zwei starr miteinander verbundene gegensätzliche Punktladungen verstehen.

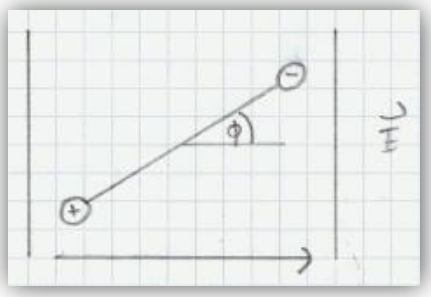
Wir definieren das DIPOLMOMENT

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{r}$$



$$|\vec{r}| = r = const.$$

Wirkt eine Kraft auf den Dipol? ⇒ Nein, da $\overrightarrow{F_{Q^+}} + \overrightarrow{F_{Q^-}} = 0$. Aber es wirkt ein DREHMOMENT:



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times q\vec{E}$$
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$
$$\left|\vec{M}\right| = |\vec{p}|\left|\vec{E}\right| \cdot \sin(\phi)$$

Dipole richten sich unter Einwirkung des elektrischen Feldes aus. Dies ist die Ursache für die Dielektrizitätskonstante ϵ_r in vielen Festkörpern.

5. DAS ZEITLICH KONSTANTE MAGNETISCHE FELD

5.1 DIE 3. & 4. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

Bisher: Kraft $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ also ruhende Ladungen

Bewegte Ladungen (Ströme) ⇒ andere Kraft, da magnetische Felder entstehen.

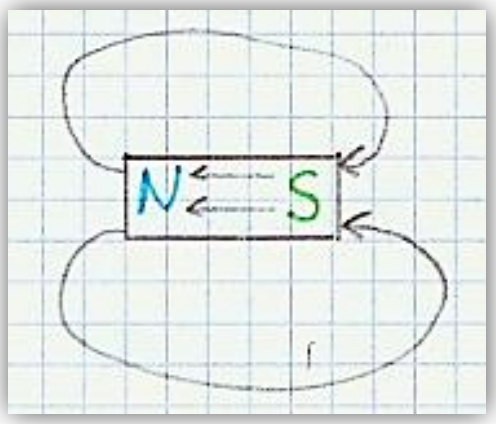
Die relevanten Felder sind $\vec{B}$ und $\vec{H}$.

Für das $\vec{B}$-Feld gibt es eine ganz ähnliche Gleichung wie für das $\vec{D}$-Feld

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

3. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

Berechnung der magnetischen Feldstärke durch das DURCHFLUTUNGSGESETZ



⇒ Es gibt keine magnetischen Monopole!

4. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I$$

I sind dabei die von der Fläche eingeschlossenen Ströme. (Ampèresches Gesetz)

$$[H] = \frac{[I]}{[r]} = \frac{A}{m} \qquad [E] = \frac{V}{m}$$

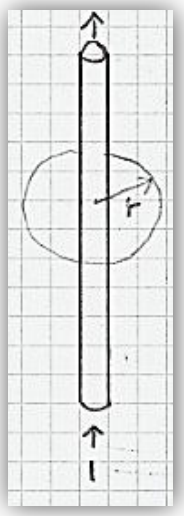
$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ im Vakuum ⇒ $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ in vielen Materialien

$$[\mu_0] = \frac{Vs}{Am} \qquad [B] = [\mu_0][H] = \frac{Vs}{Am}\frac{A}{m} = \frac{Vs}{m^2} \coloneqq T \text{ (Tesla)}$$

$$1Gauss = 10^{-4} T \ (G)$$

μ_0 ist Naturkonstante, ihr Zahlenwert ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

BEISPIEL: Feld eines einzelnen, stromdurchflossenen Leiters



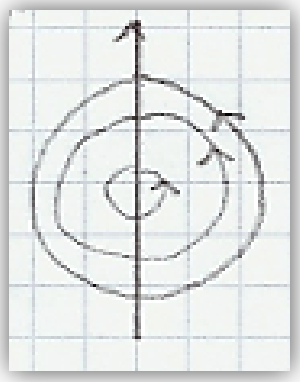
Wähle Kreis als Integrationsweg. Das Problem ist zylindersymmetrisch! ⇒ Keine Winkelabhängigkeit.
$H = H(r)$, also

$$\oint \vec{H}(r)d\vec{r} = I = H(r)\oint d\vec{r} = H(r)2\pi r$$

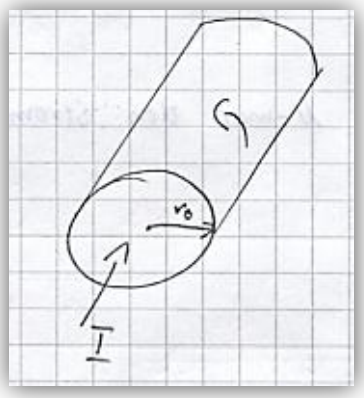
$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}, B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Wieder wollen wir auch das magnetische Feld durch Feldlinien veranschaulichen.

Richtung durch „RECHTE-HAND-REGEL“



MAGNETFELD EINES HOMOGEN DURCHFLOSSENEN LEITERS



IM ÄUßEREN, $r > r_0$

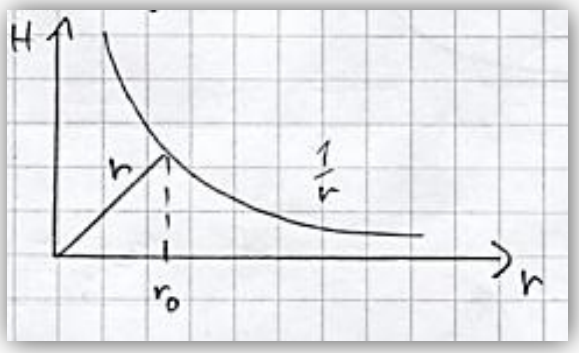
$$\oint H(r)dr = H(r) \cdot 2\pi r = I_0 \Rightarrow H(r) = \frac{I_0}{2\pi r}$$

IM INNEREN, $r \leq r_0$

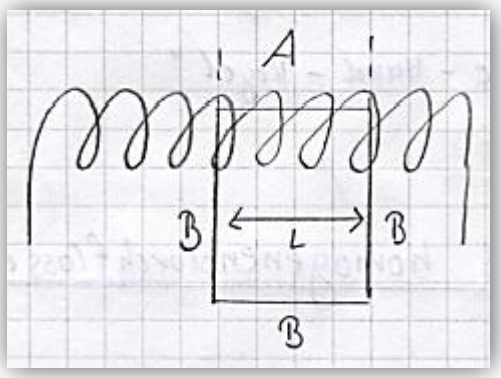
$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} \Rightarrow I_1 = I_0 \cdot \frac{r^2}{r_0^2}$$

$$\oint H(r)dr = H(r) \oint dr = I_0 \cdot \frac{r^2}{r_0^2}$$

$$H(r) = \frac{I_0}{2\pi r_0^2} \cdot r$$



BEISPIEL: Feld einer Zylinderspule mit N Wicklungen pro Länge l



Der Integrationsweg umschließt N-mal den Strom I

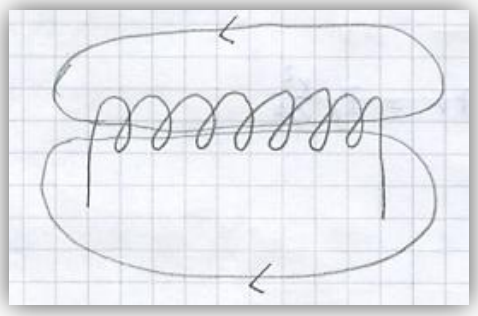
$$\oint \vec{H}d\vec{r} = N \cdot I = \int_A \vec{H}d\vec{r} + \int_B \vec{H}d\vec{r} = N \cdot I$$

Wir betrachten den Grenzfall: Spulenlänge → ∞ ⇒ Feld im Inneren = const. ⇒ Feld im Außenraum = 0

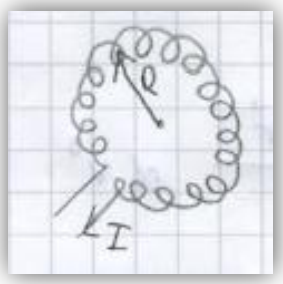
$$\int_A \vec{H}d\vec{r} + \int_B \vec{H}d\vec{r} = NI \qquad Hl = NI$$

$$\Rightarrow H = \frac{NI}{l}$$

FELDLINIEN



BEISPIEL: Magnetische Feldstärke einer Ringspule



Wähle Kreis durch Spulenmitte als Integrationsweg. Eingeschlossener Strom: NI, N Wicklungen

Symmetrie: $H \neq H(l)$

$$\oint_l \vec{H}(r)d\vec{r} = H \cdot 2\pi r = NI$$

$$\Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi r}$$

≙ Gekrümmte Spule mit Länge $l = 2\pi r$

Zusammenfassung:

$$\oint_A \vec{D}d\vec{A} = Q \qquad \oint_A \vec{B}d\vec{A} = 0 \qquad \oint_l \vec{E}d\vec{s} = 0 \qquad \oint_l \vec{H}d\vec{s} = I$$

DAS GESETZ VON BIOT-SAVART

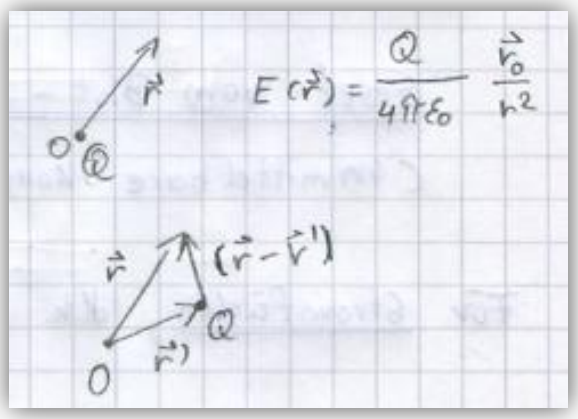
Gewünscht: Explizite Vorschrift zur Berechnung von $\vec{B}(\vec{r})$

Analogie zum elektrischen Feld:

Eine Punktladung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \overrightarrow{r'}}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3}$$

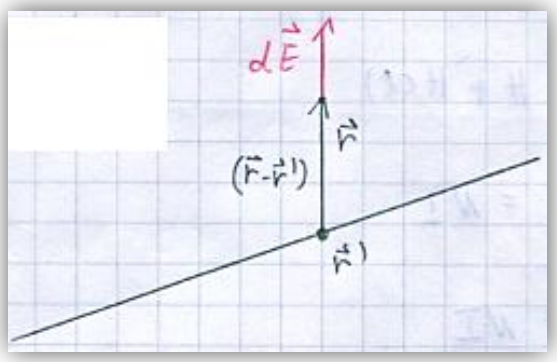


Viele Punktladungen an $\overrightarrow{r_i}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i Q_i \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3} \qquad \rho = \frac{Q}{V} = \text{Ladungsdichte}$$

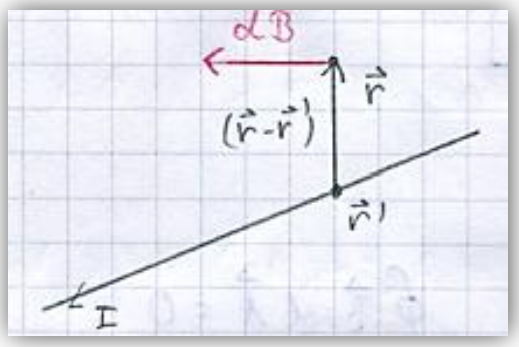
$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\overrightarrow{r'})(\vec{r} - \overrightarrow{r'})}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3} dV'$$

BEISPIEL: Geladener Draht



$$d\vec{E} \sim \rho(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'})$$

Analogie zum stromdurchflossenen Draht



$$d\vec{B} \sim j(\vec{r'}) \times (\vec{r} - \vec{r'})$$

Wir wissen: $I = \rho AV$

$$j \coloneqq \frac{I}{A} = \rho \cdot V \qquad Stromdichte$$

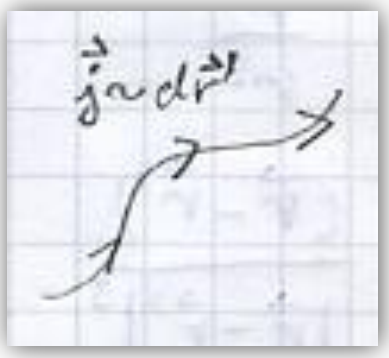
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j(\vec{r'}) \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} dV'$$

Das Gesetz von Biot-Savart ist die unmittelbare Konsequenz aus der 3. Und 4. Maxwellschen Gleichung.

Für STROMFÄDEN, d.h. sehr dünne Drähte, gilt:

$$j(\vec{r'})dV = j(\vec{r'})Ad\vec{r'} = Id\vec{r'}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{(\vec{r} - \vec{r'}) \times d\vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$



BEISPIEL: Feld eines langen dünnen Leiters

Parametrisierung des Integrationsweges:

$$\overrightarrow{r'}(t) = (0,0,t)$$

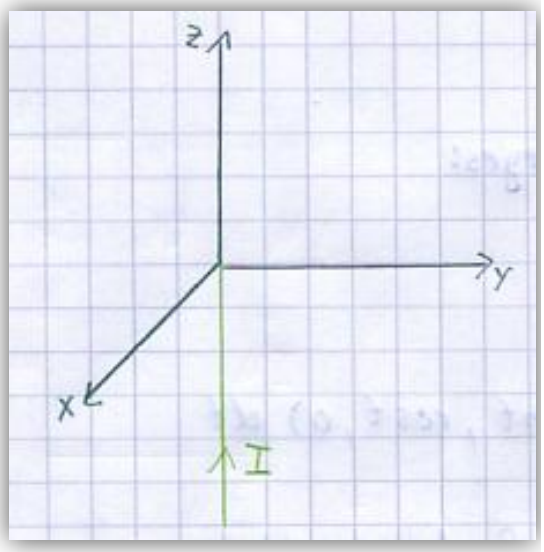
$$d\overrightarrow{r'} = \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}dt = (0,0,1)dt$$

$$\text{mit } \left(\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right) \times d\overrightarrow{r'}, \quad \vec{r}(x,y,z)$$

$$(x,y,z-t) \times (0,0,1)dt = (y,-x,0)dt$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}(y,-x,0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{x^2+y^2+(z-t)^2}^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I(y,-x,0) \cdot \frac{2}{x^2+y^2}$$



BEISPIEL: Feld einer Leiterschleife

Parametrisierung des Integrationsweges:

$$\overrightarrow{r'}(t) = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t), 0)$$

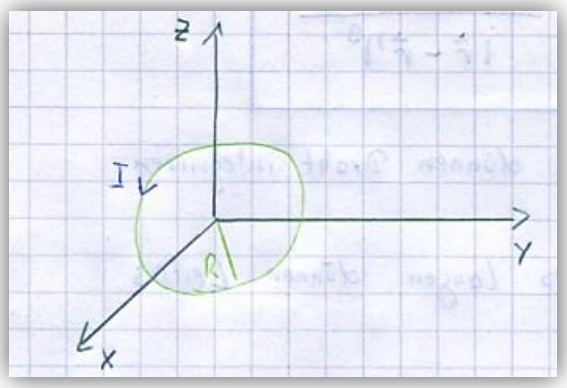
$$\Rightarrow d\overrightarrow{r'} = \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}dt = R(-\sin(t), \cos(t), 0)$$

Betrachte Spezialfall:

Feld auf Achse, d.h.

$$x = y = 0 \Rightarrow \vec{r} = (0,0,z)$$

Mit $\left(\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right) \times d\overrightarrow{r'}$



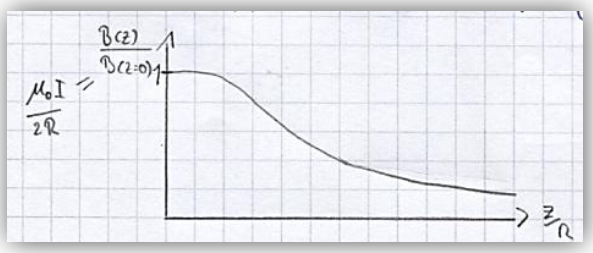
$$(-R \cdot \cos(t), -R \cdot \sin(t), z) \times (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t), 0)dt$$

$$= (-zR \cdot \cos(t), -zR \cdot \sin(t), -R^2\cos^2(t) - R^2\sin^2(t)\,dt$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(zR \cdot \cos(t), zR \cdot \sin(t), R^2)}{\sqrt{R^2+z^2}^3} dt$$

$$B_x, B_y = 0 \quad B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^3} \int_0^{2\pi} dt$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^3} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}}$$



5.2 DAS LORENTZSCHE KRAFTGESETZ

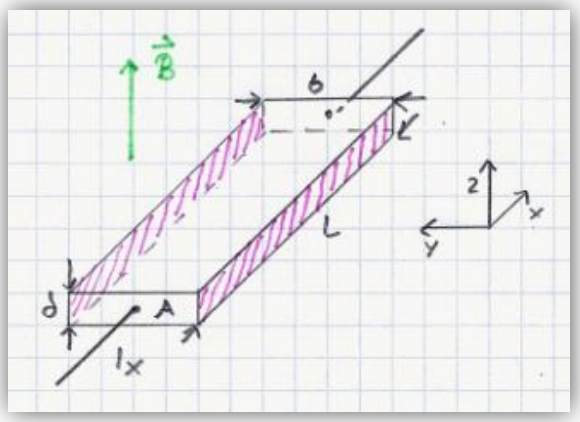
Welche Kraft wirkt auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld?

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

→ Kraft steht senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{B}$

5.2.1 DER HALL-EFFEKT

⇒ Messung von Magnetfeldern



Querschnittsfläche $A = b \cdot d$

Kraft auf Ladungsträger $\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

$$F_y = Q(v_z \cdot B_x - v_x \cdot B_z) = Q(0 - v_x \cdot B_z)$$

Mit $I_x = \rho \cdot A \cdot v_x$:

$$F_y = -Q \cdot \frac{I_x}{\rho A} \cdot B_z$$

- Ladungen sammeln sich an pinken Flächen an
- abstoßende Kraft durch elektrisches Feld

GLEICHGEWICHT:

$$\vec{F} = 0 = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow F_y = 0 = Q \cdot E_y - Q \cdot \frac{I_x}{\rho A} \cdot B_z = E_y - \frac{I_x}{\rho A} \cdot B_z \qquad E_y = \frac{U_H}{b} \text{ (Plattenkondensator)}$$

$$\Rightarrow U_H = b \cdot \frac{I_x}{\rho A} \cdot B_z$$

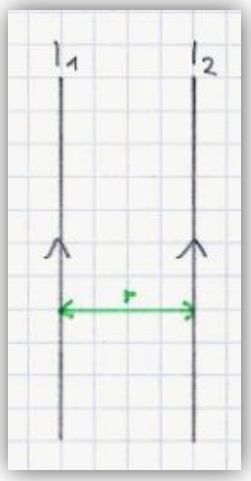
$$\Rightarrow U_H = \frac{I_x}{d} \cdot B_z \cdot A_H$$

Mit dem Hall-Koeffizienten $A_H := \frac{1}{\rho}$, der positiv oder negativ sein kann.

