Klassische Experimental-Physik

Elektrodynamik

Skript von Philipp Dittrich,
basierend auf der Vorlesung
von Prof. M. Wegener
Sommersemester 2019

Zum Drucken weißen Rand einfügen.
Notability-Version dieses Skripts auf https://physik.leech.it

ACHTUNG: Dieses Skript ist ausschließlich in der Vorlesung entstanden, wo ich nicht immer zu 100% konzentriert war. Abschreibefehler sind also möglich! Alle Formeln sind daher mit einer gewissen Skepsis zu lesen!

KEINE GARANTIE AUF DIE RICHTIGKEIT DER FORMELN!

Kapitel 3: Ladungen und Ströme

Ladung ist eine Eigenschaft von Materie.

Ladung ist quantisiert, d.h.

$$Q = n \cdot e \,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

mit der Elementarladung ..... $e = 1.6021... \cdot 10^{-19}\,C$

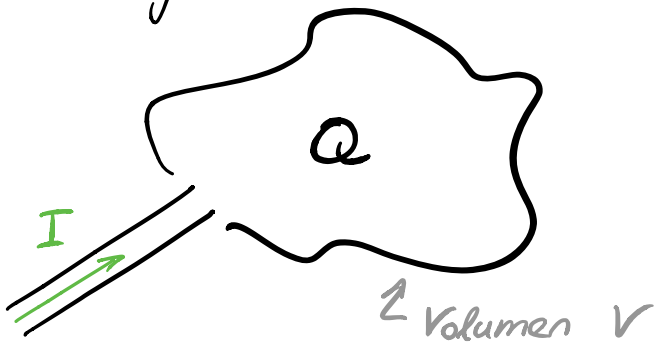
mit ..... $1\,C := 1\,As$.

Ladung „verschwindet" nicht einfach.

> Im abgeschlossenen System ist Ladung eine Erhaltungsgröße.

(später Folge der Maxwellschen Glu.)

Zeitliche Änderung von Ladungen resultiert in Strömen I.



Betrachte Zeitintervall Δt:

$$I := \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

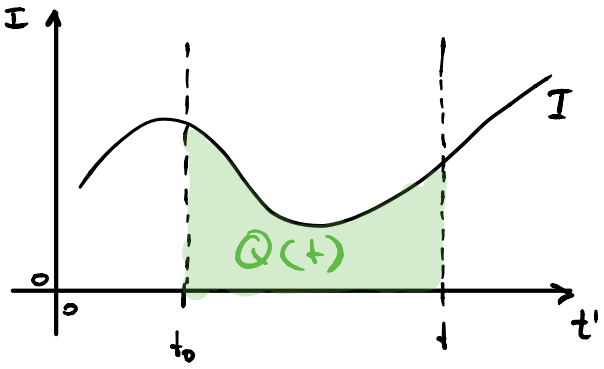
oder für infinitesimal kleine Zeitintervalle:

$$I := \frac{dQ}{dt}$$

$$[I] = \frac{As}{s} = \frac{C}{s} = A$$

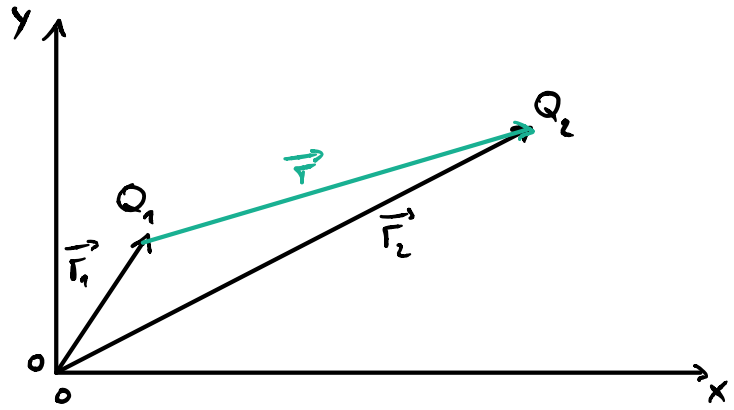
Umkehrung dieses Zusammenhangs:

$$Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(t')\,dt'$$



Coulombsches Kraftgesetz:

Betrachte zwei punktförmige Ladungen Q_1, Q_2



$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Kraft auf Ladung bzw. Masse #2

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

(später Folge der maxwellschen Gleichungen)

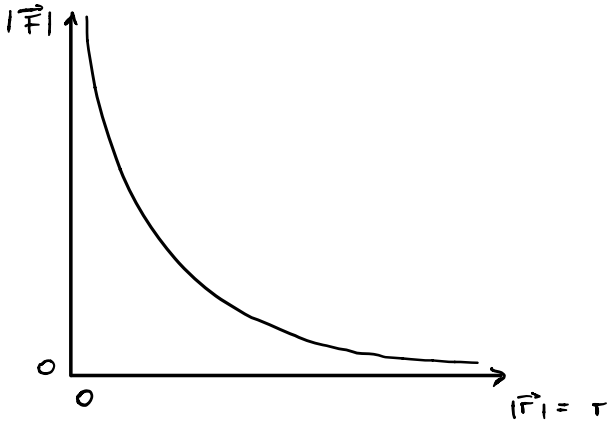
ε_0 ist eine Naturkonstante, die „Dielektrizitätskonstante des Vakuums", gegeben durch $\varepsilon_0 = 8.854\ldots \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

- gleichnamige Ladungen stoßen sich ab ⊕ ⟷ ⊕
- ungleichnamige Ladungen ziehen sich an ⊕ ⟶⟵ ⊖

⚠ Vorzeichen ANDERS als beim Gravitationsgesetz ⚠

25.4.2019

grafisch:



3.1 Die Spannung und das Ohmsche Gesetz

Ladungstrennung:

$$W_{1,2} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}^2|} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{\vec{F}} \cdot d\vec{r}$$

($Q_1 = Q_2 = Q$)

Wir definieren die Spannung U_{12}

$$U_{12} := \frac{W_{12}}{Q_2 = Q} \quad \text{oder} \quad \boxed{U := \frac{W}{Q}}$$

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{J}{As} = \frac{Ws}{As} = \frac{W}{A} =: V \quad (\text{Volt})$$

Sind ⊕ und ⊖ Ladungen getrennt an zwei Orten, dann spricht man von einer Spannung zwischen diesen Orten (bzw. Punkten).
Verbinden wir diese beiden Punkte, dann fließt ein (elektrischer) Strom.

Technische Stromrechnung:

In passiven Bauelementen fließt der Strom von ⊕ nach ⊖.

Bei diesem Ladungstransport wird i. A. Arbeit verrichtet.

$$W = Q \cdot U$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cdot U = I \cdot U =: P$$

$$\Rightarrow \boxed{P = U \cdot I} \qquad [P] = W = V \cdot A \quad (\text{Watt})$$

P ist die schon in der Mechanik eingeführte Leistung.

Das Ohmsche Gesetz

In vielen Systemen findet man phänomenologisch den Zusammenhang zwischen Spannung U und Strom I.

$$\boxed{U = R \cdot I} \qquad [U] = V = [R] \cdot A$$

$$\Rightarrow [R] = \frac{V}{A} =: \Omega \quad (\text{Ohm})$$

R ist der <u>Ohm'sche Widerstand.</u>

Symbol:

Ein makroskopischer Widerstand ist mit einer mikroskopischen Dämpfung verknüpft.

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} = (R \cdot I) \cdot I = R \cdot I^2$$

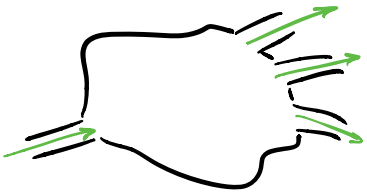
Der Widerstand R hängt auch von der Temperatur ab.

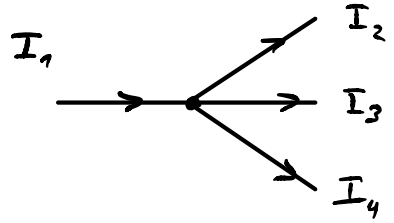
3.2 Die Kirchhoffschen Regeln

Die 1. Kirchhoff'sche Regel (Knotenregel)

> Die Summe aller Ströme eines Stromkreises ist gleich Null.

Hierbei sind die Zuflüsse positiv und die Abflüsse negativ zu zählen.





Es gilt Ladungserhaltung. Wir betrachten ein Zeitintervall Δt.

$$\Delta Q_0 = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 - \Delta Q_3 - \Delta Q_4 \qquad | \div \Delta t$$

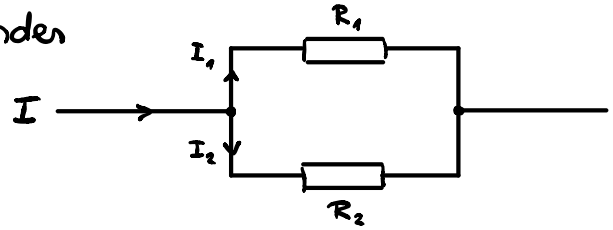
$$\stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{wegen Stationarität}$$

$$\Delta t \to 0$$

$$0 = I_1 - I_2 - I_3 - I_4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_1 - \sum_n I_n = 0}$$

Beispiel: Parallelschaltung von Widerständen



Knotenregel: $I = I_1 + I_2$

$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

$$= \frac{U}{R_{ges}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$ Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_2}{R_2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

2. KIRCHHOFFsche Regel (Maschenregel)

> Die Summe aller treibenden Spannungen in einer Masche ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle in der gleichen Masche.

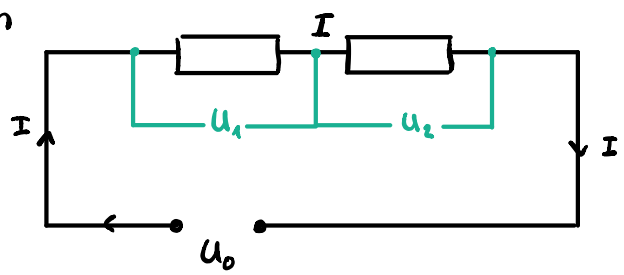
Voraussetzungen: Energieerhaltung, Stationarität

$\Rightarrow W = Q \cdot U$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n U_n = 0}$$

Hierbei werden Quellen positiv gezählt, Spannungsabfälle negativ.