⇒ experimentelle Bestimmung, welche Ladungsträger zum Strom beitragen.

- Große Hall-Spannung falls d klein.
- Große Hall-Spannung falls ρ klein, aber bei zur kleinen ρ führen zu sehr großen angelegten Spannungen, um I_x herbeizuführen. ⇒ Umsetzung meistens mit HALBLEITERN.

5.2.2 KRAFT ZWISCHEN ZWEI LEITERN



B-Feld von Draht #2

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}; \qquad \vec{v} \perp \vec{B}$$

$$(I = \rho \cdot A \cdot v)$$

$$F_1 = Q \cdot v \cdot B = Q \cdot \frac{I_1}{\rho A} \cdot B$$

Mit $\rho = \frac{Q}{V}$:

$$\Rightarrow F_1 = Q \cdot \frac{V}{Q \cdot A} \cdot I_1 \cdot B = L \cdot I_1 \cdot B \qquad V = A \cdot L$$

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow F_1 = \mu_0 \cdot L \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi r}$$

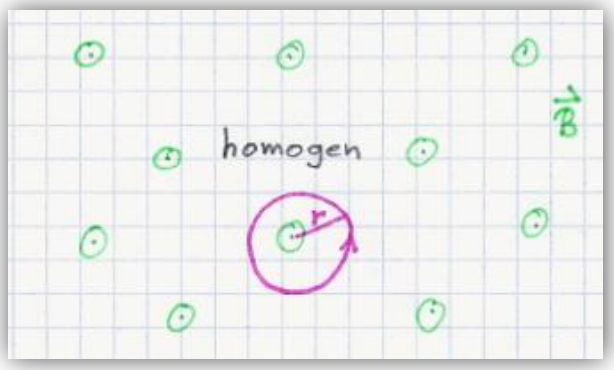
ZAHLENBEISPIEL:

$$r = 1m \qquad I_1 = I_2 = 1A$$

$$\frac{F}{L} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m} = \frac{1}{5000000} \frac{N}{m}$$

⇒ Definition des Amperes!

5.2.3 BEWEGUNG GELADENER TEILCHEN IM MAGNETFELD



$$\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \perp \vec{v}$$

⇒ Kreisbewegung

STABILITÄT:

$$Lorentzkraft \; = \; Zentrifugalkraft$$

$$Q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{r}$$

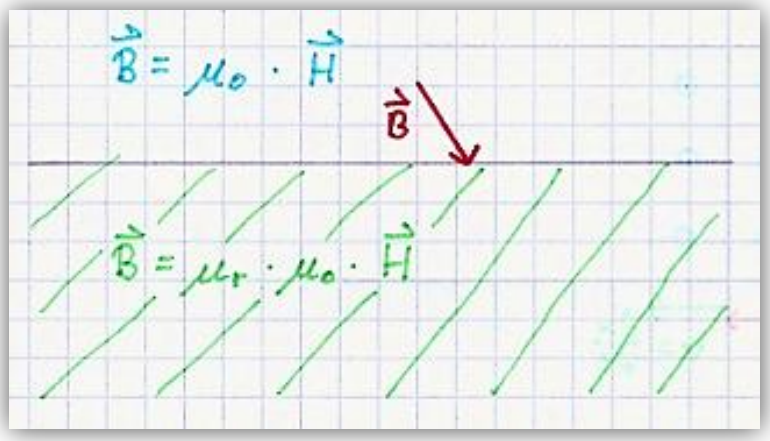
$$\Rightarrow v = \frac{Q \cdot B}{m} \cdot r$$
$$= \omega \cdot r$$

$$\omega_C = \frac{Q \cdot B}{m} = Zyclotronfrequenz$$

$$\Rightarrow r = v \cdot \frac{m}{(Q \cdot B)}$$

$\Rightarrow r$ steigt mit steigender Geschwindigkeit v

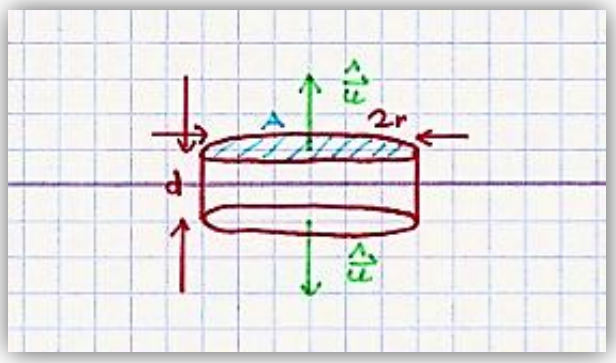
ZYKLOTRON-BESCHLEUNIGER:



μ_r ist die relative magnetische Permeabilität, $[\mu_r] = 1$

z.B. Eisenblech: $\mu_r = 100 \ldots 1000$

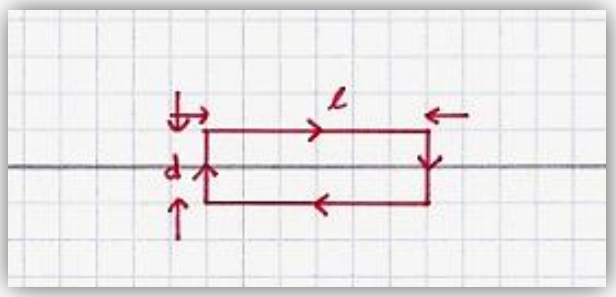
1) ZEIGE $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow$ NORMALKOMPONENTE VON $\vec{B}$ IST STETIG.



$$d \to 0 \qquad 2r \to 0$$
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_n \cdot A - B_n' \cdot A = B_n - B_n'$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow B_n = B_n'$$

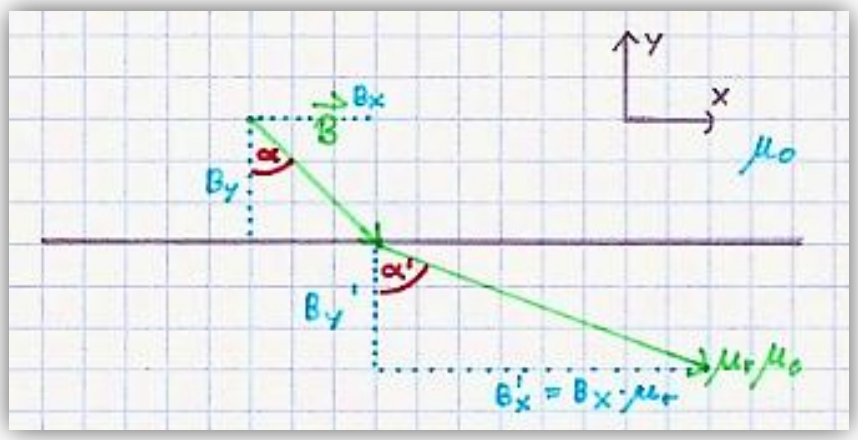
$\Rightarrow$ Normalkomponente von $\vec{B}$ ist stetig.

2) ZEIGE $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow$ TANGENTIALKOMPONENTE VON $\vec{H}$ IST STETIG.



$$d \to 0 \qquad l \to 0$$
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = H_t \cdot l - H_t' \cdot l = H_t - H_t' = 0$$
$$\Rightarrow H_t = H_t'$$

$\Rightarrow$ Tangentialkomponente des $\vec{H}$-Feldes ist stetig.



$$B_y = B_y'$$

$$H_x = H_x' \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \cdot B_x = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot B_x' \Rightarrow B_x = \frac{1}{\mu_r} \cdot B_x'$$

$$\Rightarrow B_x' = B_x \cdot \mu_r$$

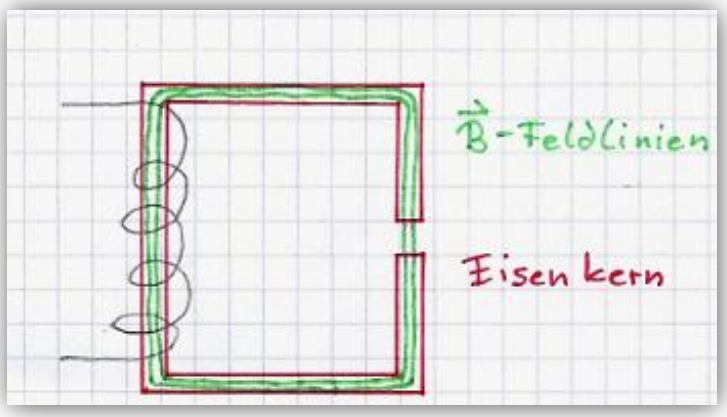
$$\tan \alpha = \frac{B_x}{B_y} \qquad \tan \alpha' = \frac{B_x'}{B_y'} = \frac{B_x}{B_y} \cdot \mu_r = \tan \alpha \cdot \mu_r$$

$$\Rightarrow \tan \alpha' / \tan \alpha = \mu_r$$

ZAHLENBEISPIEL:

$$\alpha = 1°, \mu_r = 100 \Rightarrow \alpha' = 60°$$

ANWENDUNG: „Führen“ von Magnetfeldlinien



6. ZEITLICH VERÄNDERLICHE ELEKTROMAGNETISCHE FELDER

6.1 DAS INDUKTIONSGESETZ

Bisher: Statik

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad [1.\,Maxwellsche\ Gleichung]$$

Und wegen der Wegunabhängigkeit der Arbeit

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad [2.\,Maxwellsche\ Gleichung\ in\ der\ Statik]$$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$ ist die Spannung einer (fast) geschlossenen Leiterschleife.

⇒ Experimente

⇒ Zeitlich variierende Magnetfelder rufen eine Induktionsspannung hervor

$$\oint_{Rand(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad [2.\,Maxwellsche\ Gleichung]$$

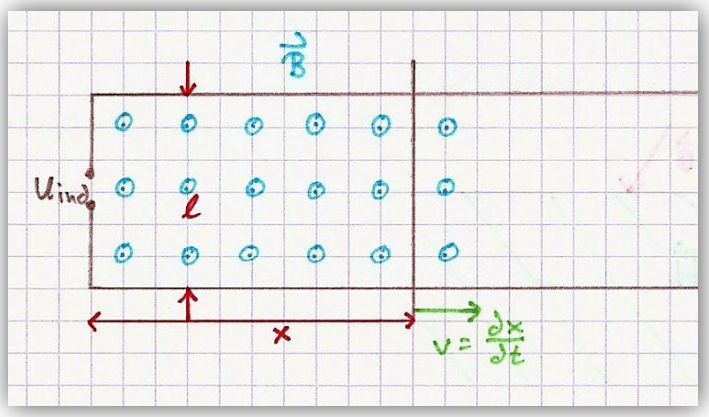
A ist keine topologisch geschlossene Fläche!

Magnetischer Fluss:

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} =: \Phi \mathrel{\widehat{=}}\ magnetischer\ Fluss$$

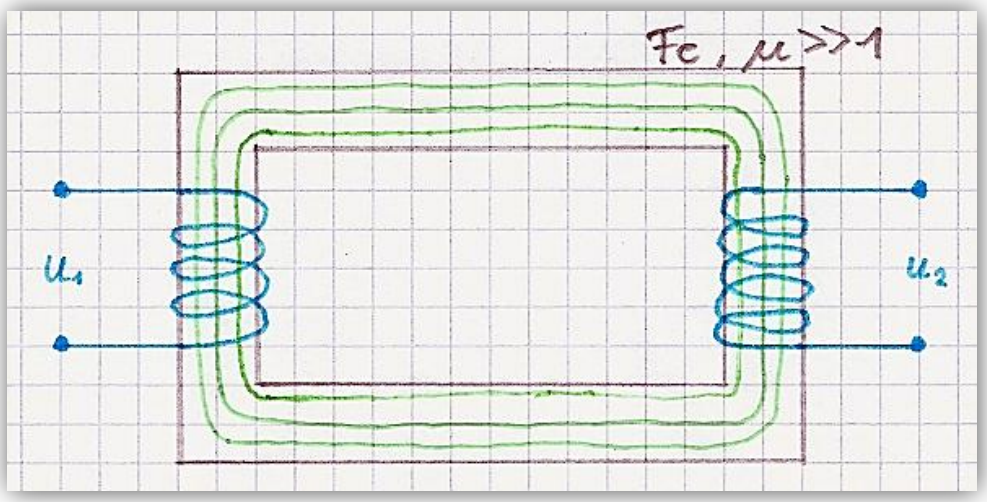
⇒ $U_{ind} = -\dot{\Phi}$ Induktionsgesetz

BEISPIEL:



$$\begin{aligned} U_{ind} = -\Phi &= -\frac{\partial}{\partial t}(B \cdot A) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(B \cdot l \cdot x) \\ &= -B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= -B \cdot l \cdot v \end{aligned}$$

BEISPIEL: Transformator



Φ_0 ist der magnetische Fluss für eine Windung.

INDUKTIONSGESETZ (LENZSCHE REGEL)

$$U_1 = -N_1 \cdot \dot{\Phi}_0$$

$$U_2 = -N_2 \cdot \dot{\Phi}_0$$

$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

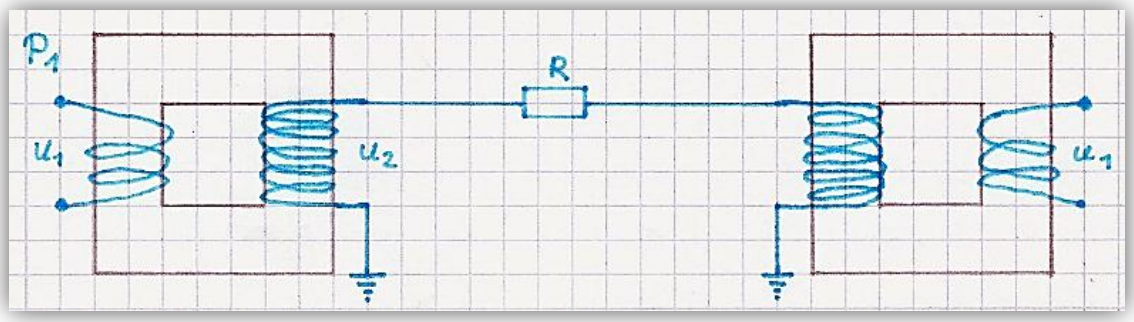
IDEALER TRANSFORMATOR: $P_1 = P_2$

$$= U_1 I_1 = U_2 I_2$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

BEISPIEL: Hochspannungsleitungen



Zahlenbeispiel

$$R = 0{,}1\Omega \qquad U_1 = 220V$$

$$P_1 = P_2 = 200kW$$

$$U_2 = 220V \Rightarrow I_2 = 909A$$

$\Rightarrow$ Verlustleistung über Widerstand: $P_R = R \cdot I_2^2 = 82{,}6kW$

d.h. 41% Verlust.

$$U_2 = 10kV \Rightarrow I_2 = 20A$$

$P_R = R \cdot I_2^2 = 40W$ d.h. nur $0{,}02\%$ Verlust.

DER BEGRIFF DER INDUKTIVITÄT

ZYLINDERFÖRMIGE SPULE:

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}$$

Zeitliche Änderung des Stroms I

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt}\left(A \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}\right) \cdot N = -\left(\mu_0 \cdot \frac{AN^2}{l}\right) \cdot \dot{I}$$

INDUKTIVITÄT

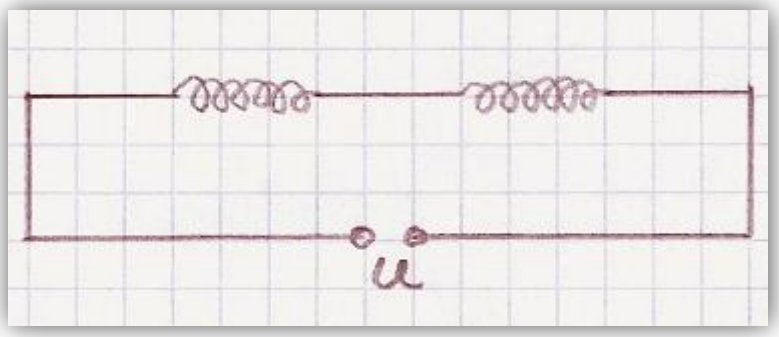
$$L := \mu_0 \cdot \frac{AN^2}{l}$$

$$[L] = \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{m^2}{m} = \frac{Vs}{A} =: H \text{ (Henry)}$$

Änderung eines Stroms um $1A$ pro $1s$ in einer Spule mit einer Induktivität von $1H$ ruft eine Induktionsspannung von $1V$ hervor.

$$U = -L \cdot \dot{I} \qquad \textit{Lenzsche Regel}$$

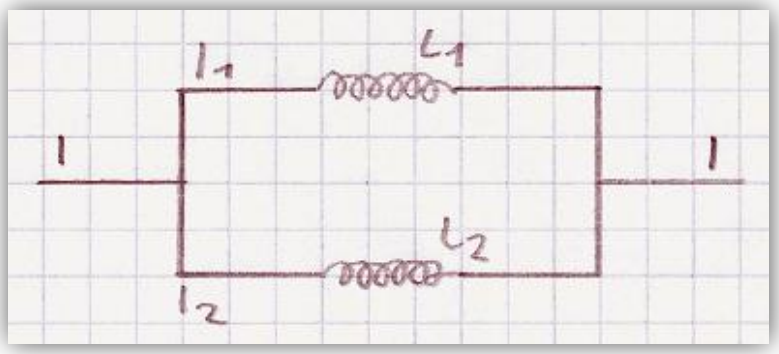
SERIENSCHALTUNG



$$U = U_1 + U_2$$
$$= -L_1 \cdot \dot{I} - L_2 \cdot \dot{I}$$
$$= -(L_1 + L_2) \cdot \dot{I}$$

$$\Rightarrow L_{ges} = L_1 + L_2$$

PARALLELSCHALTUNG



$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -\frac{U}{L_1} - \frac{U}{L_2} =: -\frac{U}{L_{ges}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

ENERGIEINHALT DES MAGNETISCHEN FELDES

Am Beispiel der Zylinderspule

$$P = U \cdot I$$

$$W = \int P \cdot dt = \int U \cdot I \cdot dt = \int (-L\dot{I}) \cdot I \cdot dt = -\int L \cdot \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt = -\frac{1}{2} L I^2$$

$$|W| = \frac{1}{2} L I^2 \quad magnetische\ Energie$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad \text{elektrische Energie}$$

Zylinderspule:

$$L = \mu_0 \cdot \frac{A N^2}{l} \qquad H = I \cdot \frac{N}{l} \Rightarrow I = \frac{lH}{N}$$

$$|W| = \frac{1}{2}\left(\mu_0 \cdot \frac{A N^2}{l}\right) \cdot \frac{l^2 H^2}{N^2} = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot V$$

Wieder definieren wir die Energiedichte:

$$w_{mag} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

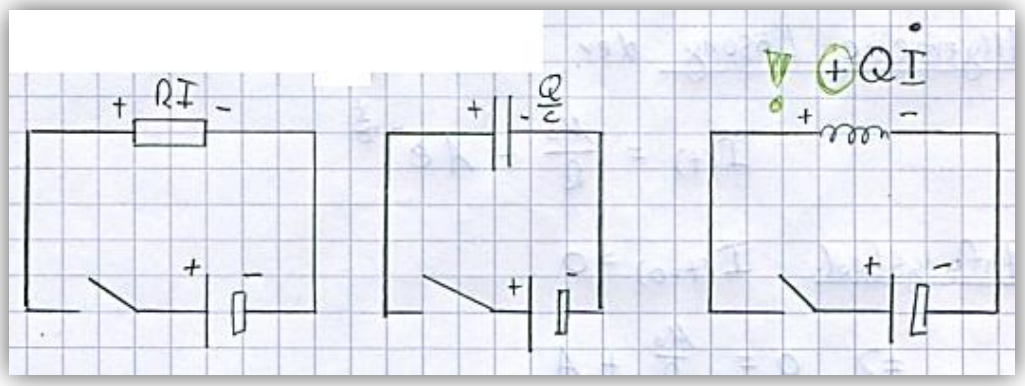
$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

$$w = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

6.2 ELEKTRISCHE SCHALTKREISE

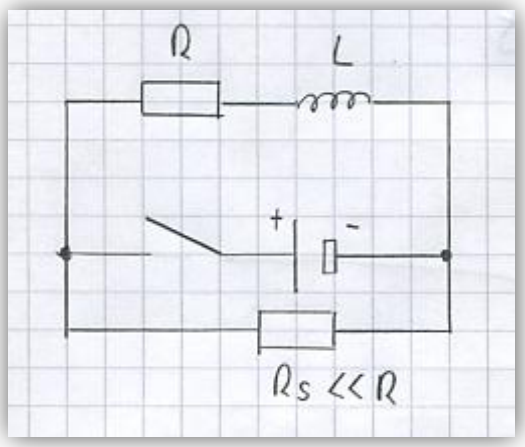
Beim Zusammenschalten von Ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten gelten weiterhin die Kirchhoffschen Regeln.