Beispiel: Serienschaltung von Widerständen



Maschenregel: $U_0 = U_1 + U_2$

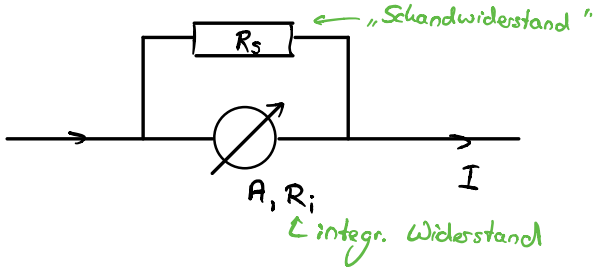
$= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$

$= R_{ges} \cdot I$

$$\Rightarrow \boxed{R_{ges} = R_1 + R_2}$$ Serienschaltung

Beispiel: Bereichserweiterung von Messinstrumenten

Ampèremeter mit 1mA Vollausschlag möchte Ströme bis 1A messen.



$U_i = U_S = R_S \cdot I_S = R_i \cdot I_i$

$I = I_i + I_S \Rightarrow I_S = I - I_i$

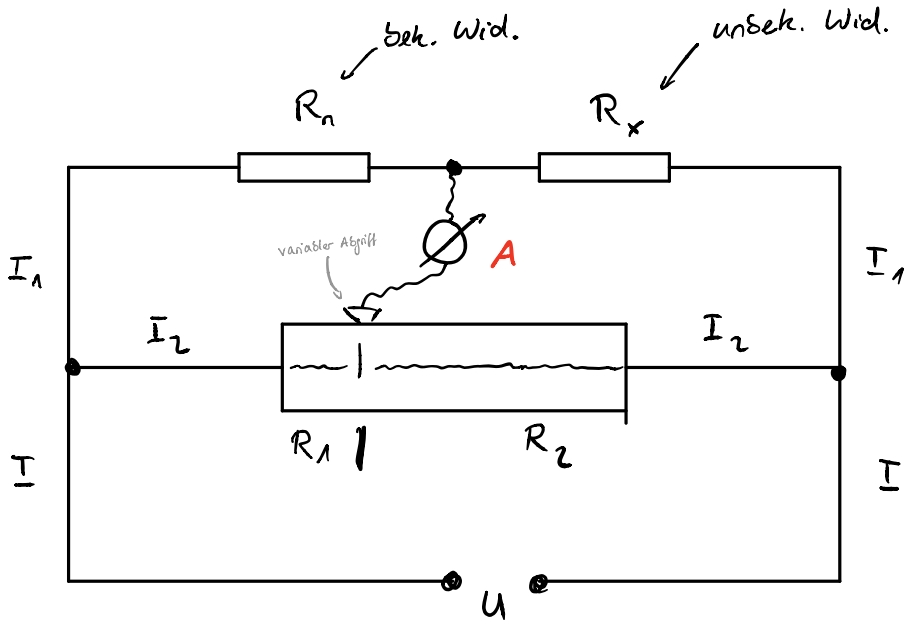
$$\Rightarrow R_S = \frac{R_i \cdot I_i}{I_S} = \frac{R_i \cdot I_i}{I - I_i}$$

$$\Rightarrow R_S = \frac{R_i}{\frac{I}{I_i} - 1}$$

z.B. $R_i = 1\,\Omega$, $I = 1A$, $I_i = 1mA$ $\Rightarrow$ $R_S = 1m\Omega$

7.5.19

Beispiel: Wheatstonesche Brücke



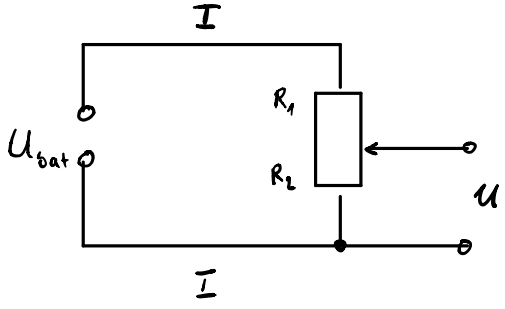
kein Stromfluss durch Amperemeter (nach Einstellung)

$$R_n I_1 + R_1 I_2 = 0$$
$$R_x I_1 + R_2 I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_n I_1 = -R_1 I_2}{R_x I_1 = -R_2 I_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_x = R_n \cdot \frac{R_2}{R_1}}$$

Beispiel: Potentiometerschaltung



$$U = R_2 I \; ; \quad U_{bat} = (R_1 + R_2) \cdot I$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = R_2 \frac{U_{bat}}{R_1 + R_2}}$$

Kapitel 4: Das zeitl. konstante E-Feld

4.1 Das elektr. Feld und das elektrostat. Potenzial

Der Feldbegriff: Einer Größe f mit $f = f(x, y, z, t)$ ist ein Feld.

Bei explizit ortsabh. Größen spricht man von einem inhomogenen Feld.

Elektrische Feldstärke:

$$E := \frac{F}{Q}$$

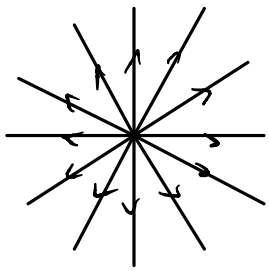
Damit resultiert die Feldstärke der Ladung Q_1 nach dem Coulombschen Gesetz.

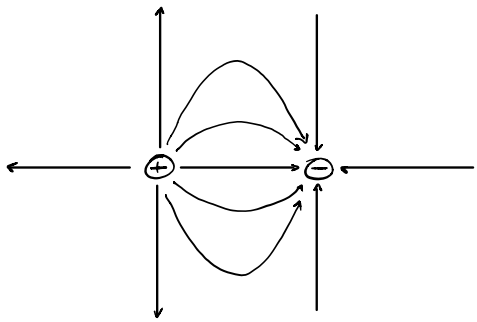
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\underbrace{Q}_{=Q_2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{E}(x, y, z, t)$$

Visualisierung durch Feldlinien

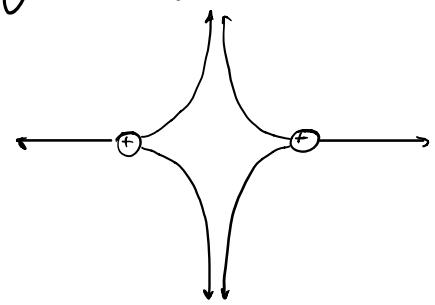
- Das Feld steht tangential zu den Feldlinien
  $\Rightarrow$ Feldlinien kreuzen sich nicht
- Die Feldliniendichte ist ein Maß für den Betrag des Vektors
- Der Richtungspfeil zeigt von ⊕ nach ⊖

Beispiel: Feld einer Punktladung ; Feld zweier ungleichnamiger Ladungen

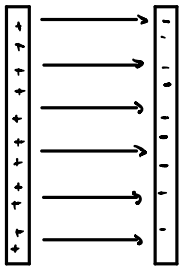




Feld zweier gleichnamiger Ladungen



homogenes Feld



Das elektrische Potenzial:

Trenne zwei Ladungen, Arbeit: $W_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

$$= -Q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

Beispiel: Coulombsches Gesetz

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad U_{12} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Diese Größe hängt vom momentanen Ort $\vec{r}_2$ der Ladung ab, aber auch von $\vec{r}_1$.

Definition: $\vec{r}_1 \longrightarrow \infty$

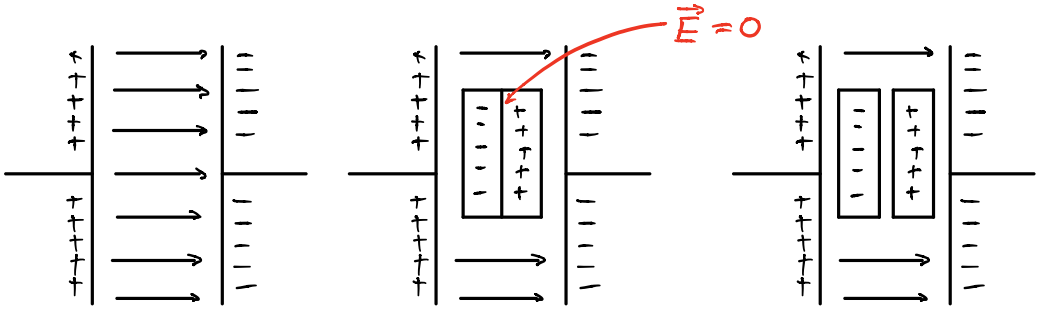
$$\varphi(r_2) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2} \quad \Rightarrow \quad U_{12} = \varphi(r_2) - \varphi(r_1)$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{-\infty}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -\operatorname{grad}(\varphi)$$

4.2 Die Verschiebungsdichte und die 1. Maxwellsche Gleichung

Influenz



Plattenkondensator

el. Flussdichte

$\Rightarrow$ Flächenladungsdichte = el. Verschiebungsdichte D

$\Rightarrow \quad \frac{Q}{A} = D \quad \Rightarrow \quad D \cdot A = Q \quad \Rightarrow \quad [D] = \frac{As}{m^2}$

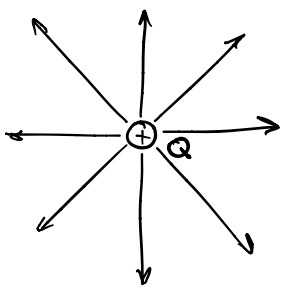
Wir postulieren:

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

1. MAXWELL'SCHE GLEICHUNG

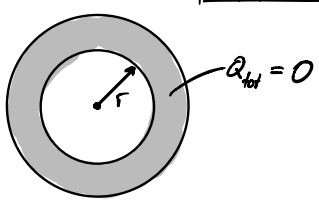
innerhalb der gesch. Fläche F befindl. Ladung

Herleitung:

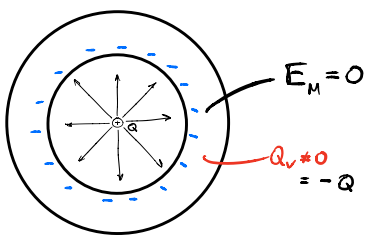


und metallische Hohlkugel:

9.5.2019



$\Rightarrow$



Verschiebungsdichte $\quad D := \frac{Q_V}{A} = \frac{Q_V}{4\pi r^2}$

Elektrische Feldstärke $\quad E = \frac{1}{\varepsilon_0} D$

integriere Normalkomponente von $\vec{D}$ über die Oberfläche F

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

eine GESCHLOSSENE Fläche

von der Fläche F eingeschlossene Ladung

mit $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}}$ im Vakuum

und $\varepsilon_0 \approx 8{,}8 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ (Naturkonstante)

mit $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}}$ in „vielen" Materialien

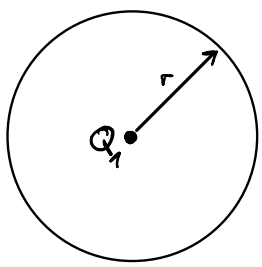
$[\varepsilon_r] = 1$ (relative elektr. Permittivität, Materialspezifisch)

und $\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{E}}$ $\hat{=}$ Kraft auf die Ladung q

Beispiel: Feld einer Punktladung

Können wir das Coulombsche Kraftgesetz aus der 1. Maxwellschen Gleichung herleiten?

$$\oint_{\text{KUGEL}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$



konzentrische Kugel im Vakuum

Isotropie $\Rightarrow$ „$E(\vec{r}) = E(r)$"

$\Rightarrow$ Radialkomponente = Normalkomponente

$$E \cdot A = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = Q_2 \cdot E = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}} \quad \hat{=} \text{ Normalkomponente } (= \text{Radialkomp.})$$

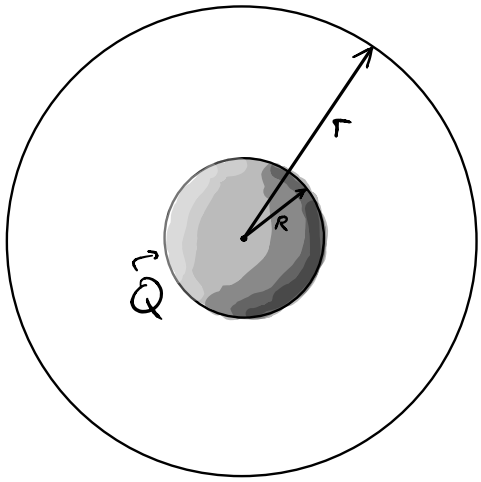
∇_0 Tangentialkomponente von $\vec{E} \equiv 0$,

sonst $\text{rot}(\vec{E}) \neq 0$ und damit $\text{rot}(\vec{F}) \neq 0$ $\Rightarrow$ nicht konservativ!

(Energiegewinn in tangentialer Richtung wäre möglich (perpetuum mobile) $\lightning$)

Beispiel: Feld einer homogen geladenen (massiv) Kugel (im Vakuum) (≠ geladene Metallkugel ⇔ Ladung nur auf Oberfl. ⇔ „Hohlkugel")

Betrachtung Außenraum ($r \gg R$)

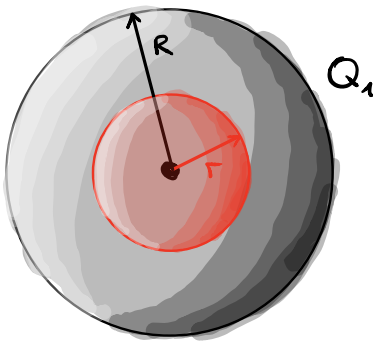


$$\oint_{KUGEL} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} = E(r)\, 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}$$

(identisch zum Feld einer Punktladung)

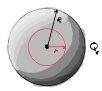
Im Innenraum ($r \leq R$)



Q_r ist die Ladung, die innerhalb der Kugel mit Radius r liegt

$$\frac{Q_r}{Q_1} = \frac{r^3}{R^3} \quad \text{(Volumen)}$$

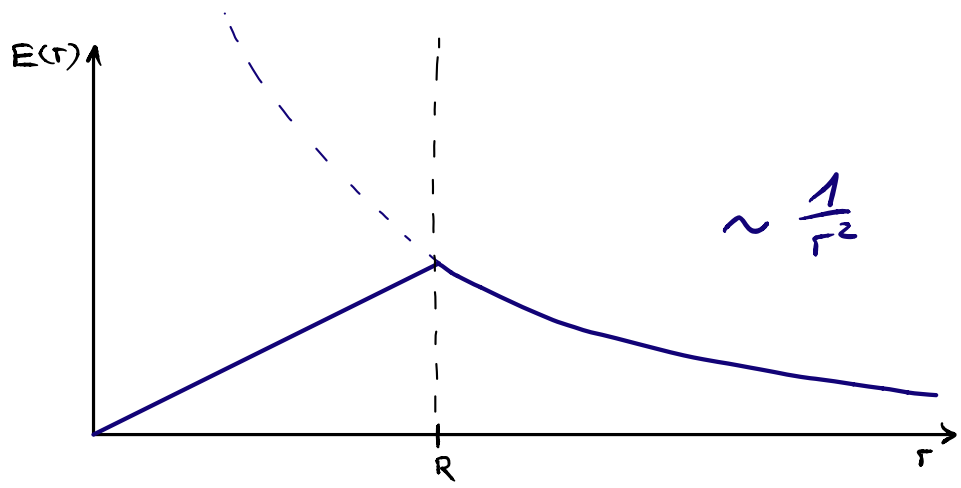
$$Q_r = Q_1 \left(\frac{r}{R}\right)^3$$



1. Maxwellsche Gleichung (im Vakuum):

$$\oint_{KUGEL} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_r}{\varepsilon_0} \quad \Longleftrightarrow \quad E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{Q_1 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}} \quad \text{(linearer Anstieg)} \quad \text{im Innenraum}$$

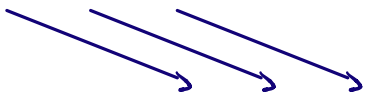


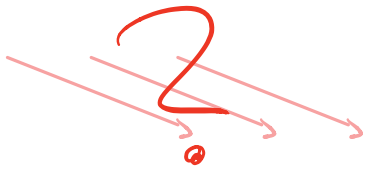
4.3 Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Vakuum, $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ ($\varepsilon_r = 1$)

Material, $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ ($\varepsilon_r \neq 1$)

$\vec{E}$ visualisiert

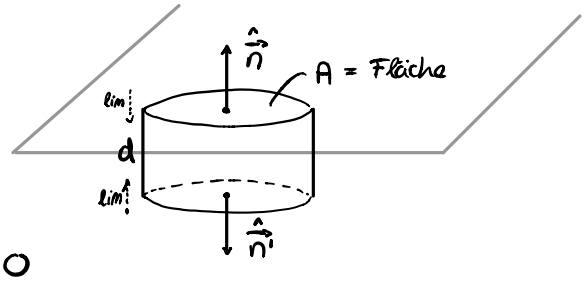




zeige:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Normalkomp. von } \vec{D} \text{ stetig}$$

wähle Zylinder als Integrationsfläche



Zuerst Limes $d \to 0$, danach $A \to 0$

$$\Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D_n \cdot A - D_n' \cdot A = 0$$

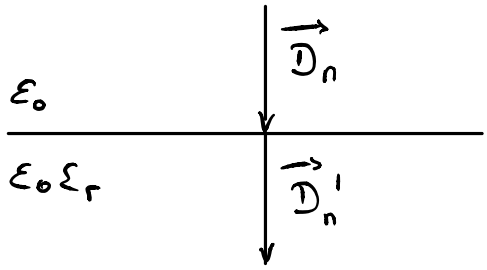
$$\Rightarrow D_n = D_n'$$

$\Rightarrow$ Normalkomp. von $\vec{D}$ stetig ✓

14.5.19

Naber rocks the house (VL von Hrn. Naber in Vertretung)

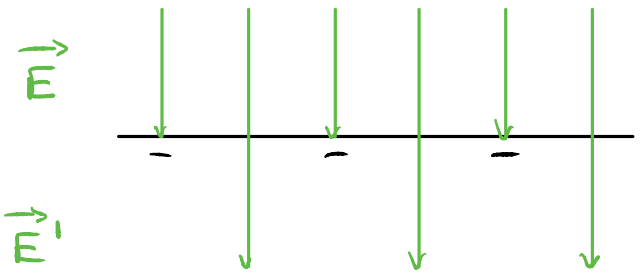
Konsequenz: Die Normalkomponente von $\vec{E}$ ist nicht stetig.



$D_n = D_n'$

Denn: $E_n = \frac{D_n}{\varepsilon_0}$, $E_n' = \frac{D_n'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

Grund: Das el. Feld wird durch die induzierten Ladungen an der Grenzfläche geändert (hier geschwächt).



ε_0 (Vakuum)

$\varepsilon_0 \varepsilon_r$ (Material)

Die Dichte (Zahl) der Feldlinien bleibt für $\vec{D}$ erhalten.

Sie wird durch induzierte Ladungen an der Grenzfläche NICHT geändert.

$\Rightarrow$ 1. Maxwellsches Gesetz

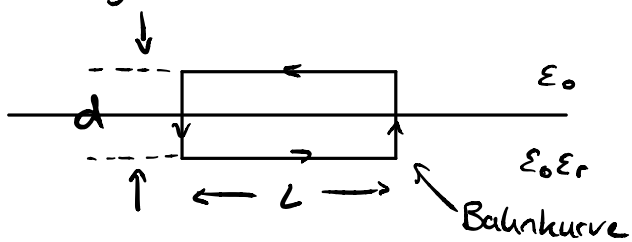
zur Tangentialkomp.:

Die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ ist stetig.