Vorzeichen der Spannungsabfälle?



⇒ alle drei positiv!

6.2.1 EIN- UND AUSSCHALTVORGÄNGE



$$U_0 = R \cdot I + L \cdot \dot{I} \quad \text{(Maschenregel)}$$

≙ lineare, inhomogene DGL für $I(t)$

HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG:

$$R \cdot I + L \cdot \dot{I} = 0$$

Ansatz:

$$I = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \dot{I} = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow A \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - A \cdot L \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R}$$

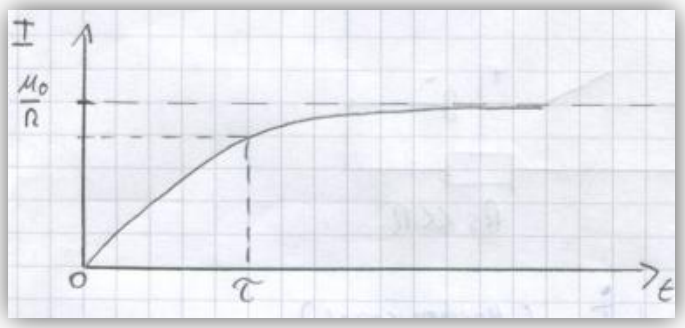
INHOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG, SPEZIELLE LÖSUNG

$$U_0 = R \cdot I + L \cdot \dot{I} \qquad \Rightarrow I = \frac{U_0}{R} = const.$$

ALLGEMEINE LÖSUNG DER INHOMOGENEN DGL

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

EINSCHALTVORGANG

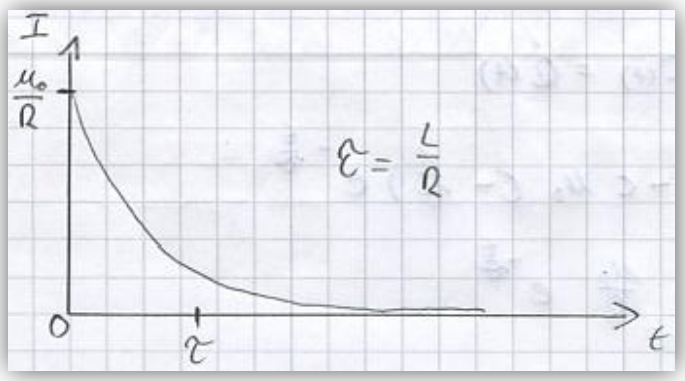


Anfangsbedingung $I(t=0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{U_0}{R} + A \qquad \Rightarrow A = -\frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{\tau}{t}}\right) \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

AUSSCHALTVORGANG

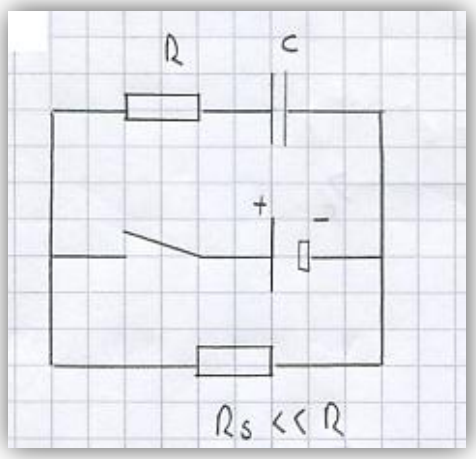


$$U_0 = 0, I(t=0) = \frac{U_0}{R}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow I(t=0) = \frac{U_0}{R}$$

BEISPIEL



$$U_0 = R \cdot I + \frac{Q}{C}; \qquad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$U_0 = R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Ansatz

$$Q(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

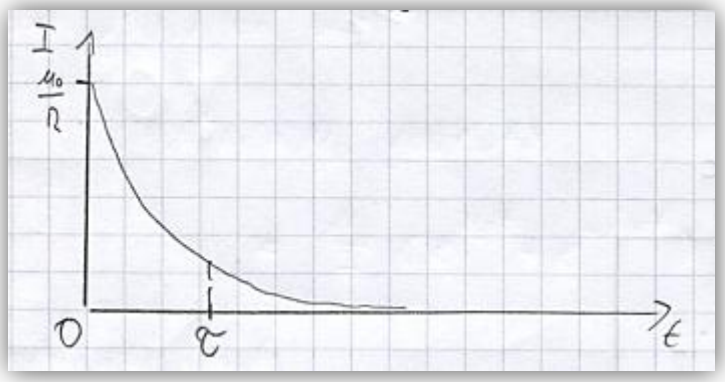
$$\Rightarrow RA \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{C} \cdot A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = R \cdot C$$

SPEZIELLE LÖSUNG DER INHOMOGENEN DGL

$$U_0 = R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \qquad \Rightarrow Q = C \cdot U_0 = const.$$

ALLGEMEINE LÖSUNG (EINSCHALTVORGANG)

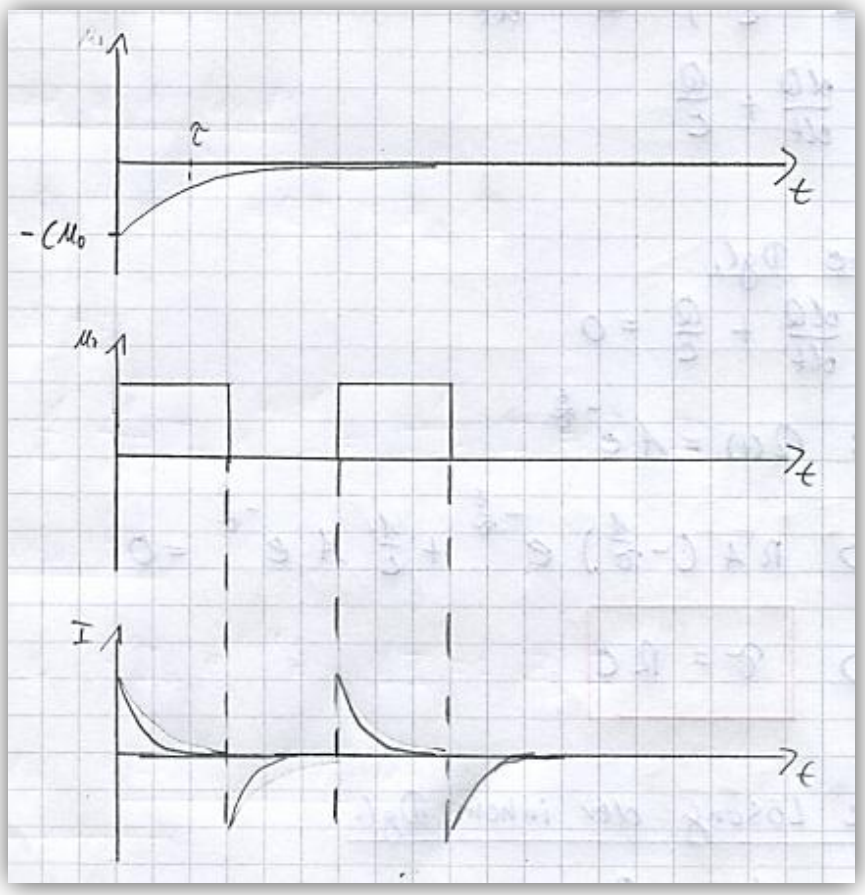


$$Q(t) = C \cdot U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Und damit $I(t) = \dot{Q}(t)$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{CU_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

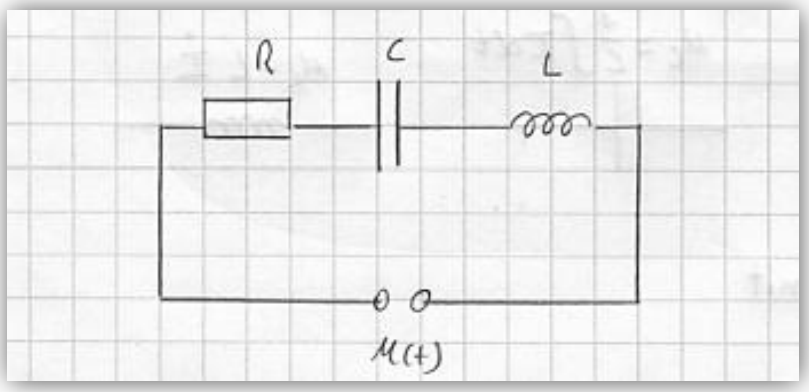
AUSSCHALTEN



$$Q(t) = C \cdot U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow I = \dot{Q}$$

$$= -\frac{1}{\tau} C \cdot U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$R \cdot I + \frac{Q}{C} + L \cdot \dot{I} = U(t) = U_0 \cos(\Omega \cdot t)$$

HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNG

Differenzieren :

$$\Rightarrow R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} + L \cdot \ddot{I} = 0$$

$$\Rightarrow L \cdot \ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} \cdot I = 0$$

(Mechanik: $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = 0$)

Zunächst: $R = 0$

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0$$

Ansatz:

$$I(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow -A\omega^2 \cos(\omega t) + \frac{1}{LC} \cdot A \cdot \cos(\omega t) = 0$$

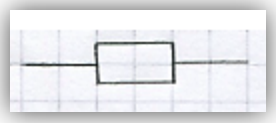
$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Eigenfrequenz ohne Dämpfung

Mit Dämpfung: aperiodischer Grenzfall, Kriechfall

6.2.3 WECHSELSTROMSCHALTKREISE UND –WIDERSTÄNDE

$$U_R = R \cdot I \qquad U_C = \frac{1}{C} \cdot \int I \cdot dt \qquad U_L = L \cdot \dot{I}$$



Spannungsquellen mit

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$= \frac{U_0}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

Beschränkung auf $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$

ANSATZ

$$I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$$

OHMSCHER WIDERSTAND:

$$U_R = R \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t} = R \cdot I = Z_R \cdot I$$

KAPAZITÄT:

$$U_C = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{i\omega} I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I = Z_C I$$

INDUKTIVITÄT

$$U_L = Li\omega \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I = Z_L \cdot I$$

Mit den Scheinwiderständen

$$Z_R = R \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad Z_L = i\omega L$$

Bei Parallel- oder Serienschaltungen ergibt sich ein Gesamtscheinwiderstand

$$Z_{ges} = Re\left(Z_{ges}\right) + i \cdot Im(Z_{ges})$$

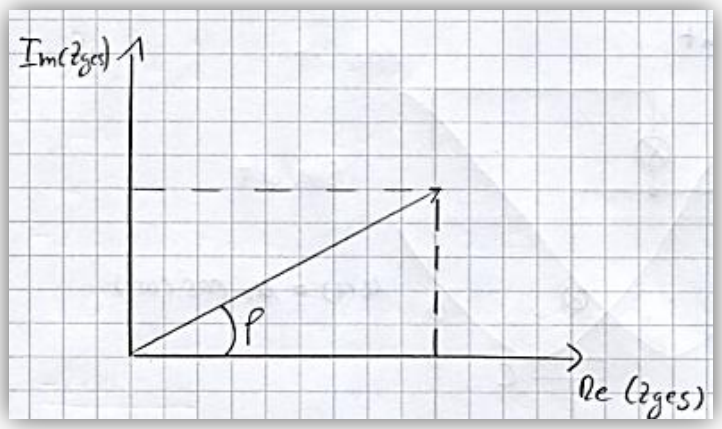
$Re\left(Z_{ges}\right)$ ist der Wirkwiderstand, führt zu einer Spannung, die in Phase mit I ist.

$Im(Z_{ges})$ ist der Blindwiderstand

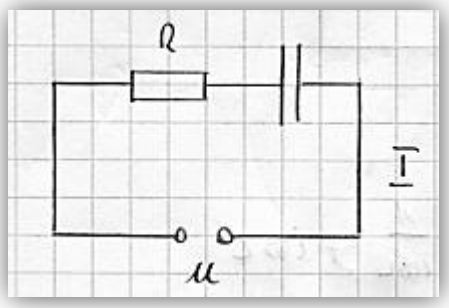
Dies können wir auch zerlegen in Betrag und Phase

$$U = Z_{ges} \cdot I \qquad |U| = |Z_{ges}||I|$$

$$\tan\phi = \frac{Im(Z_{ges})}{Re(Z_{ges})}$$



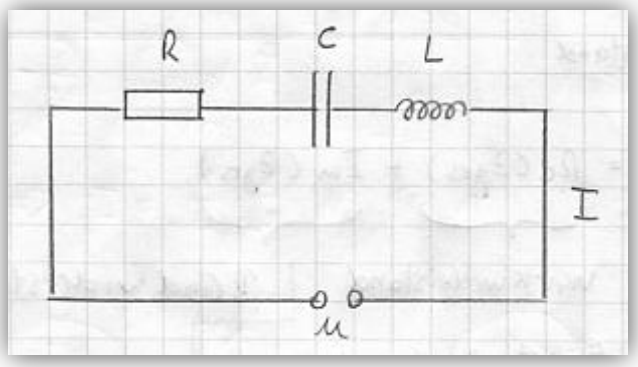
BEISPIEL



$$Z_{ges} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i \cdot \frac{1}{\omega C}$$

$$\tan\phi = -\frac{1}{\omega RC}$$

BEISPIEL



$$Z_{ges} = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$

$$= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

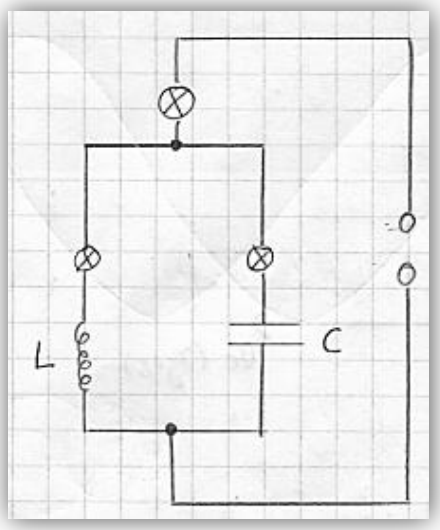
$$\approx 0$$

$= 0$ bei $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Resonanzfrequenz

BEISPIEL ⇒ Experiment



$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Parallelschaltung

$$\frac{1}{Z_{ges}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

$|Z_{ges}| \to \infty$ für $\omega C - \frac{1}{\omega L} \to 0 \Leftrightarrow \omega \to \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Eigenfrequenz $\Leftrightarrow \phi \to 90°$

LEISTUNGSABFALL AN EINEM OHMSCHEN WIDERSTAND

$$U = U_0 \cos(\omega t) \qquad I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R} U_0 \cos(\omega t)$$

Damit wird die Leistung P

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \frac{1}{R} U_0^2 \cos^2(\omega t)$$

Und somit die mittlere Leistung $< P >$

$$< P > := \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

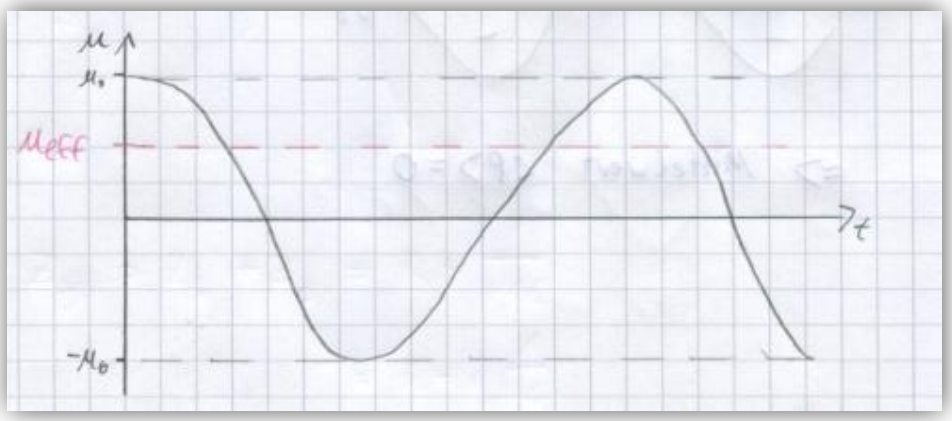
$$< P \geq \frac{1}{R} U_0^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2R} U_0^2 =: \frac{U_{eff}^2}{R}$$

Mit der Effektivspannung

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

BEISPIEL:

„$230V$“ Steckdose, d.h. $U_{eff} = 230V \Rightarrow U_0 = 230V \cdot \sqrt{2} = 325V$



LEISTUNGSABFALL AN EINER INDUKTIVITÄT

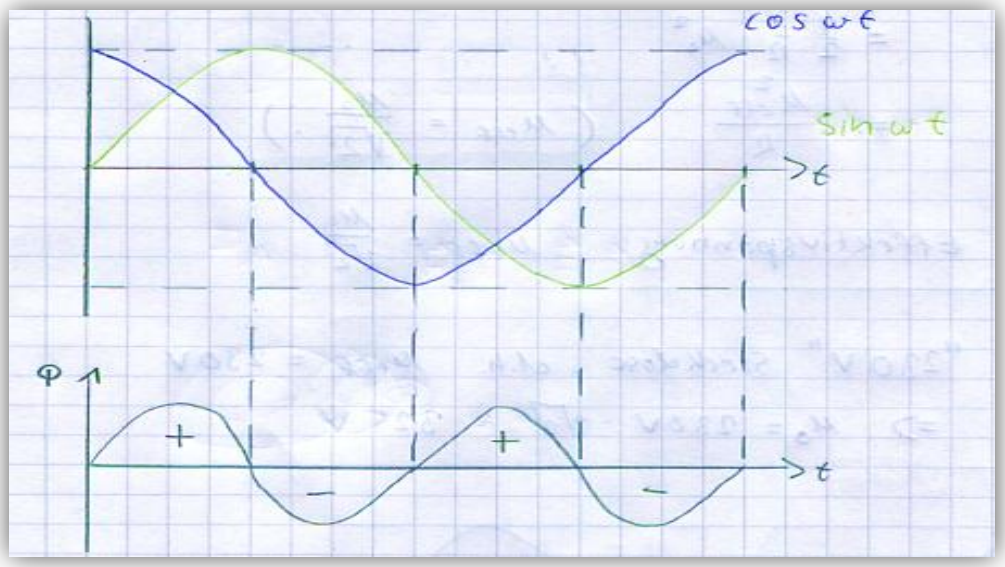
$$U = U_0 \cdot \cos(\omega t) = L\dot{I} \qquad \Rightarrow I = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\omega} U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Damit wird die Leistung

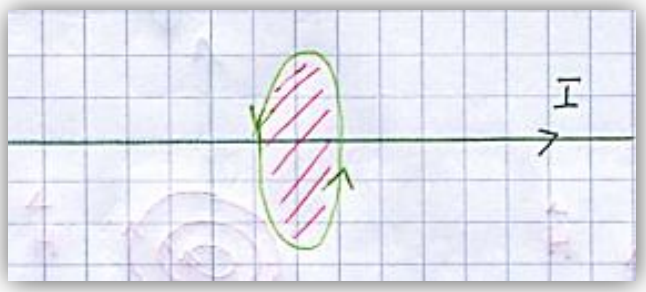
$$P(t) = \frac{1}{L\omega} U_0^2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t)$$

Und somit die mittlere Leistung

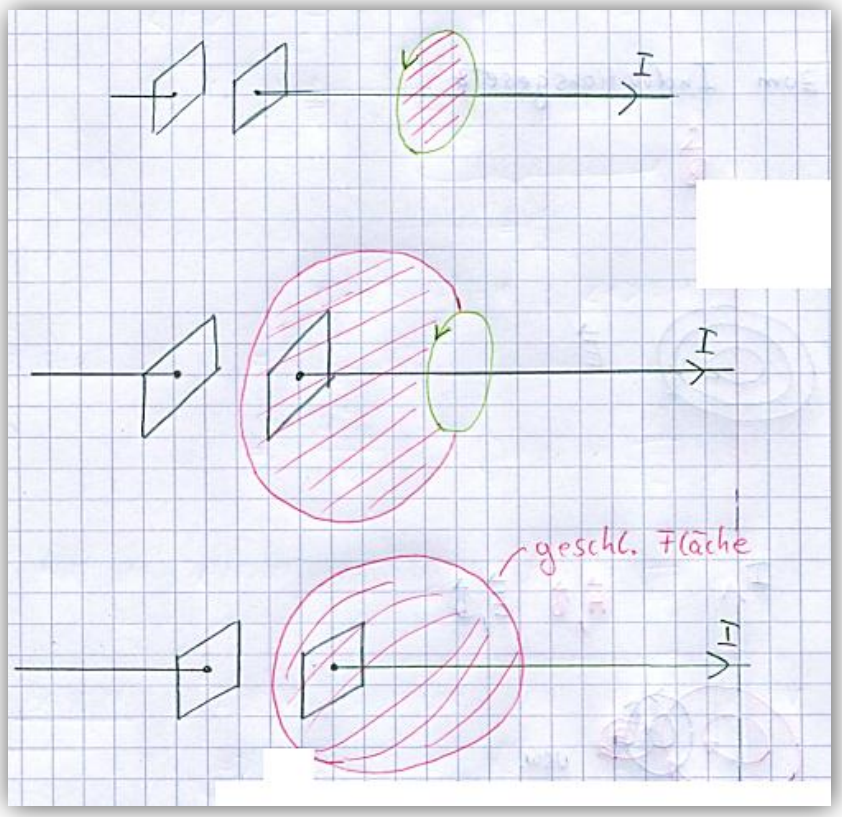
$$< P > = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{L\omega} U_0^2 \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t)\, dt = 0$$



⇒ Mittelwert $< P > = 0$



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I + I_v$$

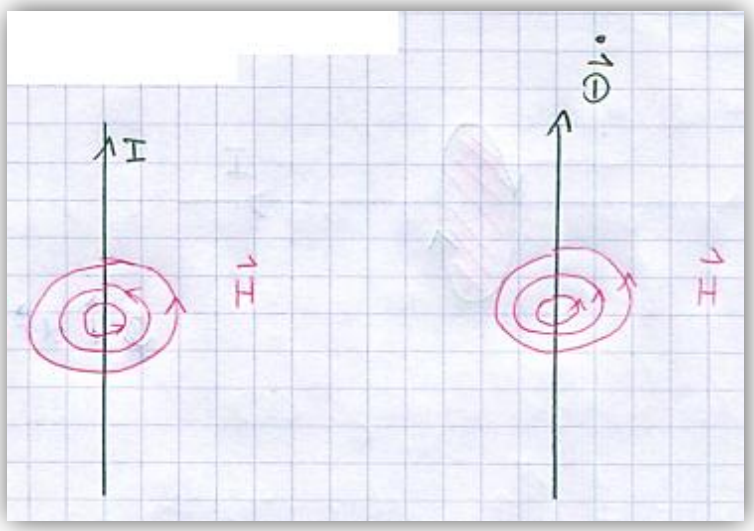
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

(1. Maxwellsche Gleichung)

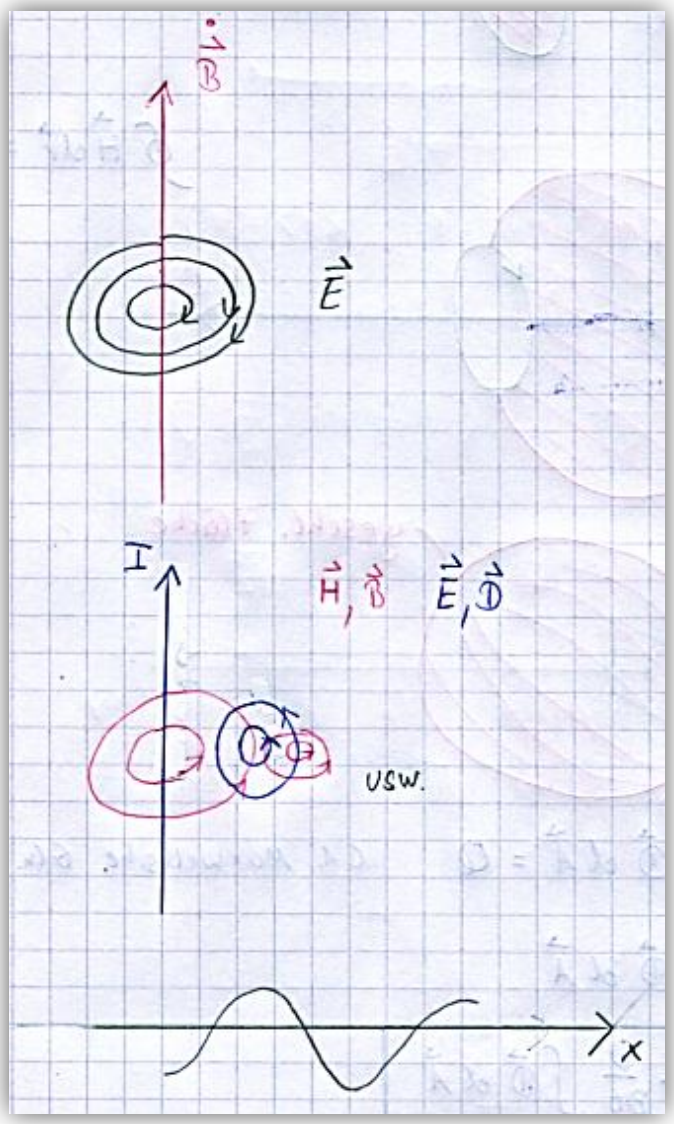
$$I_v = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot d\vec{A} = I + I_v$$

Analog: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$



ANALOG ZUM INDUKTIONSGESETZ



⇒ Wellen

7. DIE MAXWELLSCHEN GLEICHUNG IN DIFFERENTIELLER FORM

Zur Erinnerung

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$div\ \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$rot\ \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

DIE MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN LAUTEN:

$div\ \vec{D} = \rho$	$div\ \vec{B} = 0$
$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$	$rot\ \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j}$
Mit $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ im Vakuum	Mit $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ im Vakuum
Mit $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$ in vielen Materialien	Mit $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \cdot \vec{H}$ in vielen Materialien

$$\rho = \text{Ladungsdichte } [\rho] = \frac{As}{m^3}$$

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = \text{Stromdichtevektor } [j] = \frac{A}{m^2}$$

Ist die differentielle Formulierung äquivalent zur Integraldarstellung?

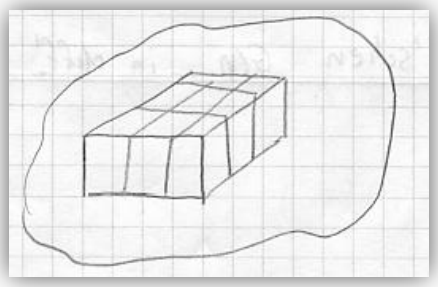
DER SATZ VON GAUSS:

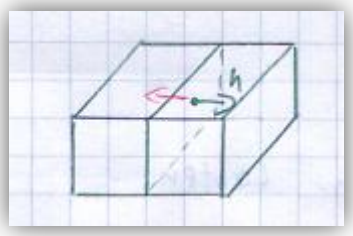
Sei V ein Teilbereich des $\mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand $A(V)$ und sei $\vec{f}(\vec{r})$ ein in ganz V stetig differenzierbares Vektorfeld, so gilt

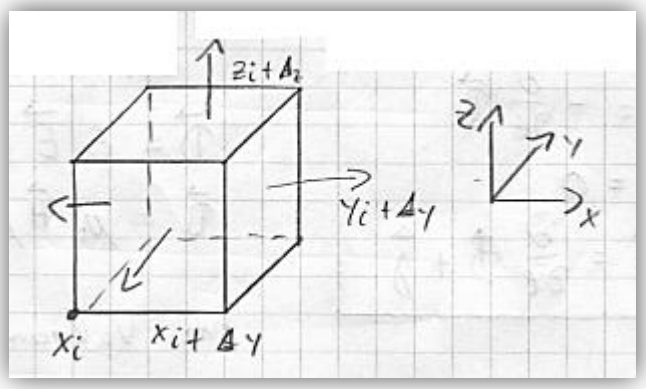
$$\oint_{A(V)} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iiint_V div\ \vec{f} \cdot dV$$

BEWEIS:

$$\oint_{A(V)} \vec{f} \cdot d\vec{A} = \sum_i \oint_{A_i} \vec{f} \cdot d\vec{A}$$







Die Beiträge der Kontaktplättchen heben sich weg.

$$\sum_i \{ \frac{[f_x(x_i + \Delta x) - f_x(x_i)]}{\Delta x} \cdot \Delta y \Delta z \Delta x + \frac{[f_y(y_i + \Delta y) - f_y(y_i)]}{\Delta y} \cdot \Delta y \Delta z \Delta x + \frac{[f_z(z_i + \Delta z) - f_z(z_i)]}{\Delta z} \cdot \Delta y \Delta z \Delta x \}$$

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0 \qquad \frac{\partial f_z}{\partial z}(z_i)$$

$$\underset{=}{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \int_V div\, \vec{f}\, dV \qquad q.e.d$$

BEISPIEL

$$I = \iint_{dW} \left(x^2 + e^{y^2+z^2}\right) dydz + (y^2 + x^2 z^2) dxdz + (z^2 - e^y) dxdy$$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + e^{y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + x^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - e^y) = 2x + 2y + 2z$$

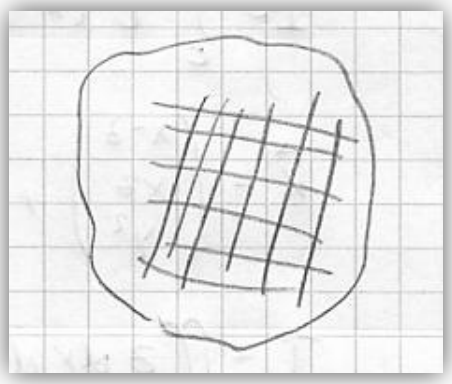
$$I = \iiint (2x + 2y + 2z) dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z) dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 1) dxdy = \int_0^1 (2x + 2) dx = 3$$

$\vec{f}$ sei ein beliebiges Vektorfeld, stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_A rot\,\vec{f}\cdot d\vec{A} = \oint_{Rand(A)} \vec{f}\,d\vec{r}$$

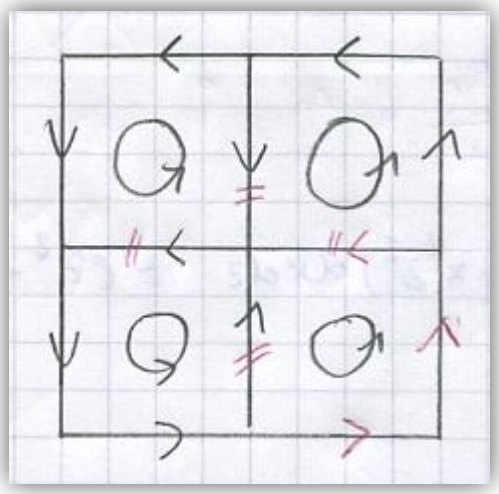
BEWEIS: (FLÄCHE A IN DER xy-EBENE)

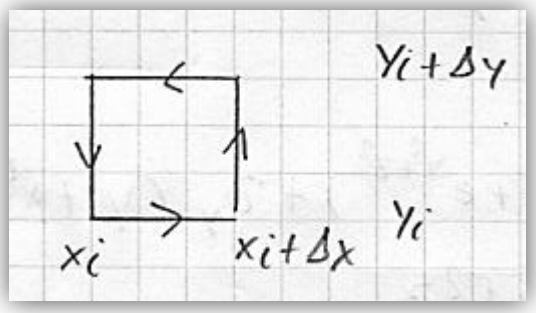


$$\oint_{dA} \vec{f}\,d\vec{r} = \sum_i \oint_{R_i} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

R_i =Rand des Quadrats i

Denn die Beiträge der Berührungslinien heben sich weg.





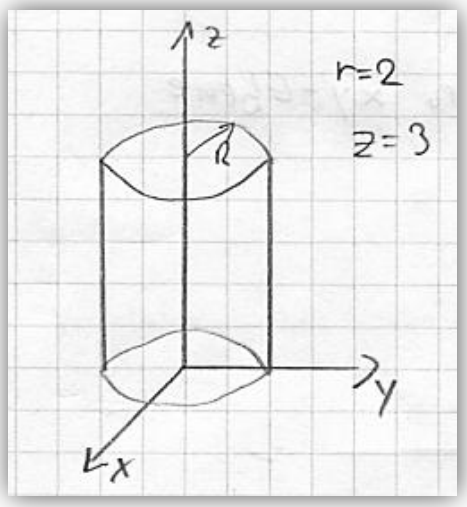
$$\vec{f}\cdot d\vec{s} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\sum_i \left\{ -\frac{\left(f_x(y_1+\Delta y) - f_x(y_i)\right)}{\Delta \mathrm{y}} \cdot \Delta \mathrm{y}\,\Delta x + \frac{\left(f_y(x_i+\Delta x) - f_y(x_i)\right)}{\Delta x} \cdot \Delta x \Delta y \right\}$$

$$\xrightarrow{\Delta x,\Delta y} 0 \quad \frac{\partial f_y}{\partial x}(x_i)$$

$$= \sum_i \left(rot\,\vec{f}\right)_z \cdot \Delta x \Delta y = \int_A \left(rot\,\vec{f}\right)\cdot d\vec{A} \qquad q.e.d$$

BEISPIEL



$$I = \int_C \{(x-z)dx + xzdy + y^2dz\}$$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x-z \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix}, rot\ \vec{K} = \begin{pmatrix} 2y-x \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$I = \iint_A z\ dxdy = \rho \int_{r=0}^{2} \int_{y=0}^{2\pi} rdy = 12\pi$$

Herleitung der Maxwellschen Gleichung in Integralform aus der differentiellen Formulierung

1.MAXWELLSCHE GLEICHUNG

$$div\ \vec{D} = \rho \quad | \int_V dV$$

$$\Rightarrow \int_V div\ \vec{D}\ dV = \int_V \rho dV \quad |Gauss$$

$$\oint_{A(v)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

2. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad | \int_A d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \int_A rot\ \vec{E} \cdot dA = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad |Stokes$$

$$\int_{Rand(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

3. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

$$div\ \vec{B} = 0 \quad | \int_V dV$$

$$\Rightarrow \int_V div\ \vec{B}\ dV = 0 \quad |Gauss$$

$$= \oint_{A(v)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

4. MAXWELLSCHE GLEICHUNG

$$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad |\int_A dA$$

$$\int_A rot\,\vec{H}\cdot d\vec{A} = \int_A j\cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{D}\cdot d\vec{A} \qquad |Stokes$$

$$= \oint_{Rand\ (A)} \vec{H}\cdot d\vec{r} = I + I_v$$

Kontinuitätsgleichungen

$$div\,\vec{D} = \rho \qquad\qquad rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\,div\,\vec{D} = \dot{\rho} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,div\,\vec{D} + div\,j = div\left(rot\,\vec{H}\right) = 0$$

$$div\,j + \dot{\rho} = 0 \qquad \text{(Ladungserhaltung)}$$

Erinnerung: Analogie zur Hydromechanik

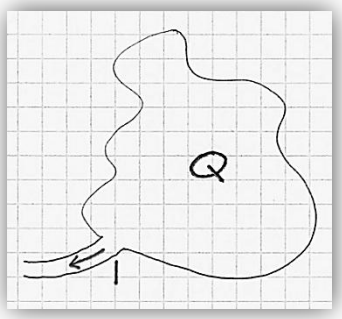
$$div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{(Massenerhaltung)}$$