Beweis: Mittels Konservativität des Kraftfeldes

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 = Q \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Wähle folgenden Weg:

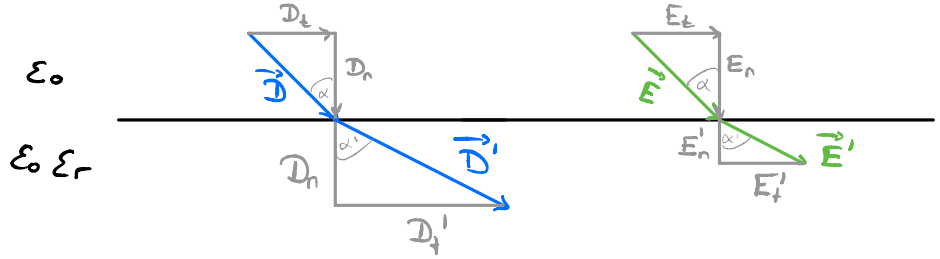


Limes $d \to 0$:

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = \vec{E}_t \cdot L - \vec{E}_t \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_t = \vec{E}_t'$$

Konsequenz: Die Tangentialkomponente von $\vec{D}$ ist <u>nicht</u> erhalten, da

$$D_t = \varepsilon_0 E_t \quad ; \quad D_t' = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_t'$$



Beispiel: Übergang Vakuum – Metall

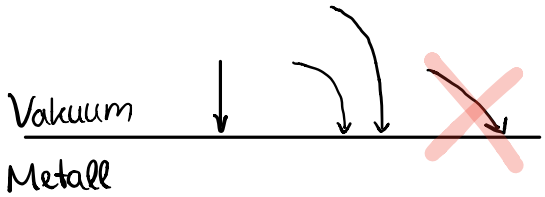
In einem idealen Metall (mit frei beweglichen e^-) gilt im stationären Zustand $\vec{E} = 0$ (sonst würden so lange Kräfte wirken, bis sich ein stationärer Zustand einstellt)

$$E_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_t' = 0$$

d.h. die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ bzgl. der Metalloberfläche ist Null

$\Rightarrow$

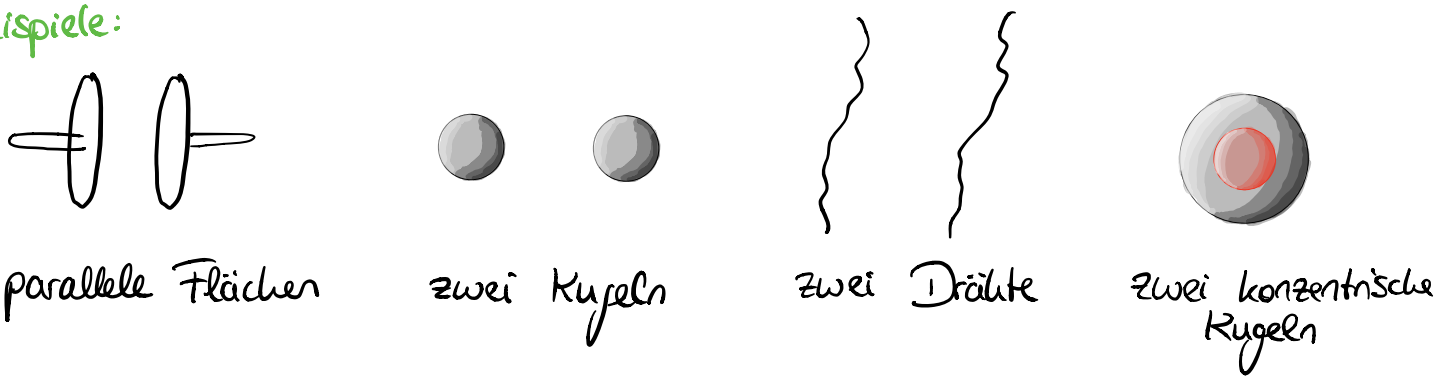
> Die Feldlinien stehen immer senkrecht auf der Metalloberfläche.



4.4 Der Kondensator und seine Kapazität

Allgemein: zwei gegeneinander isolierte, beliebig geformte Leiterflächen werden als Kondensator bezeichnet.

Beispiele:



parallele Flächen | zwei Kugeln | zwei Drähte | zwei konzentrische Kugeln

zwischen den Leitern herrsche eine Potenzialdifferenz V.

In der Regel wird eine der beiden Flächen geerdet; d.h. $\phi_0 = 0$.

Auf der anderen wird eine Ladung Q aufgebracht bei der Potenzialdifferenz $U = \phi_1 - \phi_0$.

Dann wird die <u>Kapazität</u> definiert als

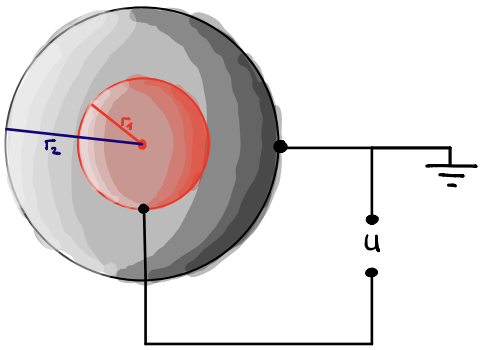
$$C = \frac{Q}{U} \qquad [C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} =: F \quad \text{(Farad)}$$

Beispiel: Kapazität eines Kugelkondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

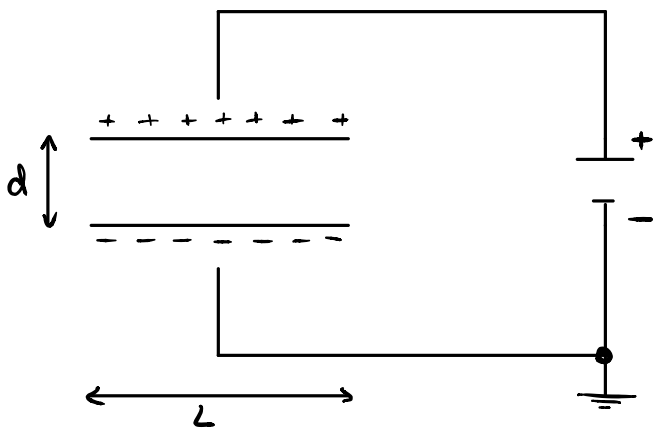
↖ früher abgeleitet

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$



Die Kapazität wird bestimmt durch die Geometrie der Anordnung und durch die dielektrische Konstante ε_r.

Beispiel: Kapazität eines Plattenkondensators



$d \ll L$

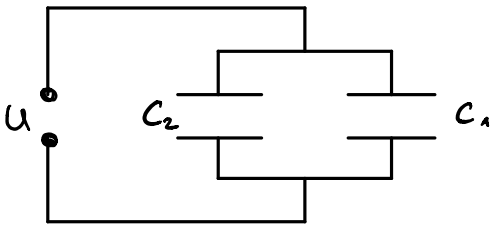
$\Rightarrow$ homogenes Feld

$E = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad U = -\int_d^0 E\,dx = E \cdot d$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{D \cdot A}{E \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} \quad \checkmark$$

bzw. allgemein $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$ in dielektrischen Materialien

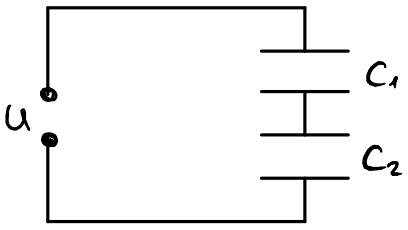
Beispiel: Parallelschaltung von Kapazitäten



$$C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{C_1 U + C_2 U}{U}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_{ges} = C_1 + C_2}$$

Beispiel: Serienschaltung von Kapazitäten



$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

$$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$= \frac{Q}{C_{ges}}$$

mit $Q_1 = Q_2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Ableitung des Ohm'schen Gesetzes

16.5.19

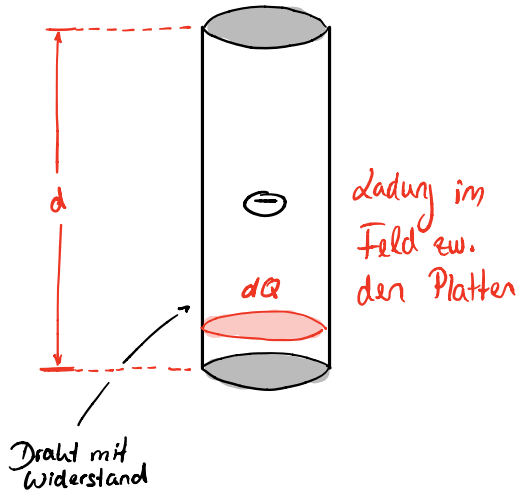
Draht, analog Plattenkondensator

Elektrisches Feld E = const.

also ist auch die Kraft konstant

auf ein e^- mit $Q = -e$

$$F = -e \cdot E = -e \cdot \frac{U}{d}$$



Zusammenhang $v \leftrightarrow I$: Im Zeitintervall dt tritt am Drahtende die Ladung dQ aus.

$$\frac{dQ}{Q_{ges}} = \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad dQ = \underbrace{\frac{Q_{ges}}{V}}_{=:\rho} \cdot A \cdot dx \quad \text{mit} \quad [\rho] = \frac{As}{m^3}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{dQ}{dt} = \rho \cdot A \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \rho \cdot A \cdot v}$$

Nur elektrostatische Kraft: $m\dot{v} = F = -e \cdot E$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{e \cdot E}{m} \cdot t$$

$$\Rightarrow I = I(t) = -\rho \cdot A \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t$$

? Ohmsches Gesetz? ↯

Idee: Stöße im Leiter sind wichtig

$\Rightarrow$ phänomenologisch als Stokes'sche Reibung

Elektrostat. Kraft + Reibung: $m\dot{v} = F = -eE - \gamma v$

stationäre Lösung: $v = \frac{-eE}{\gamma} = -\frac{e \cdot U}{\gamma \cdot d}$

also: $I = \rho \cdot A \left(-\frac{eE}{\gamma}\right) = -\frac{\rho \cdot A \cdot e}{\gamma \cdot d} U = \frac{U}{R}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = -\frac{\gamma \cdot d}{e \cdot A \cdot \rho}} > 0, \text{ denn } \rho < 0$$

OHMSCHES GESETZ

$R \sim \gamma$

Widerstand und Reibung sind eng verknüpft

4.5 Der Energieinhalt des elektrischen Feldes

Für die Energie W haben wir für eine Ladung Q definiert:

$$W = U \cdot Q \quad \text{für} \quad U = \text{const.}$$

Wir verallgemeinern:

$$\boxed{W = \int U(Q)\, dQ}$$

Beispiel: Kondensator

$$W = \int \underbrace{\frac{Q}{C}}_{U(Q)} dQ = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{oder mit} \quad Q = C \cdot U$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} C U^2$$

Beispiel: Plattenkondensator

$$U = E \cdot d \quad , \quad C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{\cancel{d}} E^2 \cancel{d^2}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(Ad)}_{\text{Volumen des Plattenkond.}} D \cdot E$$

oder für die Energiedichte $w := \frac{W}{V}$ $\qquad [w] = \frac{J}{m^3}$

$$\boxed{w_{el} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}}$$

„Energie ist im elektrischen Feld gespeichert"

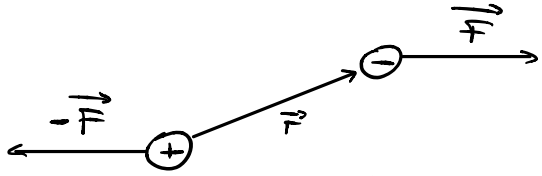
4.6 Elektrische Dipole

Unter einem stationären elektrischen Dipol wollen wir zwei starr miteinander verbundene ungleichnamige Punktladungen verstehen.

Wir definieren das Dipolmoment.

Q alleine wäre ein Monopolmoment.

Dipolmoment: $\vec{p} = Q \cdot \vec{r}$



$\vec{r} = |\vec{r}| = \text{const.}$

Es wirkt keine Kraft auf einen Dipol,

Es wirkt aber ein Drehmoment:

$\vec{E} = \text{const.}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{E} \cdot Q = \vec{p} \times \vec{E}$$

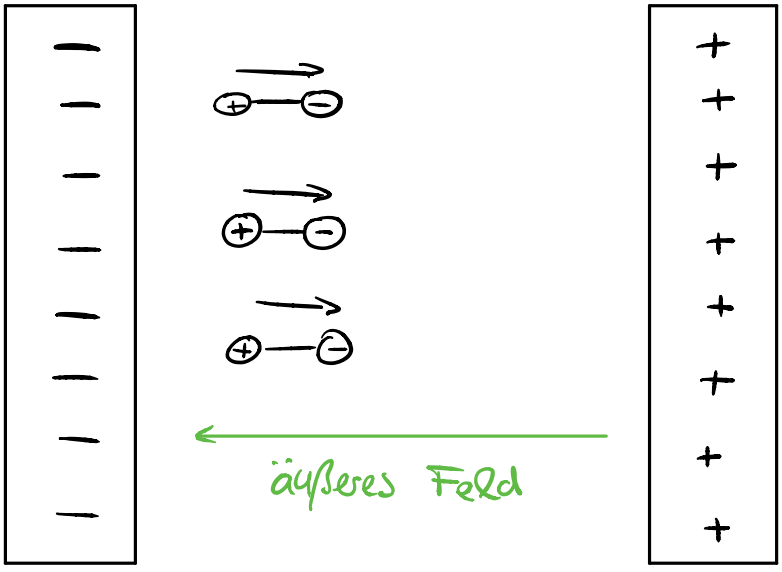
$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

Drehmoment auf Dipol

Dipole richten sich unter Einwirkung des elektr. Feldes aus.

$\Rightarrow$ Abschirmung

$\Rightarrow$ ε_r



Kapitel 5: Das zeitlich konstante Magnetische Feld

5.1 Die 3. und 4. Maxwellsche Gleichung

Bisher Kraft $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$

Also ruhende Ladungen $\Rightarrow$ Kräfte

? bewegte Ladungen (Ströme) – Ja! magnetische Felder

Die relevanten Felder sind $\vec{B}$ und $\vec{H}$.

Für das $\vec{B}$-Feld gibt es eine ähnliche Glu. wie für das $\vec{D}$-Feld:

$$\oint_F \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

3. Maxwellsche Gleichung

$\Rightarrow$ Es gibt keine magnetischen Monopole (Ladungen)!

Berechnung der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ durch das Durchflutungsgesetz (4. Maxwellsche Gleichung):

$$\oint_{\text{Rand}} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$

4. Maxwellsche Gleichung

I: von der Fläche eingeschlossene Ströme

Summe der Ströme, die senkrecht durch die Fläche A durchstoßen

$$[H] = \frac{[I]}{[r]} = \frac{A}{m}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$ im Vakuum

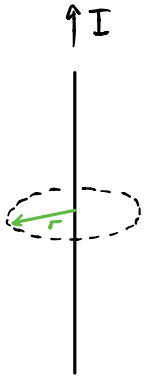
$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$ in vielen Materialien

$$[\mu_0] = \frac{Vs}{Am} \quad ; \quad [\varepsilon_0] = \frac{As}{Vm} \quad \Rightarrow \quad [B] = [\mu_0] \cdot [H] = \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{As}{Vm}$$
$$= \frac{Vs}{m^2} = T \text{ (Tesla)}$$

μ_0 ist eine Naturkonstante, ihr Zahlenwert ist

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

Beispiel: Feld eines langen, dünnen, stromdurchflossenen Drahtes | Di, 21.5.2019

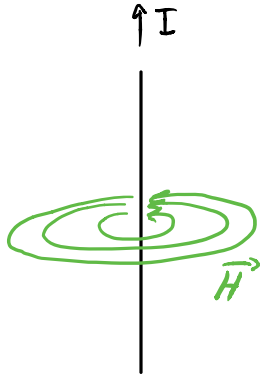


Wähle einen Kreis als Integrationsweg. Dann ist das Problem zylindersymmetrisch $\Rightarrow$ keine Winkelabhängigkeit!

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \quad \Leftrightarrow \quad H \cdot 2\pi r = I$$

($\vec{H}$: const. (Symmetrie))

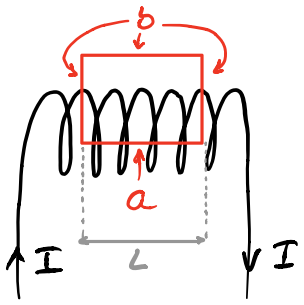
$$\Rightarrow \quad \boxed{H_T(r) = \frac{I}{2\pi r}}$$



Radialkomp. = 0 wegen 3. Maxwell-Gl.

Richtung von $\vec{H}$ durch Rechte-Hand-Regel.

Beispiel: Feld einer Zylinderspule mit N Windungen pro Länge ℓ



Der Integrationsweg umschließt N-mal den Strom I.

$$\oint \vec{H}\,d\vec{r} = N \cdot I$$

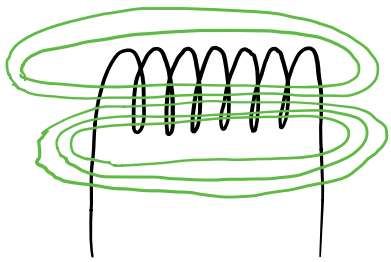
$$\Leftrightarrow \int_a \vec{H}\,d\vec{r} + \underbrace{\int_b \vec{H}\,d\vec{r}}_{\approx 0 \text{ (exp. verifiziert)}} = N \cdot I$$

$$\Rightarrow \quad H \cdot L = N \cdot I$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{N \cdot I}{\ell}} \quad \text{im Inneren der Spule}$$

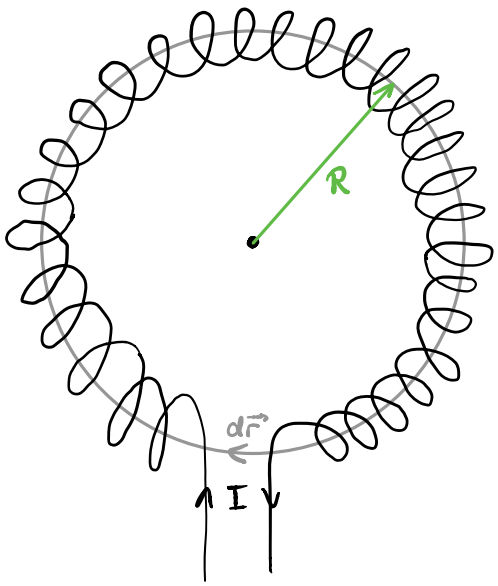
axiale Komponente von $\vec{H}$

Feldlinien:



$$\Rightarrow \quad B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{\ell} \quad \text{in Vakuum / Luft}$$

Beispiel: Magnetfeld einer ringförmigen Spule



Wähle Kreis mit Radius R durch Spulenmitte als Integrationsweg.

Symmetrie: $H \neq H(\varphi)$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = N \cdot I$$

$$H \cdot 2\pi R = N \cdot I$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{2\pi R}}$$

Azimutalkomponente von $\vec{B}$

$\hat{=}$ Feld einer „gekrümmten, langen Spule" mit $L = 2\pi R$

Das Gesetz von Biot - Savart

Gesucht: expliziter Ausdruck für $\vec{B}(\vec{r})$.

Analogie zum E-Feld:

Eine Punktladung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$

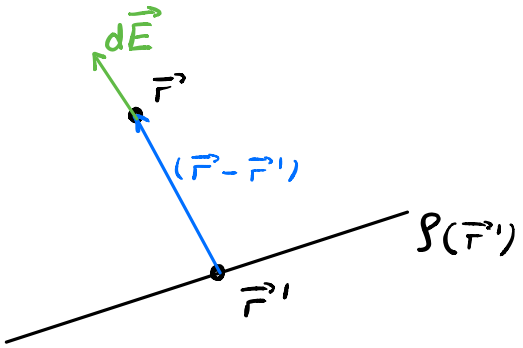
Viele Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$

Kontinuierliche Ladungsverteilung: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'$

mit Ladungsdichte $\rho = \frac{Q}{V}$

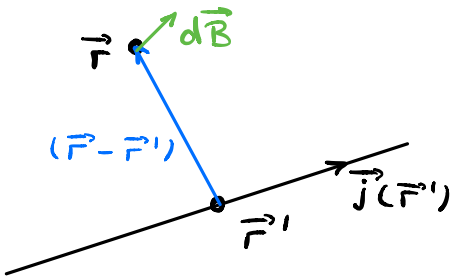
Beispiel: geladener Draht

$$d\vec{E} \sim \rho(\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}')$$



Analog Beispiel: stromdurchflossener Draht

$$d\vec{B} \sim \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')$$



Wir hatten $I = \rho \cdot A \cdot v$ und $\vec{j} = \frac{\vec{I}}{A}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{j} := \rho \cdot \vec{v}}$ $\quad [j] = \frac{A}{m^2}$

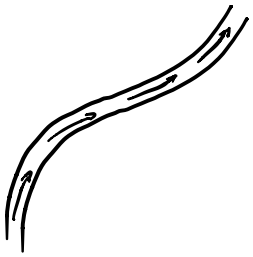
STROMDICHTE

Also in Analogie:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, dV'$$

GESETZ VON BIOT-SAVART

Für Stromfäden, d.h. dünne Drähte gilt $\vec{j}(\vec{r}')\, dV' = I \, d\vec{r}'$

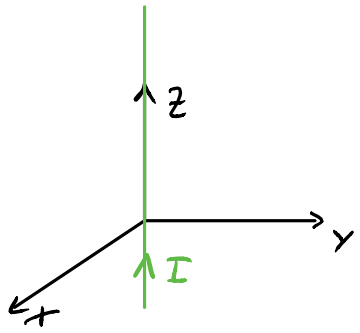


$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot-Savart für DÜNNE DRÄHTE

Beispiele: Spezialfälle

1) Feld eines langen, dünnen Leiters



Parametrisierung des Integrationsweges:

$$\vec{r}'(t) = (0, 0, t) \qquad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = (0, 0, 1)$$

$$d\vec{r}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \, dt$$

mit $(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' = (x, y, z - t) \times (0, 0, 1) \, dt$

$$\begin{pmatrix} y - 0 \\ 0 - x \\ 0 - 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} (y, -x, 0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x^2 + y^2 + (z-t)^2)^{3/2}}$$