ANWENDUNG DES GAUSSCHEN SATZES: Integration $\int dV$

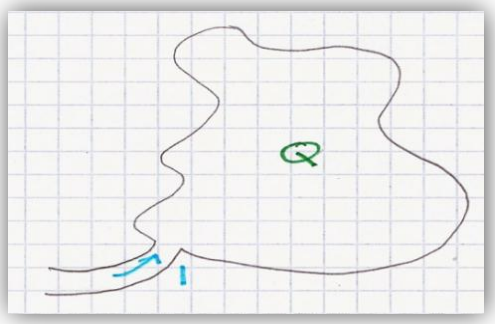
$$\Rightarrow \int div\,\vec{j}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = 0 \qquad |\text{Gauß}$$

$$\oint_{A(v)} \vec{j}\cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}Q = 0$$

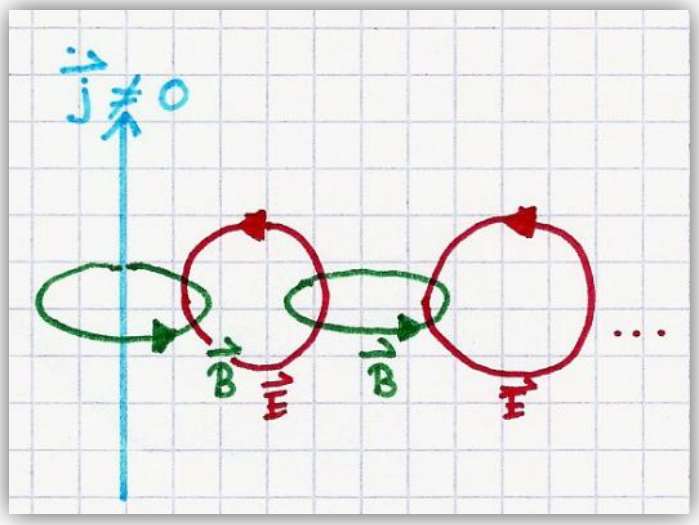
$$I = -\frac{\partial}{\partial t}Q$$



Zu Anfang des Semesters:



$$I = +\dot{Q}$$



HERLEITUNG DER WELLENGLEICHUNG AUS DEN MAXWELLSCHEN GLEICHUNGEN

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j} \qquad |\mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \qquad |rot$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} + \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} \qquad (1)$$

$$rot\,rot\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\,\vec{B} \qquad (2)$$

MIT $rot\,rot\,\vec{E} = grad(div\,\vec{E}) - div(grad\,\vec{E})$ WOBEI $div(grad\,\vec{E})$ KOMPONENTENWEISE ZU VERSTEHEN IST (SIEHE ÜBUNG).

$$div\,\vec{D} = \rho = 0 \qquad \Rightarrow div(\epsilon_0\vec{E}) = \rho = 0 \qquad \Rightarrow div\,\vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow rot\,rot\,\vec{E} = -div(grad\,\vec{E}) = -\,\Delta\,\vec{E}$$

Addition von (1) und (2)

$$0 = -\,\Delta\,\vec{E} + \mu_0\epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} + \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\,\vec{E} - \epsilon_0\mu_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} \qquad \text{(Wellengleichung im Vakuum)}$$

Beschleunigte Ladungen sind Quellen elektromagnetischer Wellen.

$$= \frac{1}{c_0^2} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2{,}99 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \;\widehat{=}\; \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

LÖSUNGSANSATZ

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E_0} \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$$

−: Welle läuft nach rechts

Einsetzen:

$$-\overrightarrow{E_0} \cdot \vec{k}^2 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) + \frac{1}{c_0^2} \cdot \overrightarrow{E_0} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} = c_0^2 \mathrel{\widehat{=}} \text{Dispersionsrelation}$$

$$\Leftrightarrow f \cdot \lambda = c_0$$

MAGNETISCHES FELD

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \overrightarrow{B_0} \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$$

Mit $rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$= -\begin{pmatrix} k_y E_z^0 - k_z E_y^0 \\ k_z E_x^0 - k_x E_z^0 \\ k_x E_y^0 - k_y E_x^0 \end{pmatrix} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) = \pm\omega \overrightarrow{B_0} \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$$

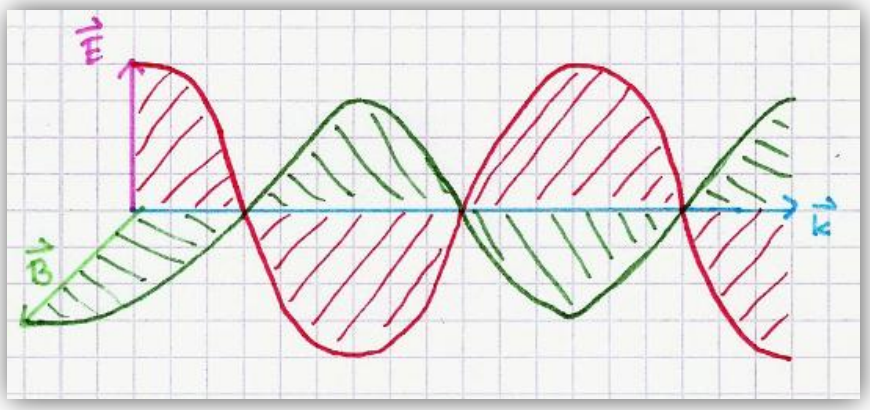
$$\Rightarrow \vec{B} = \mp \frac{1}{\omega} \cdot \vec{k} \times \vec{E} \qquad (*)$$

+: nach rechts laufende Welle

$\Rightarrow \vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ (Reihenfolge!) bilden ein Rechtssystem, d.h. $\vec{B} \perp \vec{k}$ und $\vec{B} \perp \vec{E}$. Weiter gilt mit

$$div\ \vec{D} = \rho = 0, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow div\ \vec{E} = 0 = -\left(k_x E_x^0 + k_y E_y^0 + k_z E_z^0\right) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t) = -\vec{k} \cdot \overrightarrow{E_0} \cdot \sin(\vec{k} \cdot \overrightarrow{E_0} \pm \omega t) \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$$



Elektromagnetische Wellen sind transversal!

Nicht nur die Richtung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ (bzw. $\vec{H}$) stehen in fester Beziehung zueinander, sondern auch die Beträge.

Mit $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ und $(*)$ $\left(\frac{\omega}{|\vec{k}|} = c_0\right)$

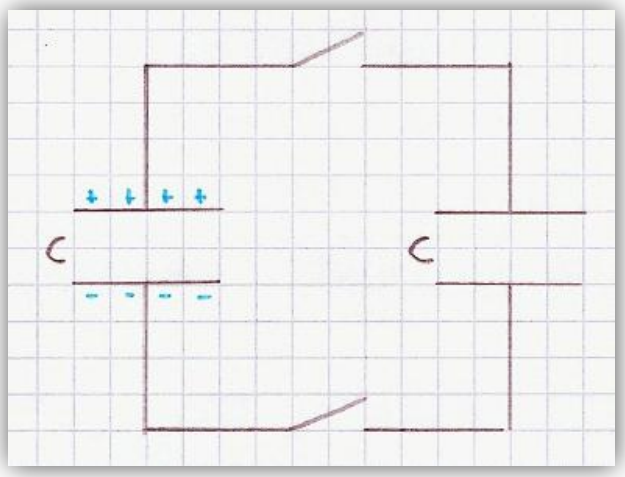
$$\Rightarrow |\vec{H}| = \frac{1}{\mu_0 c_0} |\vec{E}|$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \mu_0 c_0 = \mu_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} =: z_0 \mathrel{\widehat{=}} \text{Vakuumwiderstand}$$

$$\approx 376\Omega$$

BEISPIEL:

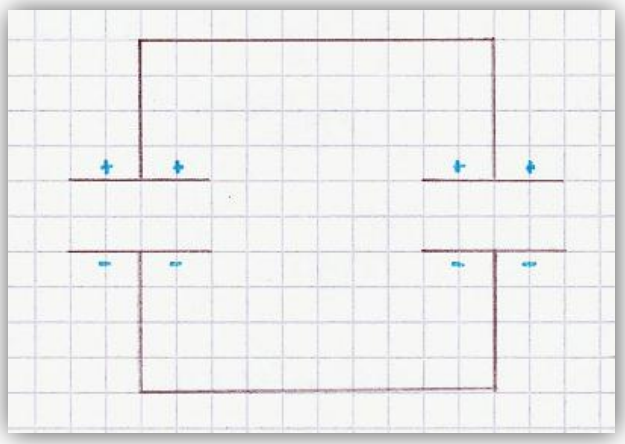


Energie des linken geladenen Kondensators:

$$E = \frac{1}{2} C U^2; \quad C = \frac{Q}{U} \Rightarrow U = \frac{Q}{C}$$

$$E = \frac{1}{2} C \cdot \frac{Q^2}{C^2}$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad \text{vorher}$$



$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{Q}{2}\right)^2}{C}$$

$$E = \frac{1}{4} \frac{Q^2}{C} \qquad \text{nachher}$$

$$E_{vorher} > E_{nachher}$$

Elektromagnetische Energiedichte (im Vakuum)

$$w_{en} = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

Änderung von w_{en} = Zu- oder Abfluss + Umwandlung

$$\frac{\partial}{\partial t}w_{en} = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} + \vec{D}\cdot\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{B}}\cdot\vec{H} + \vec{B}\cdot\dot{\vec{H}}\right) = (im\ Vakuum)\epsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_0\vec{H}\cdot\dot{\vec{H}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j} \quad \Rightarrow \epsilon_0\dot{\vec{E}} = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \Rightarrow \mu_0\dot{\vec{H}} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w_{en} = \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j}\right) - \vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\left(\vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\right) - \vec{E}\cdot\vec{j}$$

VEKTORALGEBRA: $div\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = -\vec{a}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right) + \vec{b}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$

$$\Rightarrow \vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) = div(\vec{E}\times\vec{H})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}w_{en} + div\,\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E} \qquad Energieerhaltung$$

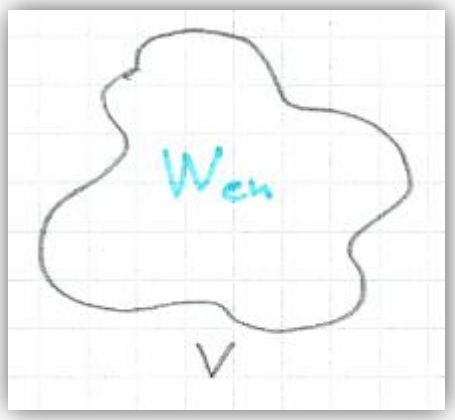
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + div\,\vec{j} = 0 \qquad \text{Ladungserhaltung}$$

Mit dem POINTING-VEKTOR $\vec{S}$

$$\vec{S} := \vec{E}\times\vec{H}$$

$$[S] = \frac{V}{m}\cdot\frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$$

Betrachte endliche Volumen



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w_{en}dV + \int_V div\,\vec{S}\,dV$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_V w_{en}dV + \int_{A(V)}\vec{S}\cdot d\vec{A}$$

$$= -\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV$$

Zeitliche Änderung + Zu- bzw. Abflüsse = Umwandlung (Ohmsche Verluste)

BEISPIEL: Ebene elektromagnetische Welle

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E})$$

VEKTORALGEBRA:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{E}^2 \cdot \vec{k} \Rightarrow \vec{S} \parallel \vec{k}$$

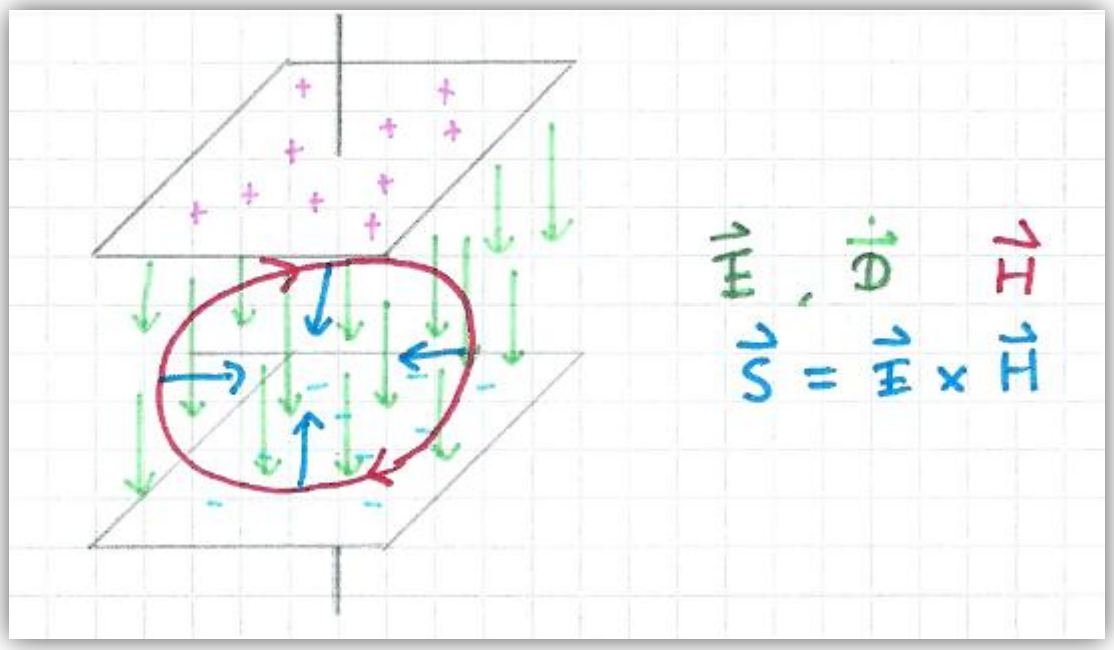
⇒ Der Pointing-Vektor zeigt in Ausbreitungsrichtung der Welle.

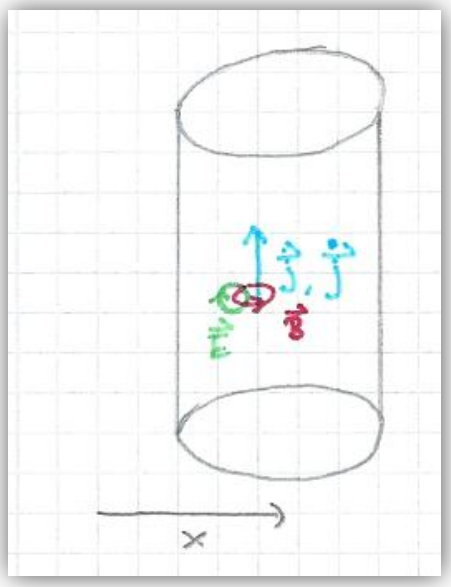
BEISPIEL: Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche

$$|\vec{S}| = 1 \frac{kW}{m^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = 600 \frac{V}{m} \qquad |\vec{B}| = 2 \cdot 10^{-6}\, T$$

BEISPIEL: Aufladen/Entladen eines Plattenkondensators





$\vec{E}$ variiere mit Frequenz ω

Wir starten von der Wellengleichung für $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial j}{\partial t}$$

$\vec{E}$ variiere mit Frequenz ω

Wir starten von der Wellengleichung für $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial j}{\partial t}$$

OHMSCHES GESETZ

$$\frac{U}{I} = R$$

$$\Rightarrow E = (Plattenkondensator)\frac{U}{d} = \frac{I\cdot R}{d} = \frac{I}{A}\cdot\frac{AR}{d} =: j\,\sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \sigma\cdot\vec{E}$$

Mit der Leitfähigkeit $\sigma = \frac{d}{AR}, [\sigma] = \frac{1}{\Omega m}$

$\sigma \neq \sigma(\omega)$ ≙ normaler Skin-Effekt

Für sehr hohe Frequenzen wird $\sigma = \sigma(\omega)$

$$\frac{1}{\sigma}\Delta\vec{j} - \frac{1}{\sigma}\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{j}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$$

Oder eindimensional

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - \frac{1}{\sigma}\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial j}{\partial t}$$

RICHTUNG VON $\vec{j}$:

$$div\,\vec{D} = \rho = 0$$

$$\Rightarrow div\,\vec{E} = 0 \qquad \Rightarrow div\,\vec{j} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{j} \perp \vec{k}$$

d.h. Welle läuft nicht in Richtung des Drahtes.

ANSATZ:

$$j = j_0 \cdot e^{i(kx-\omega t)}$$

EINSETZEN:

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma}k^2 j_0 e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{c_0^2}\frac{1}{\sigma}\omega^2 j_0 e^{i(kx-\omega t)} = -i\mu_0\omega j_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

Für $\frac{\omega^2}{c_0^2\sigma} \ll |-i\mu_0\omega$ gilt:

$$\Rightarrow \omega \ll \mu_0 c_0^2 \sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow k^2 = i\mu_0\sigma\omega$$

k ist komplex.

$$\Rightarrow k = \pm\sqrt{i}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{i}} = \sqrt{\boldsymbol{e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}}} = \boldsymbol{e^{\frac{i\pi}{4}} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega} = Re(k) + i\,Im(k)$$

Also die Lösung $j = j_0 \cdot e^{i(kx-\omega t)}$

$$= j_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}\,x} \cdot e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}\,x-\omega t\right)}$$

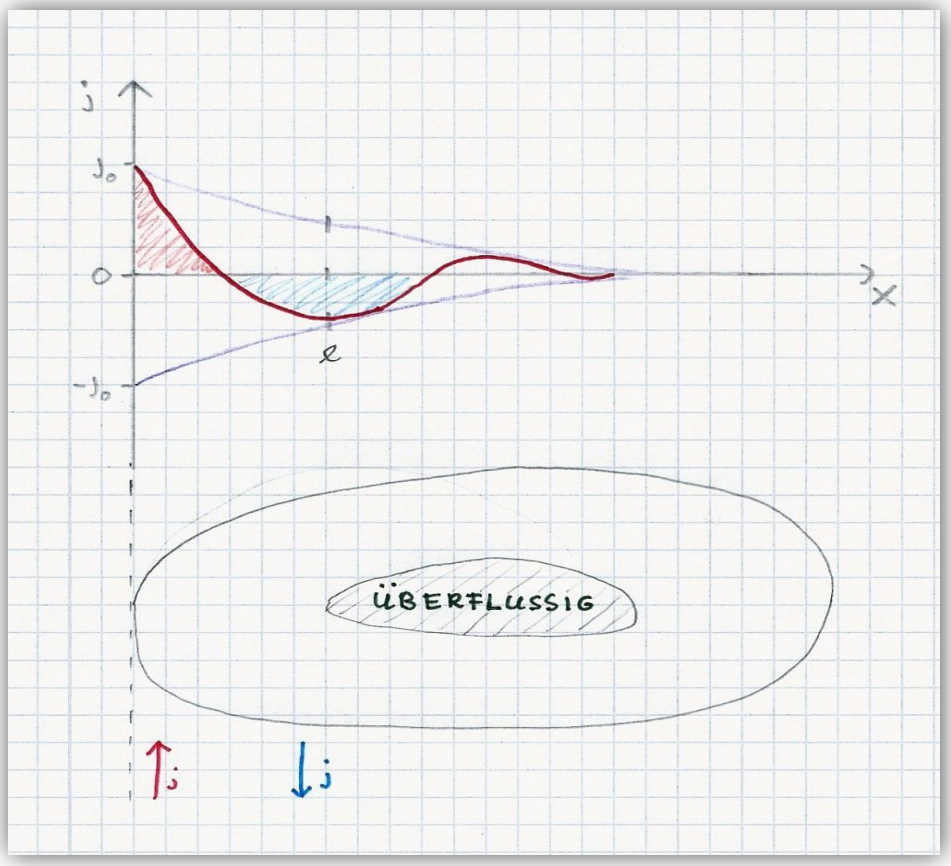
$$\Rightarrow j = j_0 e^{-\frac{x}{l}} e^{i(k_r x-\omega t)}$$