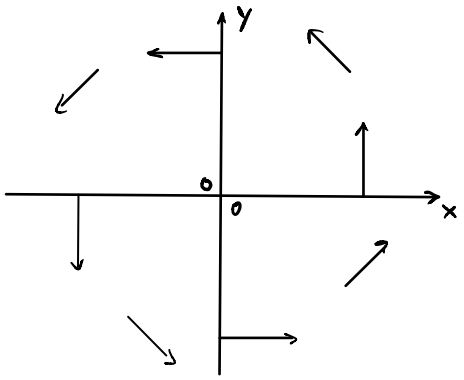
o.B.d.A. $z = 0$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} (y, -x, 0) \left(\frac{2}{x^2 + y^2} \right)$$

22.5.19

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{x^2+y^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad \checkmark \quad \text{wie gehabt}$$

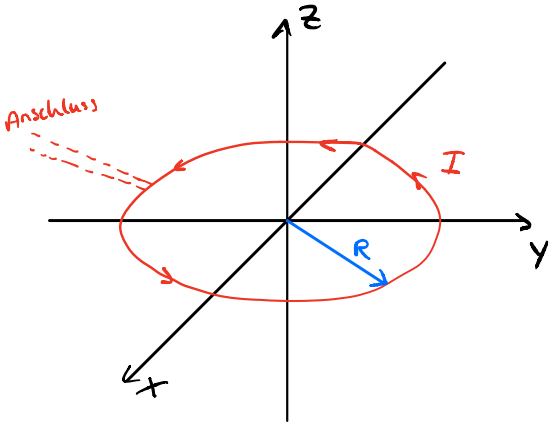


2) Feld einer Leiterschleife

Parametrisierung des Integrationsweges:

$$\vec{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0) \quad ; \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow d\vec{r}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} dt = R(-\sin t, \cos t, 0)\, dt$$



Betrachte Spezialfall: Feld auf z-Achse,

d.h. $x = y = 0$

mit: $(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' = (0 - R\cos t, 0 - R\sin t, z) \times (-R\sin t, R\cos t, 0)\, dt$

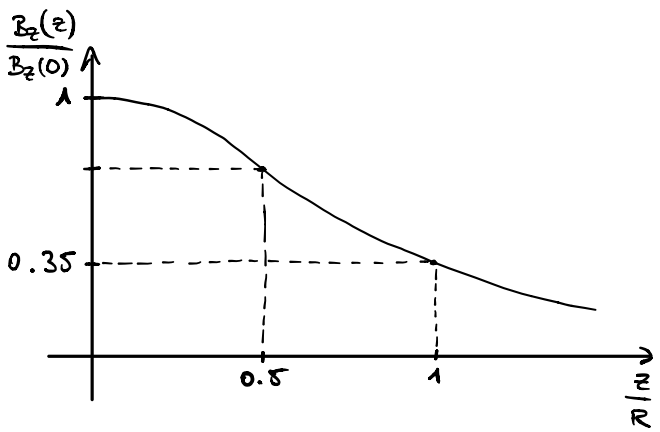
$$= (-zR\cos t, -zR\sin(t), z) \times (-R\sin t, R\cos t, 0)\, dt$$

$$= (-zR\cos t, -zR\sin t, \underbrace{-R^2\cos^2 t - R^2\sin^2 t}_{=-R^2})\, dt$$

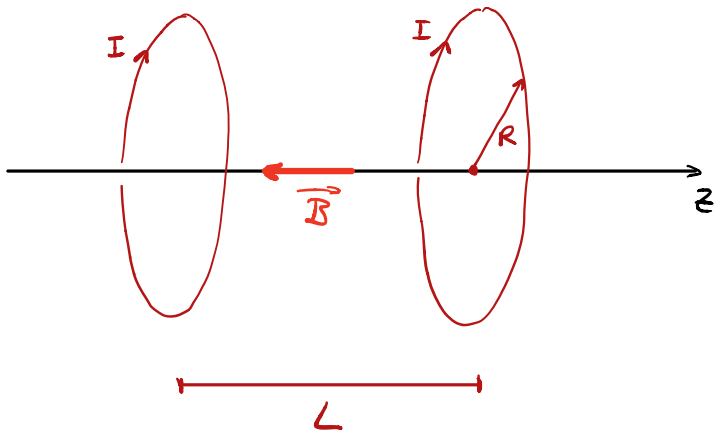
$$\vec{B}(t) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(zR\cos t, zR\sin t, R^2)}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad B_x = B_y = 0 \qquad (x = y = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^3}}$$



Helmholtz - Spulenpaar



Besonders homogenes Magnetfeld für $L = R$

5.2 Das Lorentzsche Kraftgesetz

Welche Kraft wirkt auf ein geladenes Teilchen (Ladung Q) im elektr. und magn. Feld?

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

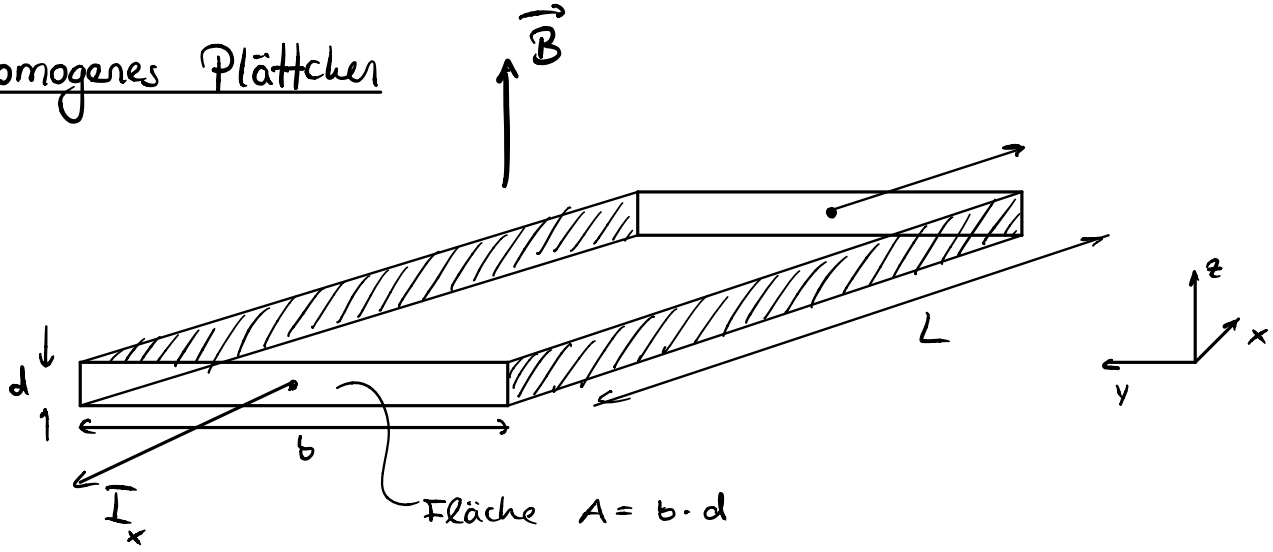
Lorentz-Kraft

$\Rightarrow$ Kraft steht senkrecht auf $\vec{v}$ und auf $\vec{B}$

5.2.1 Hall-Effekt

$\Rightarrow$ Messung von $\vec{B}$-Feldern, z.B. im Handy.

homogenes Plättchen



Kraft auf Ladungsträger $\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

$\Rightarrow$ $F_y = Q(v_z B_x - v_x B_z)$ mit $I_x = \rho \cdot A \cdot v_x$ (siehe Ohm'sches Gesetz)

($v_z = 0$)

$\Rightarrow$ $F_y = -Q \cdot \frac{I_x}{\rho \cdot A} \cdot B_z$

Somit werden Ladungen an die seitlichen Kontakte abgelenkt

$\Rightarrow$ el. Feld wird aufgebaut

Gleichgewicht beim stat. Zustand

$\vec{F} = 0 = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Hall-Spannung

also in y-Richtung: $0 = \cancel{Q \cdot E_y} - \cancel{Q} \cdot \frac{I_x}{\rho \cdot A} \cdot B_z = \frac{U_H}{b}$ (Plattenkondensator)

$\Rightarrow$ $U_H = b \cdot \frac{I_x}{\rho \cdot A} \cdot B_z$

mit $A = b \cdot d$

$\Rightarrow$ $\boxed{U_H = \frac{I_x \cdot B_z}{d} \cdot A_H}$ mit dem Hall-Koeffizienten $\boxed{A_H = \frac{1}{\rho}}$

Hallspannung

Der Hall-Koeffizient kann positiv oder negativ sein.

⇒ Nutzen zur exp. Bestimmung welche Ladungsträger zum Strom beitragen

In der Praxis nimmt man weder Metalle (ρ groß) noch Isolatoren ($\rho \to 0$), sondern Halbleiter.

Wir haben implizit „kleine" B_z angenommen !

oft: Hall-Widerstand $R_H = \frac{U_H}{I_x}$

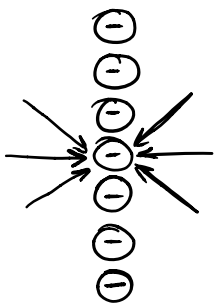
Wiederholung: Lorentz-Kraft | 28.5.19

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können von der Wahl des Inertialsystems abhängen.

Die Lorentz-Kraft $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ nicht!

Beispiel: Elektronenstrahl mit $\vec{v} = \text{const.}$

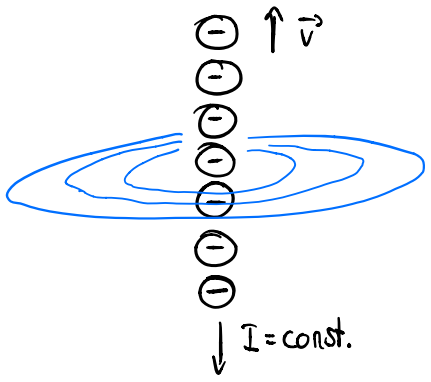
mitbewegtes System:



$\vec{E} \neq 0$

$\vec{B} = 0$

Laborsystem:

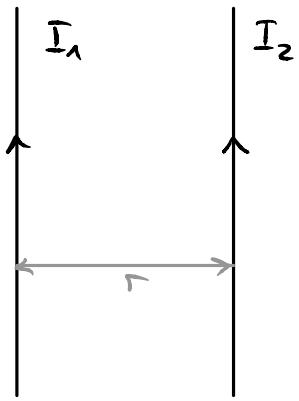


$E \neq 0$

$B \neq 0$

5.2.2 Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{v} \perp \vec{B}$$



mit Ohmschem Gesetz folgt $I = \rho \cdot A \cdot v$

$$F = Q \cdot \frac{I}{\rho \cdot A} \cdot B \qquad \text{mit} \quad \rho = \frac{Q}{V}$$

$$|F| = Q \cdot \frac{V}{Q \cdot A} \cdot I_1 \cdot B = L \cdot I_1 \cdot B$$

L ↑ Länge des Drahtes

B-Feld von Draht #2: $B = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r}$ $\Rightarrow$ $\boxed{F = \mu_0 \cdot L \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi r}}$

Zahlenbeispiel: $r = 1m$; $I_1 = I_2 = 1A$

Kraft pro $L = 1m$ $\quad \frac{F}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{1A^2}{2\pi \cdot 1m}$

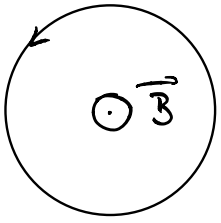
$= 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$ ≙ alte Def. des Ampère

5.2.3 Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad (\vec{E} = 0)$$

$\vec{F} \perp \vec{v}$

Es resultiert eine Kreisbewegung



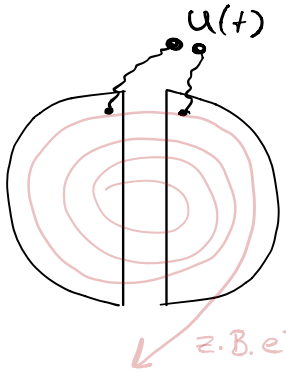
Stabilität: Lorentzkraft = Zentrifugalkraft

$$Q \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{Q \cdot B}{m} \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v}{\omega_c} \sim v$$

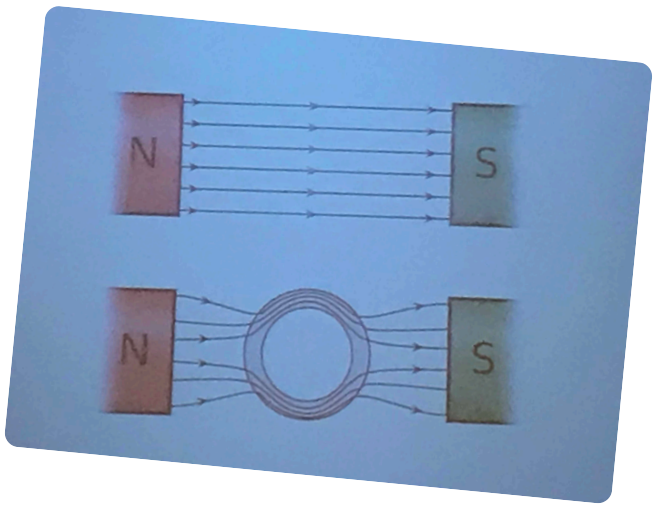
ω_c ≙ Zyklotronfrequenz

Anwendung: Zyklotron-Beschleuniger

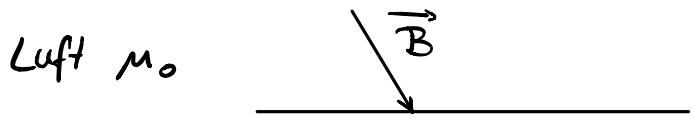


(siehe Skizze)

⊙ $\vec{B}$=const.

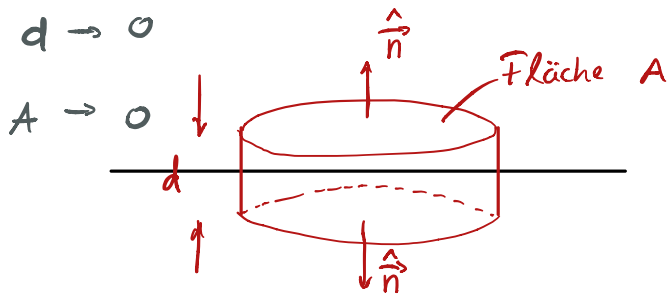


5.3 Übergänge in magn. Materialien



magn. Material $\mu_0\mu_r$?

1.) Zeige $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 = B_n \cdot A - B_n' \cdot A$$

$$\Rightarrow \quad B_n = B_n'$$

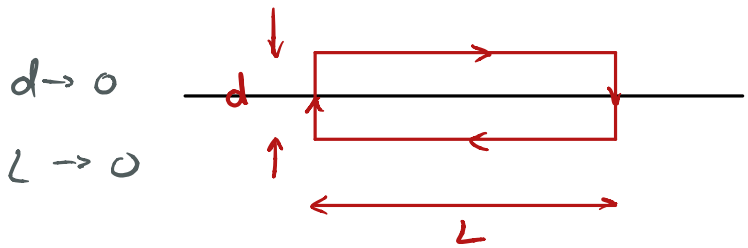
$\Rightarrow$ Normalkomponente stetig

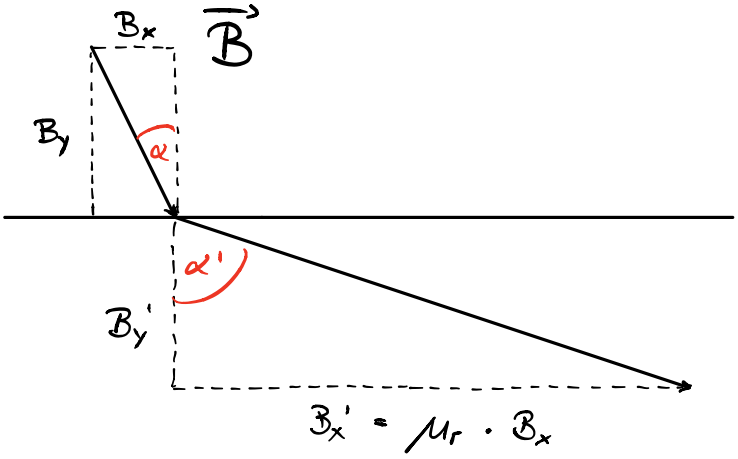
2.) Zeige $\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$ $\Rightarrow$ Tangentialkomp. stetig (*)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$= H_z \cdot L - H_z' \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow \quad H_z = H_z' \Rightarrow (*)$$



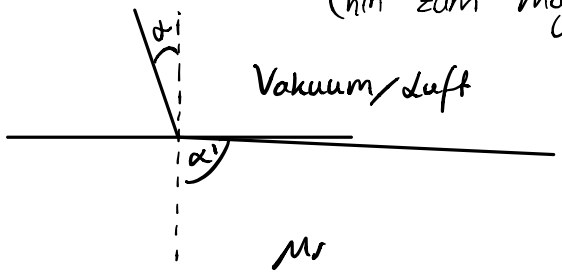


$$\tan\alpha = \frac{B_x}{B_y}$$

$$\tan\alpha' = \frac{B_x'}{B_y'} = \frac{\mu_r \cdot B_x}{B_y}$$

$$\boxed{\frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha} = \mu_r}$$

Brechung der Feldlinien vom Lot weg (hin zum magn. dichteren Medium).

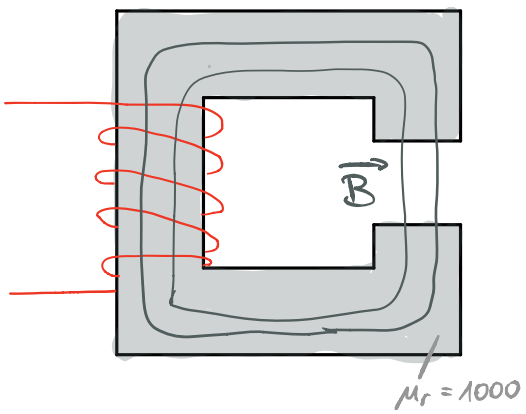


Zahlenbeispiel:

$\alpha = 2°$, $\mu_r = 1000$

$\Rightarrow$ $\alpha' = 88°$

Anwendung:



Kapitel 6: Zeitlich konstante elektromagnetische Felder

6.1 Das Induktionsgesetz

Welche fundamentalen Gleichungen hatten wir bisher?

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$ 1. Maxwellsche Gleichung ✓

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$ 2. Maxwellsche Gleichung in der Elektrostatik

Zur Erinnerung: $U_{1,2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ $\Rightarrow$ Experimente

$\Rightarrow$ zeitlich veränderliche Magnetfelder rufen eine Induktionsspannung hervor

$$\oint_{\text{Rand}(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

↑ sie wählen einen Weg, der dem Rand von A entspricht

↑ Fläche (nicht geschlossen!)