Mit der Eindringtiefe :

$$l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu_0\sigma\omega}}$$

Und dem Realteil des Wellenvektors $k_r = \frac{\sqrt{\mu_0\sigma\omega}}{\sqrt{2}}$

GRAFISCH



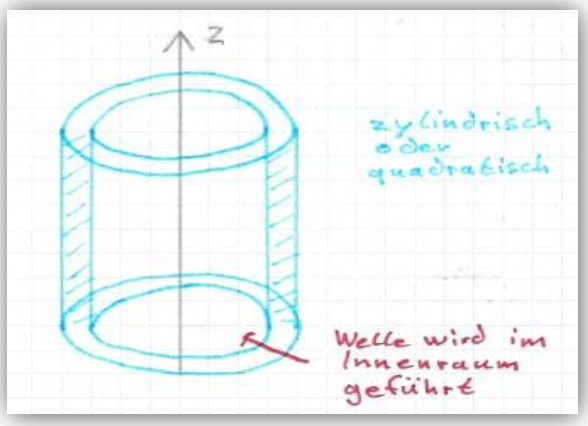
$$l \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

BEISPIEL: Kupfer

$$\omega = 2\pi \cdot 50\frac{1}{s} = 2\pi \cdot 50Hz \qquad \Rightarrow l = 0{,}85cm$$

$$\omega = 2\pi \cdot 10^8\frac{1}{s} = 2\pi \cdot 100MHz \qquad \Rightarrow l = 7\mu m$$

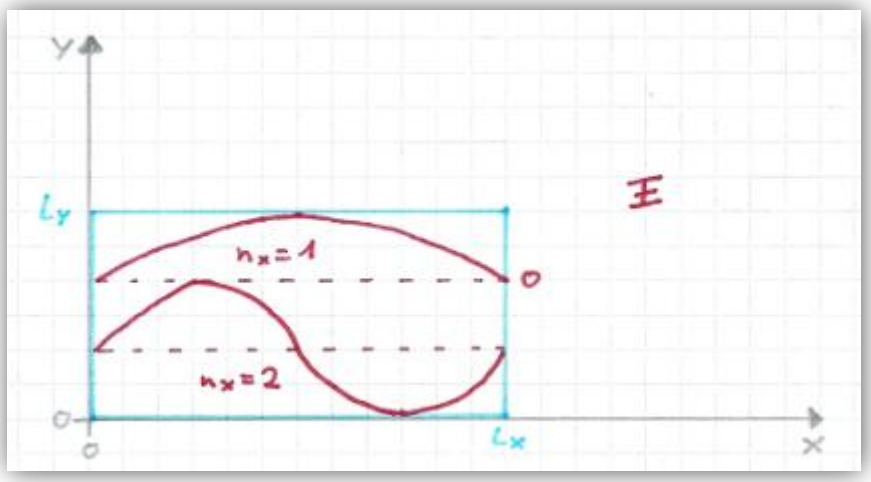
Bei sehr hohen Frequenzen sind Drähte aufgrund des Skin-Effektes nicht geeignet um elektromagnetische Energie zu transportieren. Hier verwendet man Wellenleiter, z.B. Hohlleiter.



Die metallischen Bereiche beschreiben wir durch $\sigma \to \infty$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$\Rightarrow \vec{E}$ im Metall $= 0$ $\Rightarrow$ Randbedingungen für $\vec{E}$



Die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(keine Quellen)}$$

wird gelöst durch den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{E_0} \cdot \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(k_z z - \omega t)$$

für

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{c_0^2}\omega^2 = 0$$

und (wegen Randbedingungen)

$$k_x = n_x \cdot \frac{\pi}{l_x}; \quad k_y = n_y \cdot \frac{\pi}{l_y}; \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}$$

Mit welcher Geschwindigkeit $\frac{\omega}{k_z}$ läuft die Welle in z-Richtung:

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - n_x^2 \cdot \frac{\pi^2}{l_x^2} - n_y^2 \cdot \frac{\pi^2}{l_y^2}} = \frac{\omega}{c_0} \cdot \sqrt{1 - \frac{c_0^2 \pi^2}{\omega^2}\left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2}\right)}$$

$\Rightarrow$ Phasengeschwindigkeit $= \frac{\omega}{k_z}$

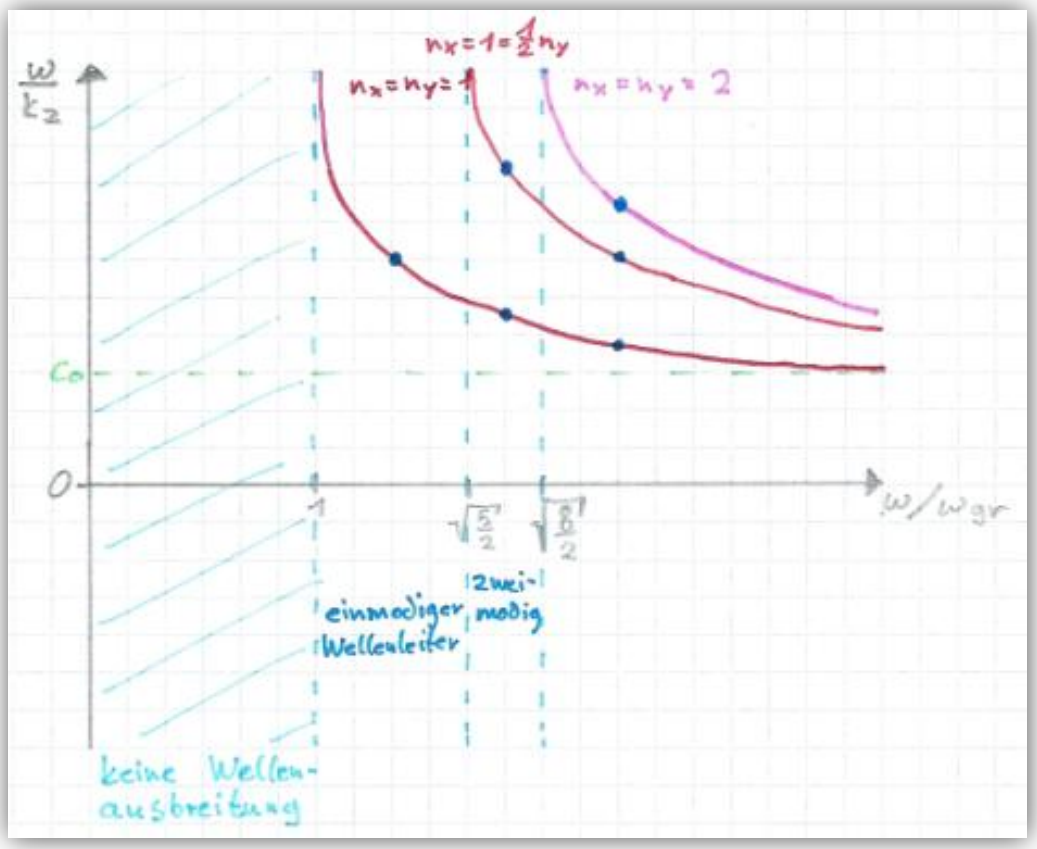
$$\frac{\omega}{k_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2 \pi^2}{\omega^2}\left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2}\right)}}$$

1.) Es gibt eine Grenzfrequenz ω_{gr} (oder „cut-off“-Frequenz) unterhalb derer der Radikant negativ wird, also nur gedämpfte Wellen auftreten.

Mit z.B. $n_x = n_y = 1$:

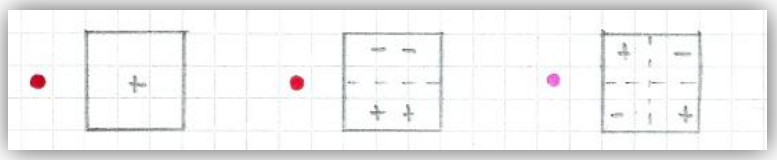
$$\omega_{gr} = c_0 \pi \sqrt{\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}}$$

GRAFISCH: $(l_x = l_y)$



mehrmodiges Verhalten ist mit verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten verknüpft

⇒ Signalverformungen

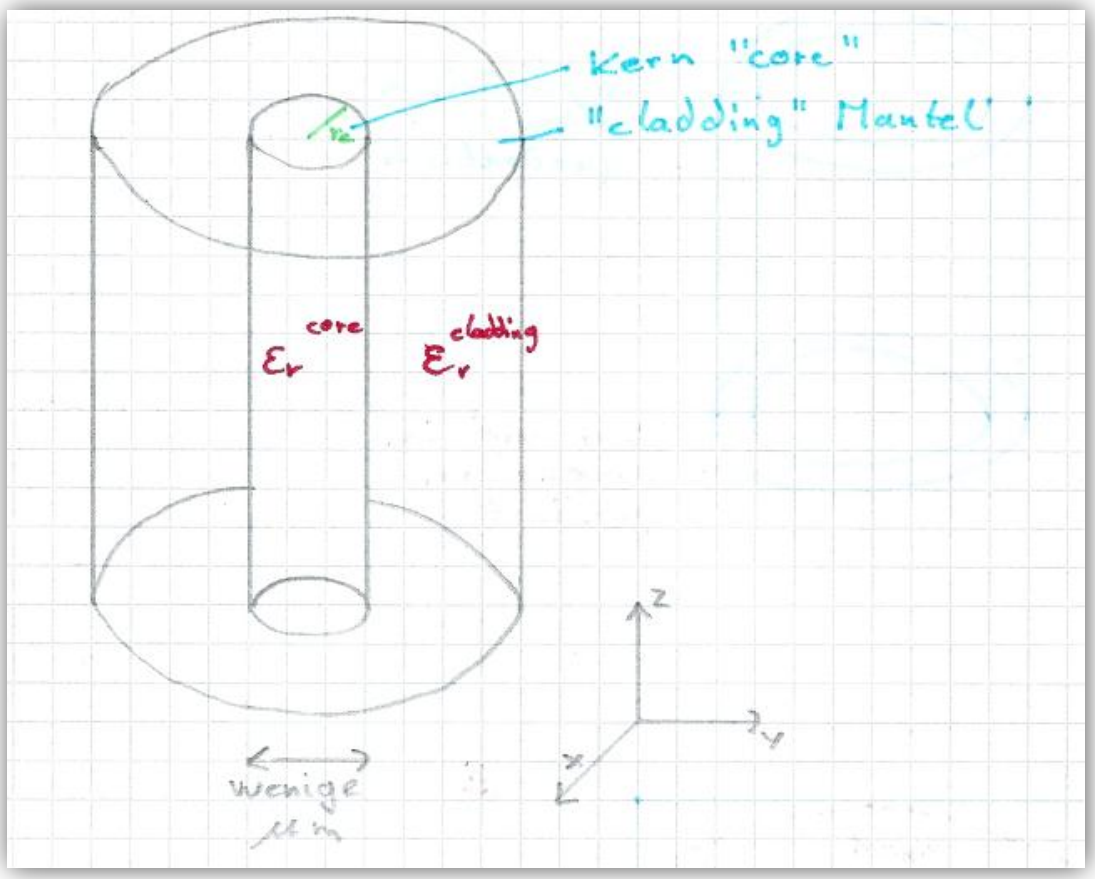


≙ Moden des Hohlraumleiters

2.) Für $\omega > \omega_{gr}$ ist die Phasengeschwindigkeit

$$\frac{\omega}{k_z} > c_0$$

Die Moden und das generelle Verhalten einer optischen Glasfaser sind den Hohlleitern ähnlich



Wie sieht die zugehörige Wellengleichung aus?

In Materialien

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon_0 \neq 1 \qquad \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}, \quad \mu_r = 1$$

GLASFASERN

Maxwellgleichungen:

$$(1) \quad div\, \vec{D} = 0$$

$$(2) \quad rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3) \quad rot\, \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow rot\big(rot\, \vec{E}\big) = grad\big(div\, \vec{E}\big) - \Delta\, \vec{E} = -\mu_0 \cdot rot\, \vec{H}$$

$$rot\, \dot{\vec{H}} = \ddot{\vec{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \ddot{\vec{E}}$$

$$div\, \vec{D} = 0 = div\big(\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}\big); \quad \epsilon_r = \epsilon_r(\vec{r})$$

$$= \epsilon_0 \big(\epsilon_r div \vec{E} + \vec{E} \cdot grad\, \epsilon_r\big) \Rightarrow div\, \vec{E} = -\frac{\vec{E}}{\epsilon_r} \cdot grad\, \epsilon_r \neq 0$$

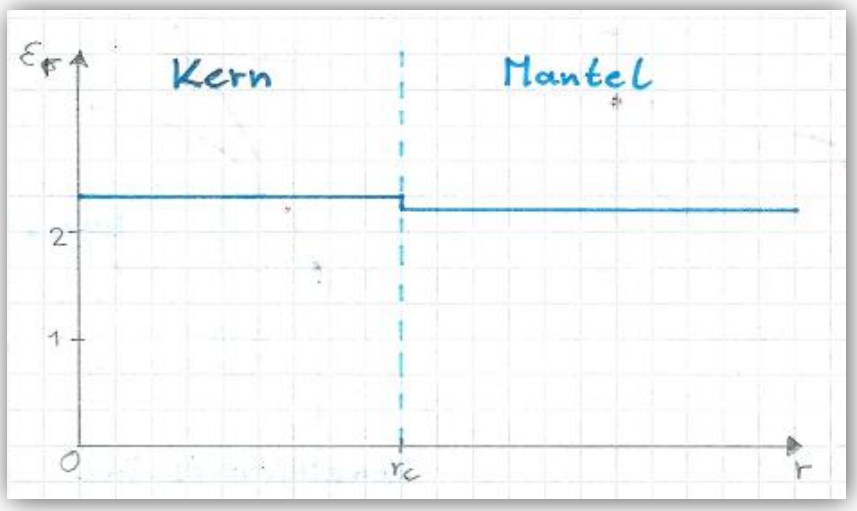
$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + grad\left(\frac{\vec{E}}{\epsilon_r} \cdot grad\ \epsilon_r\right) = 0$$

$grad\ \epsilon_r = 0$ für homogene Medien

$$c = \frac{c_0}{n}, \qquad Brechzahl\ n; [n] = 1$$

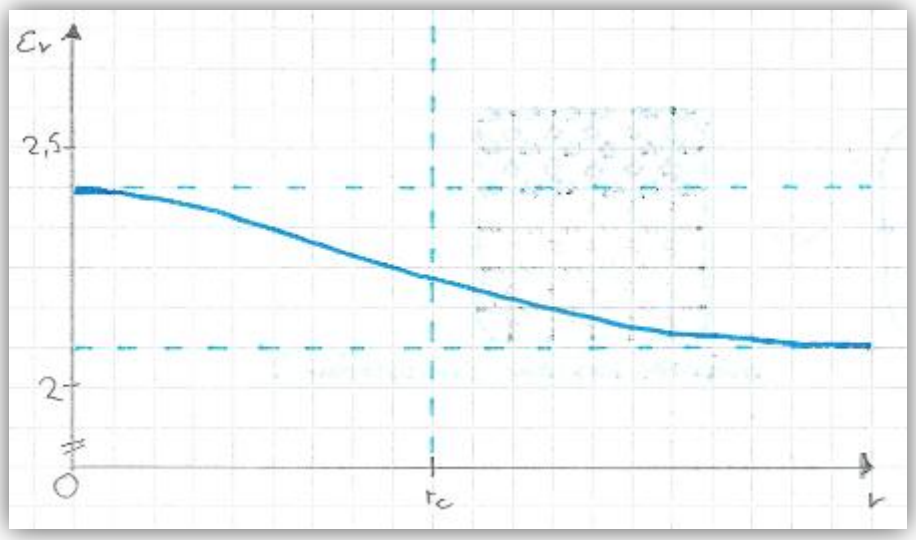
$$n \coloneqq \sqrt{\epsilon_r}$$

BEISPIEL: „Step-Index“-Glasfaser



Typisch: $\epsilon_r^{Kern} = 2{,}136$ (Ge-dotiert) $\epsilon_r^{Mantel} = 2{,}133$ (Glas undotiert)

BEISPIEL: „dispersion-shifted“-Glasfaser



Bisher hatten wir folgenden Zusammenhang

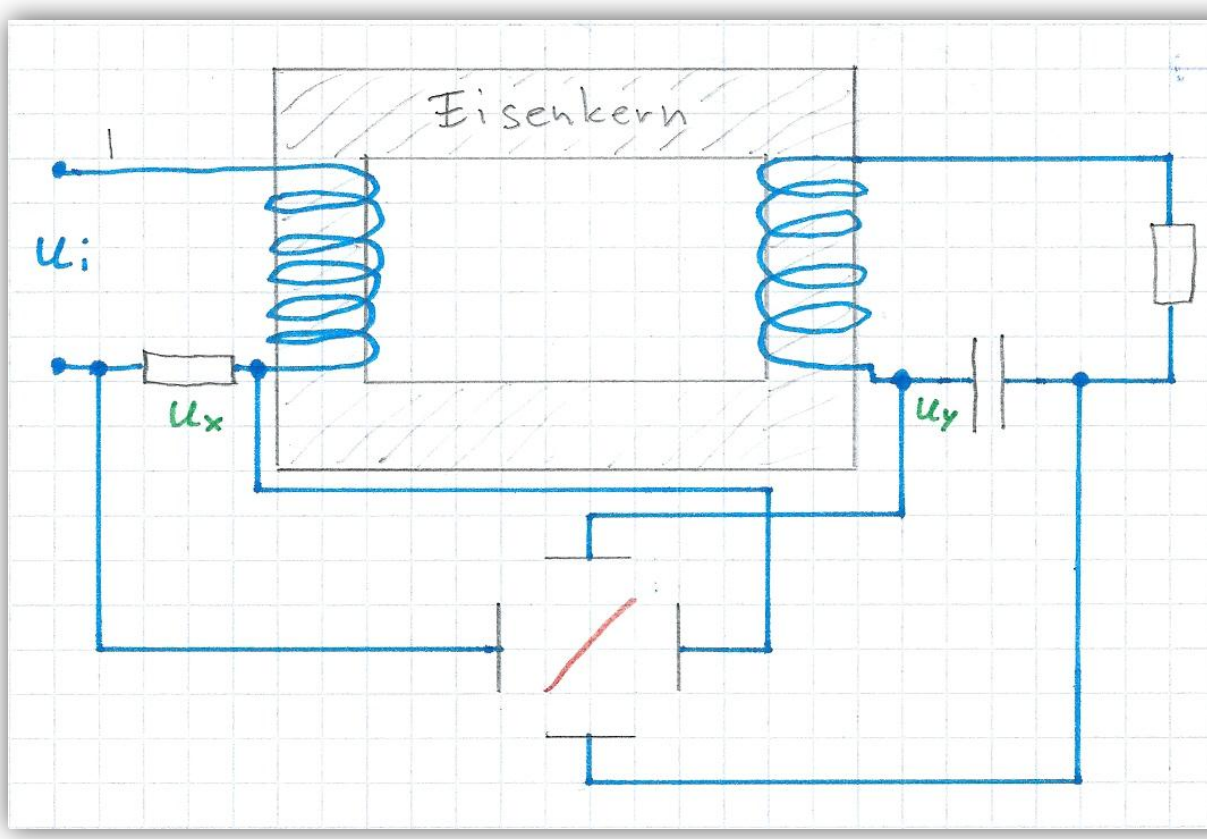
$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}\end{aligned}\right\} \text{ im Vakuum}$$

Bzw.

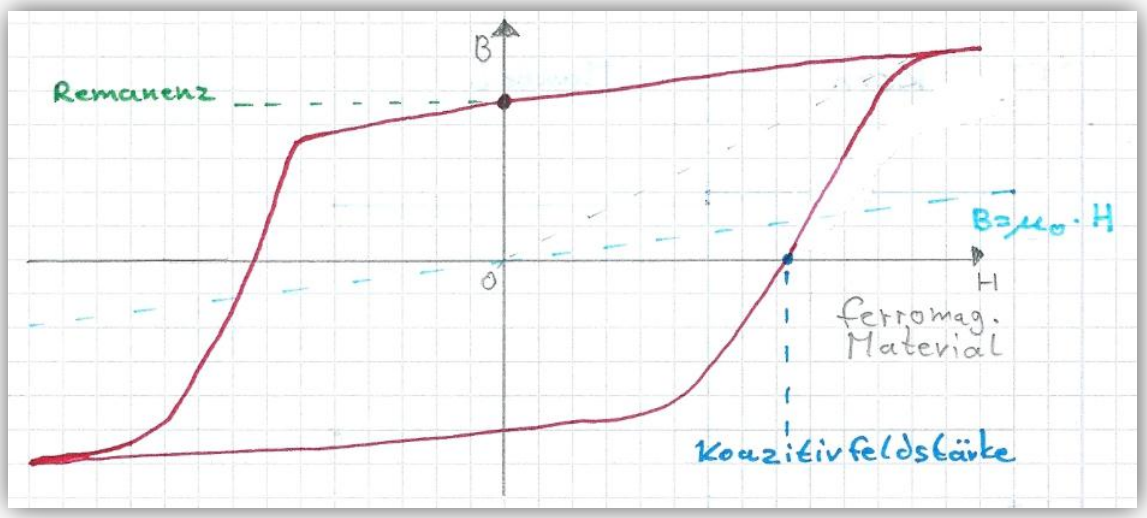
$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}\end{aligned}\right\} \text{ in "vielen" Materialien}$$

Kann man den Zusammenhang $\vec{B} \leftrightarrow \vec{H}$ (oder auch $\vec{E} \leftrightarrow \vec{D}$) experimentell bestimmen.

MESSUNG $\vec{B}(\vec{H})$



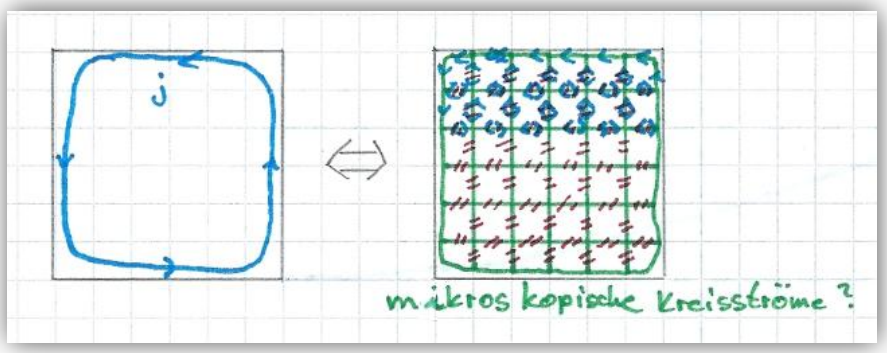
Mit



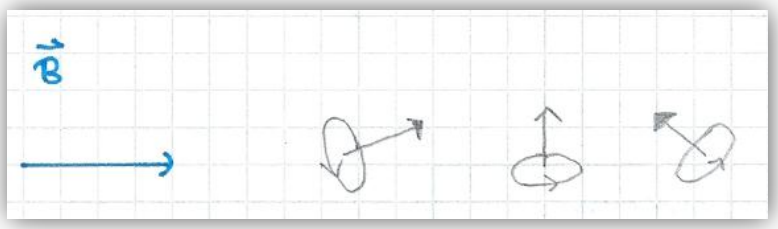
$$U_x \sim I \sim H$$
$$U_y \sim U_{ind} \sim \dot{B} \sim B$$

- $H = 0$, dennoch $B \neq 0$
- B ist eine eindeutige Funktion von H

⇒ interne Ströme im magnetischen Material



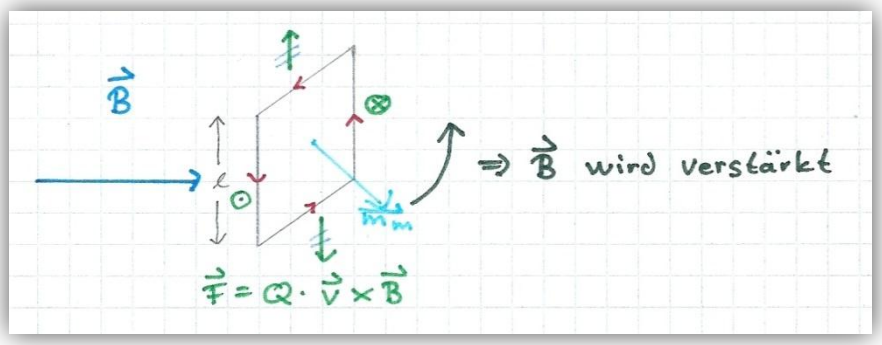
Ja, man spricht jedoch meist von magnetischen Momenten



Keine Vorzugsrichtung ⇒ kein makroskopisches Feld für $\vec{H} = 0$

Ausrichten durch Feld im Medium $\vec{B}$

Betrachte rechteckige, kleine Leiterschleife (starr)



Mit der Kraft auf einen Leiter der Länge l (siehe 5.2.2 Kraft zwischen zwei Leitern). $F = l \cdot I \cdot B$ resultiert das Drehmoment M

$$M = b(l \cdot I \cdot B) = (I \cdot bl)B = I \cdot A \cdot B$$

$$I \cdot bl = I \cdot A =: m_m = magn.Moment$$

$$\vec{M} = \overrightarrow{m_m} \times \vec{B}$$

Also: $\vec{B}$ richtet die magnetischen Momente aus ⇒ $\vec{B}$ wird verstärkt. Aber! Thermische Fluktuationen zerstören die Ausrichtung wieder.

FORMALE VERKNÜPFUNG MIT DEN MAXWELL-GLEICHUNGEN

Maxwellsche Gleichungen im Vakuum

$$(1) \quad div(\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \rho$$

$$(2) \quad rot\, \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$(3) \quad div\, \vec{B} = 0$$

$$(4) \quad \frac{1}{\mu_0} rot\, \vec{B} = \vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

ρ ist die gesamte Ladungsdichte, also

$$\rho = \rho_{ext} + \rho_{int}$$

$\vec{j}$ ist entsprechende die gesamte Stromdichte, also

$$\vec{j} = \overrightarrow{j_{ext}} + \overrightarrow{j_{int}}$$

Für statische Fälle: $\epsilon_0 \dot{\vec{E}} = 0$

Einsetzen in (4):

$$\frac{1}{\mu_0}\, rot\, \vec{B} = \overrightarrow{j_{ext}} + \overrightarrow{j_{int}}$$

Ziel: Lasse interne Beiträge „verschwinden“

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\, rot\vec{B} - \overrightarrow{J_{int}} = \overrightarrow{J_{ext}}$$

$$\overrightarrow{J_{int}} =: rot\ \vec{M} \neq \text{Drehmoment}$$

$$\Rightarrow rot\ \left(\frac{1}{\mu_0}\ \vec{B} - \vec{M}\right) = \overrightarrow{J_{ext}}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\ \vec{B} - \vec{M} =: \vec{H}$$

$$\Rightarrow rot\ \vec{H} = \overrightarrow{J_{ext}} =: \vec{J}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$rot\ \vec{M} = \overrightarrow{J_{int}}$$

$\vec{M}$ wird *Magnetisierung* genannt.

$$[M] = [H] = \frac{A}{m} = \frac{Am^2}{m^3} = \frac{\text{magnetisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

Häufig hat man (phänomenologisch)

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \qquad [\chi_m] = 1$$

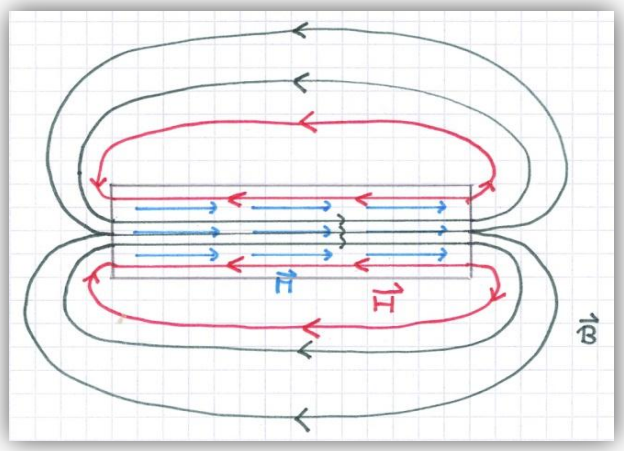
Mit der *magnetischen Suszeptibilität* χ_m

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \cdot \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} =: \mu_0\mu_r\vec{H}$$

μ_r wird *relative magnetische Permeabilität* genannt.

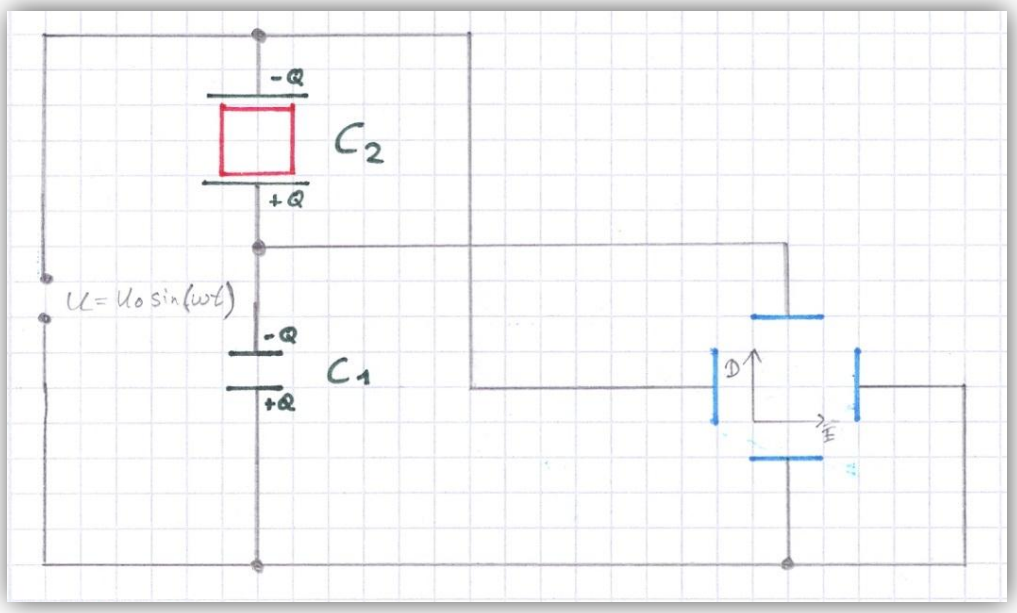
BEISPIEL: Permanentmagnet

Im Magneten: $\vec{M} = const.$



Im Magneten: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

Wegen $div\ \vec{B} = 0 \Rightarrow$ Normalkomponente von $\vec{B}$ stetig $\Rightarrow$ Normalkomponente von $\vec{H}$ unstetig.



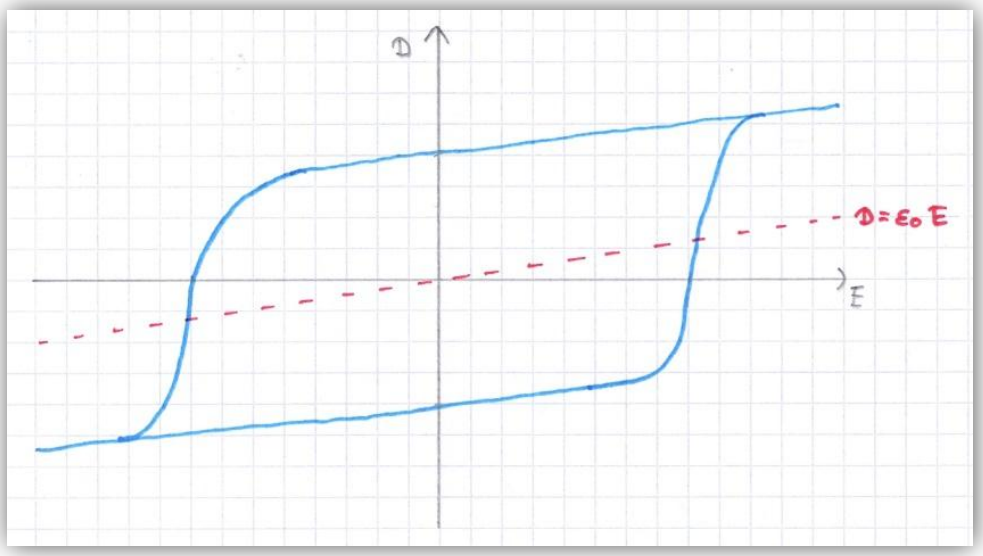
Mit dem Scheinwiderstand einer Kapazität

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

und $C_1 \gg C_2 \Rightarrow |Z_{C_1}| \ll |Z_{C_2}|$, d.h. die angelegte Spannung U fällt hauptsächlich über C_2 ab.

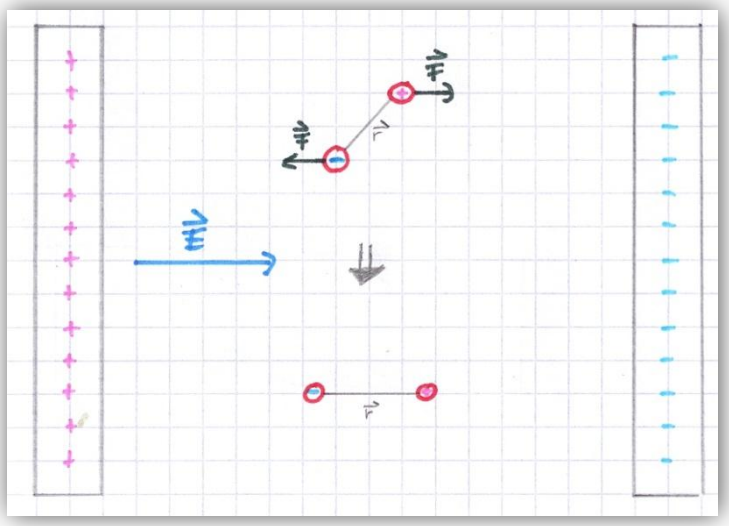
Wegen $E = \frac{U}{d}$ am Plattenkondensator C_2 ist E auf der x-Achse aufgetragen.

$$U_y = U_{C_1} = \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} U \approx \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_2}} U = \frac{C_2 \cdot U}{C_1} = \frac{Q}{C_1} \sim D \text{ (über 1. Maxwellgleichung)}$$



ZUSAMMENHANG $\vec{E} \leftrightarrow \vec{D}$

Betrachten eines elektrischen Dipols im $\vec{E}$-Feld (siehe 4.5)



$\Rightarrow \vec{E}$ wird abgeschwächt
$\Rightarrow$ Drehmoment $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (Q \cdot \vec{r}) \times \vec{E} =: \vec{p} \times \vec{E}$$

$\vec{p}$ ist das *elektrische Dipolmoment*

ALSO: $\vec{E}$ richtet die elektrischen Dipole aus. $\Rightarrow \vec{E}$ wird abgeschwächt. Aber! Thermische Fluktuationen zerstören Ausrichtung wieder.

FORMALES VORGEHEN:

Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$div(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho$$

ρ ist wieder die gesamte Ladung, also

$$\rho = \rho_{ext} + \rho_{int}$$

Einsetzen in (1):

$$\Rightarrow div(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{ext} + \rho_{int}$$

ZIEL: Lass interne Beiträge „verschwinden“

$$\Rightarrow div(\epsilon_0 \vec{E}) - \rho_{int} = \rho_{ext}$$

$$-\rho_{int} =: div\, \vec{P}$$

$$= div(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{ext}$$

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} =: \vec{D}$$

Also:

$$div\,\vec{D} = \rho_{ext}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\vec{D} - \vec{P}\right)$$

$$div\,\vec{P} = -\rho_{int}$$

$\vec{P}$ wird als *Polarisation* bezeichnet.

$$[P] = [D] = \frac{As}{m^2} = \frac{Asm}{m^3} = \frac{\text{elektrisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

Häufig hat man (phänomenologisch)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \qquad [\chi_e] = 1$$

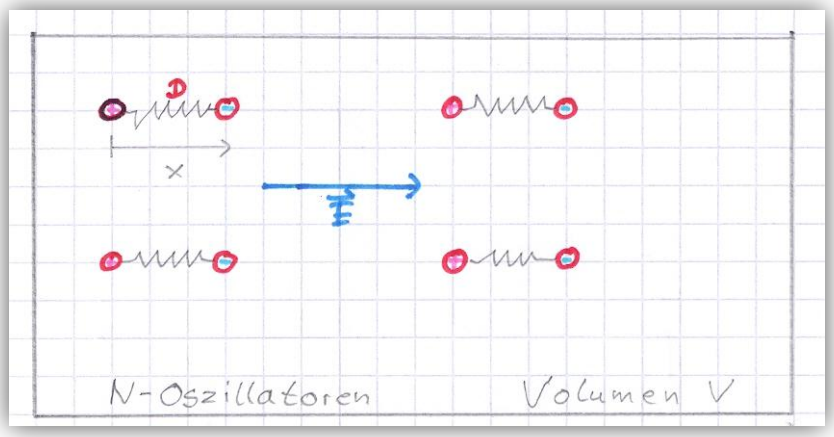
Mit der *elektrischen Suszeptibilität* χ_e
Einsetzen:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\vec{D} - \vec{P}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\vec{D} - \epsilon_0 \chi_e \vec{E}\right) \qquad \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e)\vec{E}$$

$$\mathbf{1} + \chi_e =: \epsilon_r$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

BEISPIEL: Ein einfaches Modell für $\epsilon_r(\omega)$ im Medium



Kerne seien sehr schwer, bzw. werden quasi „festgehalten“

Dipolmoment eines Oszillators

$$p = Q \cdot x$$

Damit die Polarisation

$$P = \frac{N \cdot p}{V} = \frac{NQ}{V} \cdot x$$

x aus Newtonscher Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = Q \cdot E - D \cdot x = QE_0 \cdot \sin(\omega t) - Dx$$

ANSATZ: $x = x_0 \cdot \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow -m\omega^2 x_0 \cdot \sin(\omega t) + Dx_0 \cdot \sin(\omega t) = Q \cdot E_0 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{Q \cdot E_0}{D - m\omega^2} = \frac{QE_0 \cdot \frac{1}{m}}{\frac{D}{m} - \omega^2}$$

Mit der Eigenfrequenz $\Omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ des harmonischen Oszillators

$$x_0 = \frac{Q \cdot \frac{E_0}{m}}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Resultiert die Polarisation

$$P = \frac{NQ}{V} \cdot x = \frac{NQ}{V} x_0 \sin(\omega t)$$

$$= \frac{NQ}{V} \cdot \frac{Q \cdot E \cdot \frac{1}{m}}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{NQ^2}{Vm} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \cdot E =: \epsilon_0 \chi \cdot E$$

Es folgt die *(elektrische) Suszeptibilität* χ

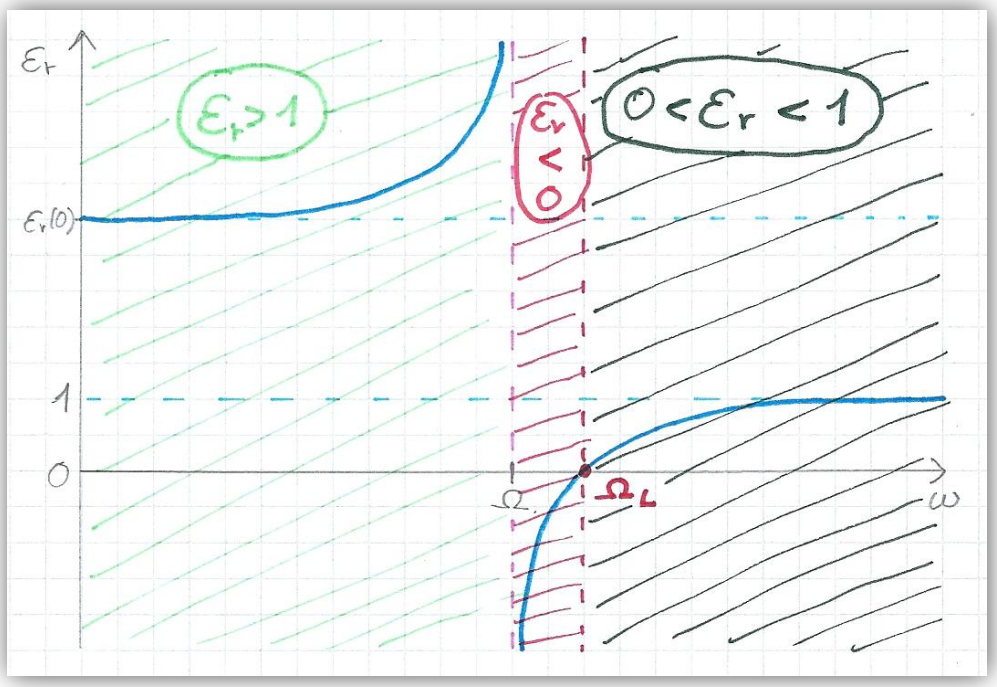
$$\chi = \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$

und die *(relative) elektrische Permittivität*

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$

GRAPHISCH:



mit der *statischen Permittivität* ϵ_r

$$\epsilon_r(\omega = 0) = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\Omega^2} \geq 1$$

Phasengeschwindigkeit c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}}$$

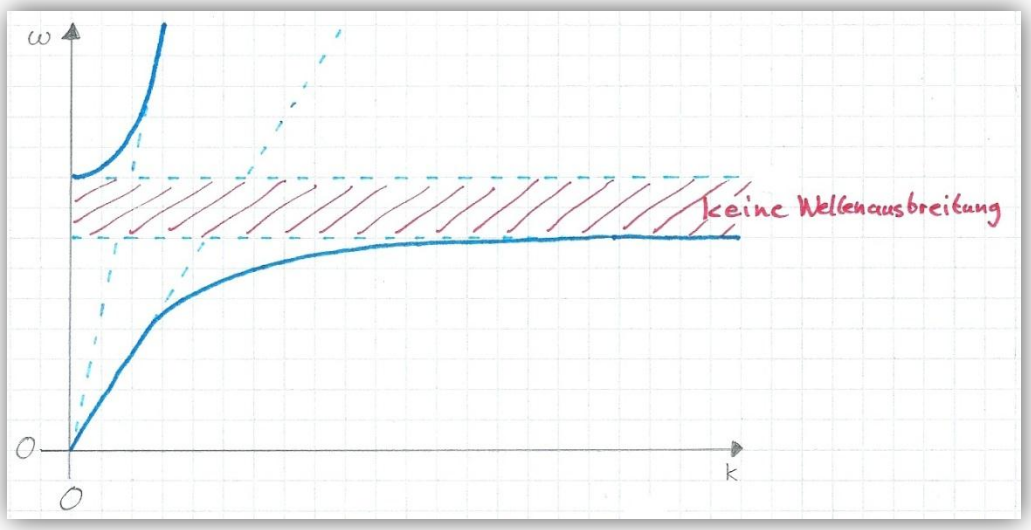
$\epsilon_r > 1$: $c < c_0$ ≙ Vakuumlichtgeschwindigkeit

$\epsilon_r < 0$: c rein imaginär, d.h. es kommt nur zu exponentiell abfallenden (evaneszenten) Lösungen

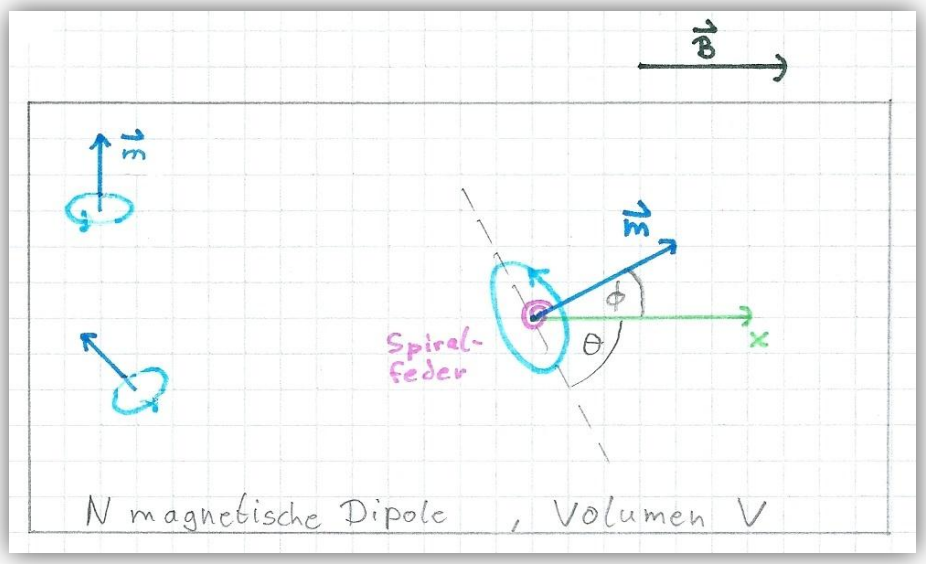
$0 < \epsilon_r < 1$: $c > c_0$

Wir erhalten die DISPERSIONSRELATION:

$$\frac{\omega}{k} = c(\omega)$$



BEISPIEL: Ein einfaches Modell für die Magnetisierung eines Mediums



Drehmoment $\vec{M}$ aufgrund des magnetischen Feldes

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{M}\right| = m \cdot B \cdot \sin\phi = m \cdot B \cdot \cos\theta$$

Drehmoment aufgrund der Spiralfeder

$$\left|\vec{M}\right| = D \cdot \theta \qquad \text{(Hooksches Gesetz)}$$

mit der Federkonstanten D

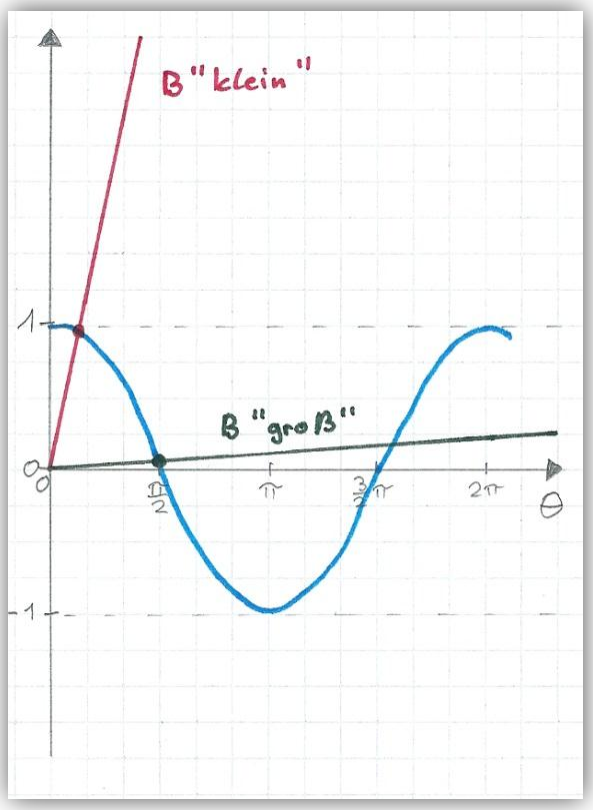
Im stationären Fall gilt

$$m \cdot B \cdot \cos\theta = D \cdot \theta$$

Für die x-Komponente der Magnetisierung M_x

$$M_x = \frac{N \cdot m \cdot \sin\theta}{V}$$

GRAFISCHE LÖSUNG:



Grenzfall:

B „klein“, d.h. $\theta \ll \pi$ $(\cos\theta = 1, \sin\theta \approx \theta)$

$$\Rightarrow \theta = \frac{mB}{D}$$

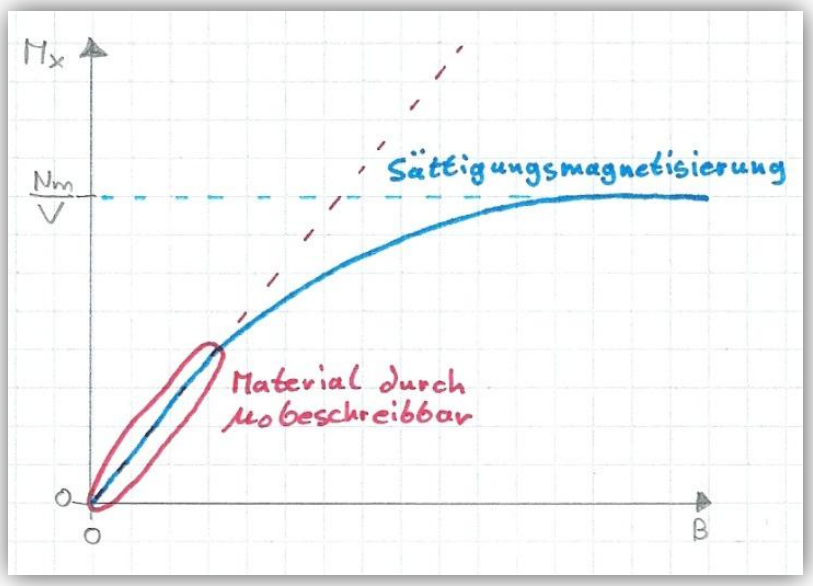
$$\Rightarrow M_x = \frac{Nm^2}{VD} B \sim B$$

Grenzfall:

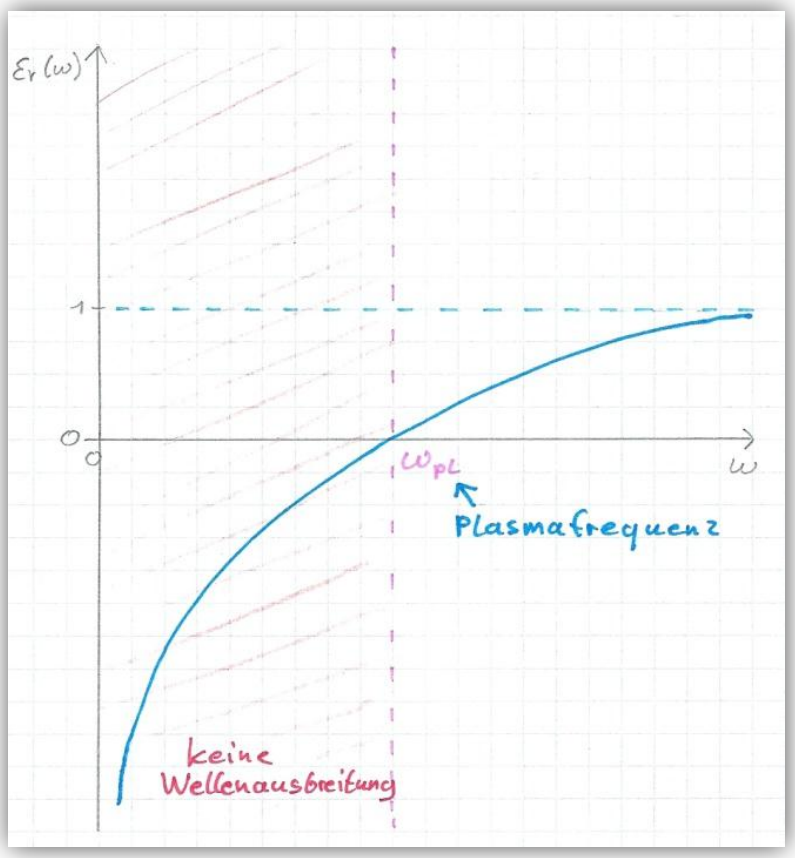
B „groß“, d.h. $\theta = \frac{\pi}{2}$

$(\sin\theta \approx 1, \cos\theta \approx 0)$

$$\Rightarrow M_x = \frac{Nm}{V} = const.$$



NICHTLINEAR!



Metalle: Rücktreibende Kraft $= 0$ („freie Elektronen“)

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 0$$

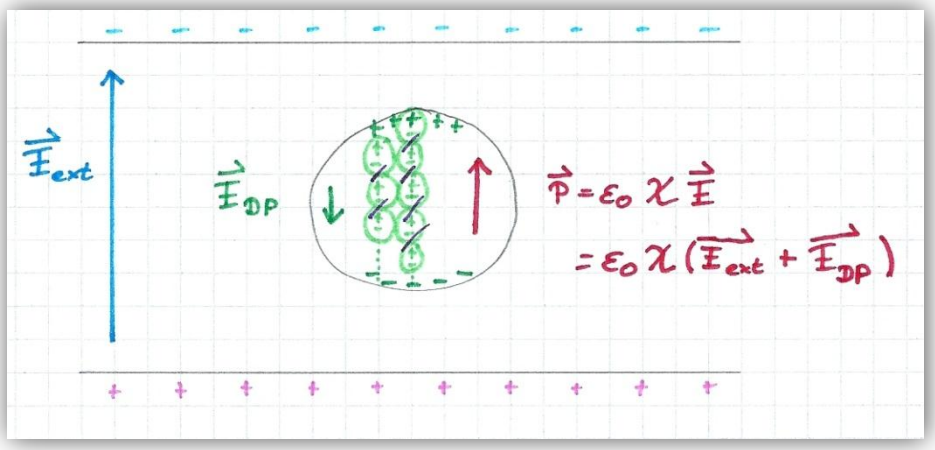
9.1 DER DEPOLARISATIONSFAKTOR

Bisher hatten wir stets angenommen, dass $\vec{E} = \overrightarrow{E_{ext}}$ (bzw. $\vec{B} = \overrightarrow{B_{ext}}$) gilt, d.h., dass das Feld im Material gleich dem Feld außerhalb des Materials ist, z.B. $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{D}$ ist dabei das von „externen“ Ladungen hervorgerufene Feld, $\vec{P}$ das von „internen“ Ladungen hervorgerufene Feld und $\vec{E}$ das Feld im Medium ($\neq E_{ext}$)

BEISPIEL: Kugel im Plattenkondensator



mit dem Depolarisationsfeld $\overrightarrow{E_{DP}}$

Das Depolarisationsfeld $\overrightarrow{E_{DP}}$ wird durch die Summe aller Dipole hervorgerufen. Es ist (im Beispiel) $\overrightarrow{E_{ext}}$ entgegengerichtet, zeigt also in $-\vec{P}$-Richtung

$$\overrightarrow{E_{DP}} = -\underline{\underline{N}}\vec{P} \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

mit der Depolarisationsmatrix $\underline{\underline{N}}$

$$\underline{\underline{N}} = \begin{pmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{pmatrix}; [N] = 1$$

die die Depolarisationsfaktoren N_x, N_y und N_z enthält.

Damit gilt:

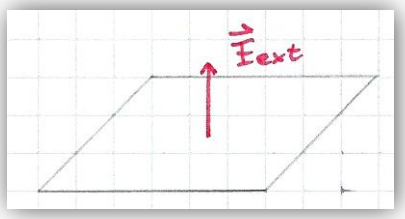
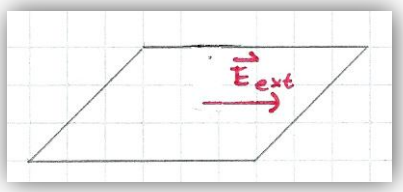
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \chi \left(\overrightarrow{E_{ext}} + \overrightarrow{E_{DP}}\right) = \epsilon_0 \chi \left(\overrightarrow{E_{ext}} - N\vec{P} \cdot \frac{1}{\epsilon_0}\right)$$

es gelte dabei der Spezialfall $\underline{\underline{N}} = N \cdot \underline{\underline{1}} = N$

$$\Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \cdot \frac{\chi}{1 + N \cdot \chi} \cdot \overrightarrow{E_{ext}}$$

Der Depolarisationsfaktor N ist im allgemeinen nicht einfach zu bestimmen.

BEISPIELE (ohne Herleitung)

Form	Depolarisationsfaktor N
Kugel	$N = \frac{1}{3}$
Dünne Platte 	$N = 1$
Dünne Platte 	$N = 0$
Langer dünner Zylinder	$N = \frac{1}{2}$
Langer dünner Zylinder	$N = 0$