2. Maxwellsche Gleichung

$\hat{=}$ Induktionsgesetz

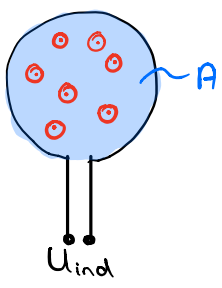
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$ $\hat{=}$ Induktionsspannung einer (fest) geschlossenen Leiterschleife

$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} =: \Phi$ $\hat{=}$ magnetischer Fluss

Ist B räumlich homogen, so wäre $\Phi = B_x \cdot A$

↑ Normalkomp. bzgl. Fläche

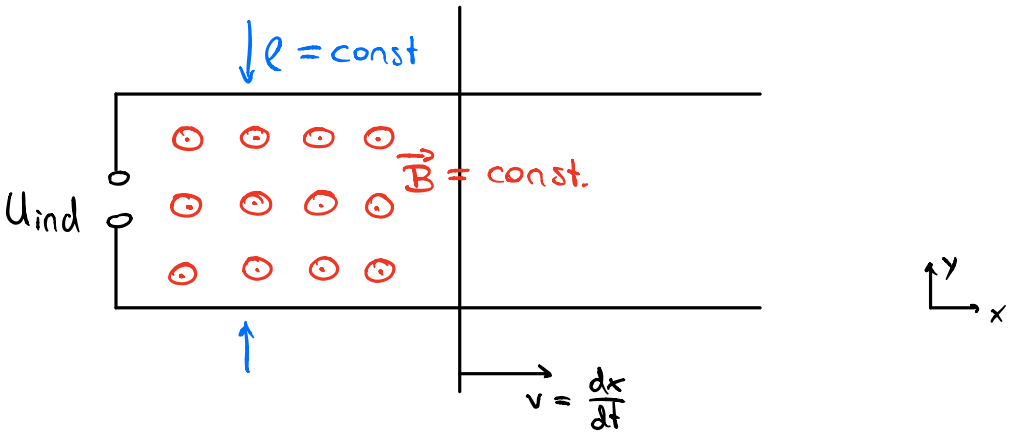
Einheiten: $[\Phi] = Tm^2$



Also 2. Maxwellsche Glg. in anderer Form

$$U_{ind} = -\dot{\Phi}$$ INDUKTIONSGESETZ

Beispiel:

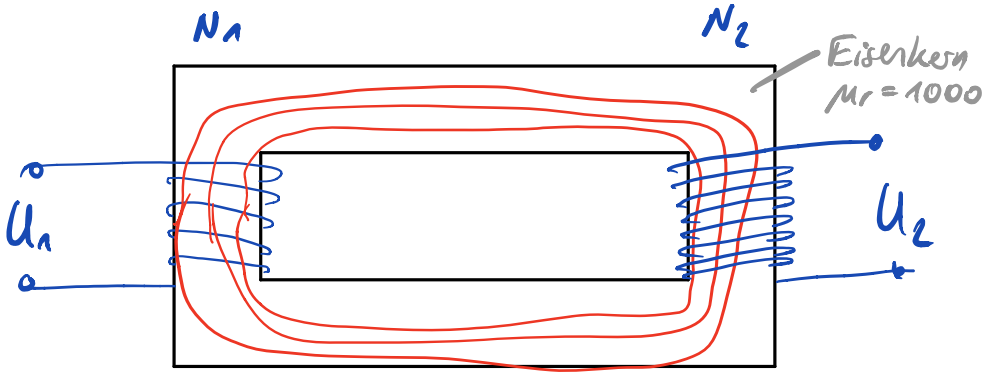


$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt}(B \cdot A) = B \cdot \left(-\frac{dA}{dt}\right)$$
$$= -Bl\frac{dx}{dt} = -B \cdot l \cdot v$$

Hier: Stange bewegen $\Rightarrow$ U_{ind}

Auch: U angelegt $\Rightarrow$ Stange bewegt sich (über Lorentzkraft)

Beispiel: Transformator



Φ_0 sei der magn. Fluss pro Wicklung.

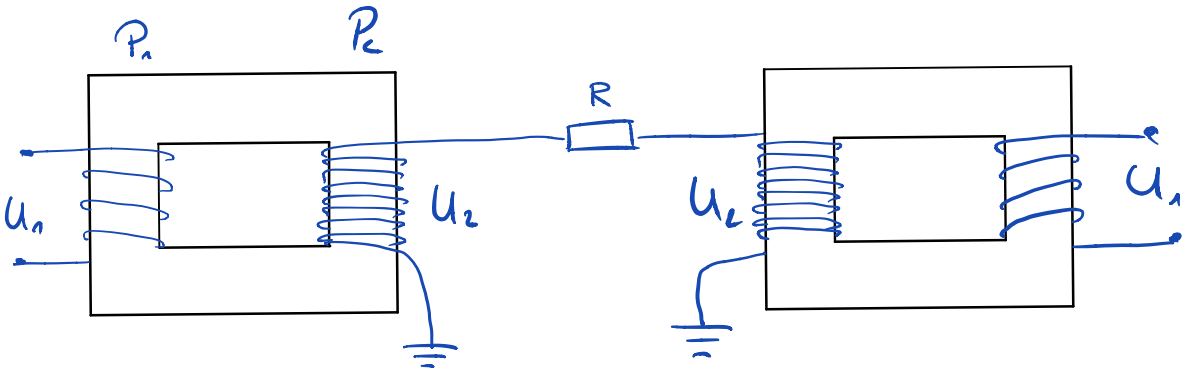
$$\left.\begin{aligned} U_1 &= -N_1\dot{\Phi}_0 \\ U_2 &= -N_2\dot{\Phi}_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Beim idealen Transformator gilt $P_1 = P_2$

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

Beispiel: Hochspannungsleitungen



Zahlenbeispiel: $R = 0{,}1\,\Omega$, $U = 220\,V$

$P_1 = P_2 = 200\,kW$

$U_2 = 220\,V \Rightarrow I = 909\,A$

$\Rightarrow$ diss. Leistung $P_R = R \cdot I^2 = 82{,}6\,kW$ d.h. 41% Verlust

$U_2 = 10\,kV \Rightarrow I = 20\,A$

$\Rightarrow P_R = RI^2 = 40\,W$ d.h. 0,2‰ Verlust

Beispiel: Zylinderspule, Selbstinduktion, Induktivität

$$B = \mu_0 I \frac{N}{\ell}$$

$I = I(t) \Rightarrow B = B(t) \Rightarrow \Phi = \Phi(t)$

$$\Rightarrow U_{ind} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt}\left(A \mu_0 I \frac{N}{\ell}\right) \cdot N = -\underbrace{\left(\mu_0 A \frac{N^2}{\ell}\right)}_{=: L \,\hat{=}\, \text{Induktivität}} \cdot \dot{I}$$

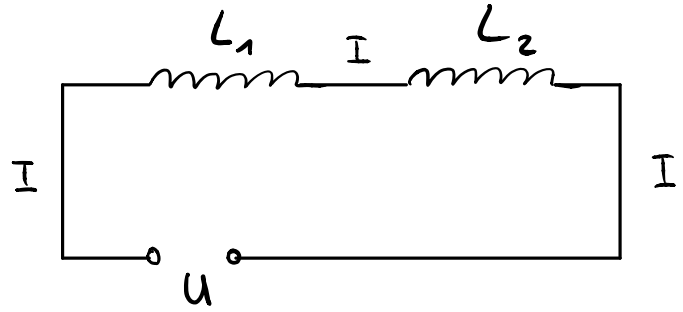
$\dot{\Phi}$: Fluss einer Wicklung; N: Zahl der Wicklungen

$$U_{ind} = -L \cdot \dot{I}$$

$$[L] = \frac{Vs}{Am}\,\frac{m^2}{m} = \frac{Vs}{A} =: H \quad \text{(Henry)}$$

16.6.2019

Beispiel: Serienschaltung von Induktivitäten



Maschenregel: $U = U_1 + U_2$

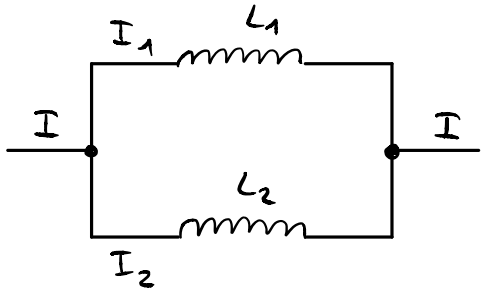
$= L_1 \dot{I} + L_2 \dot{I}$ (positives VZ gewählt)

$= (L_1 + L_2)\,\dot{I}$

$=: L_{ges} \cdot \dot{I}$

$$\Rightarrow \boxed{L_{ges} = L_1 + L_2}$$

Beispiel: Parallelschaltung von Induktivitäten



$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = + \frac{U}{L_1} + \frac{U}{L_2}$$

$$=: \frac{U}{L_{ges}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

Energiegehalt des magn. Feldes (am Beispiel der Zylinderspule)

$$P = U \cdot I \quad ; \quad W = \int P\,dt = \int U \cdot I\,dt = \int + L \frac{dI}{dt} \cdot I \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{(vgl. } W = \frac{1}{2} C U^2 \text{ beim Kond.)}$$

Für Zylinderspule: $L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$

$$H = I \cdot \frac{N}{\ell} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\ell H}{N}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\left(\mu_0 \frac{AN^2}{\ell}\right)\left(\frac{\ell^2 H^2}{N^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \cdot V$$

Wieder Energiedichte:

$$w_{magn} = \underbrace{\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}}_{\text{rein magnetischer Anteil der Energiedichte}}$$

(vgl. $w_{el} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$ rein el. Anteil der Energiedichte)

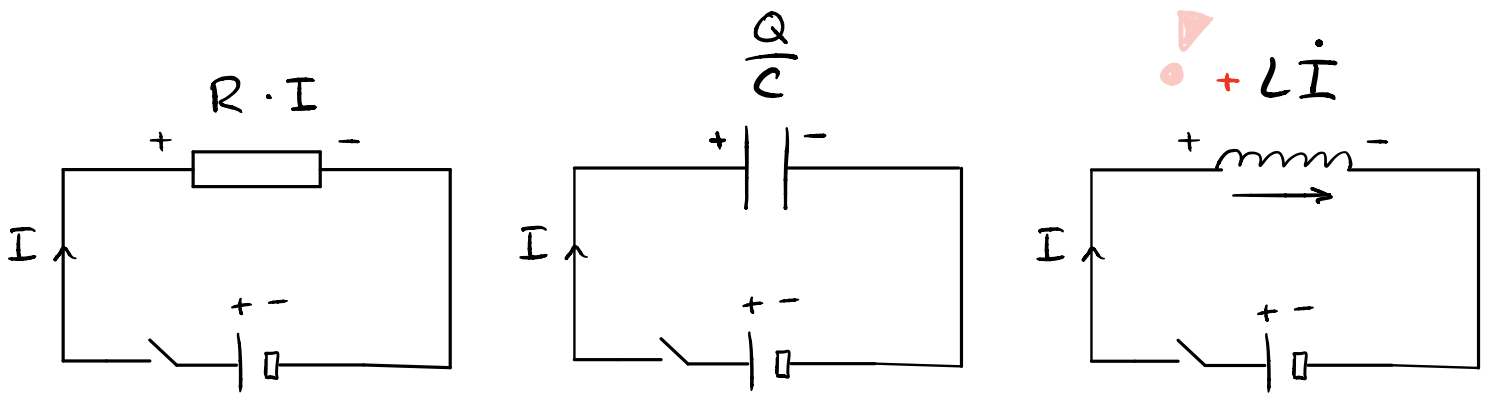
$\Rightarrow$ elektromagn. Energiedichte (im Vakuum) w:

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}\right)$$

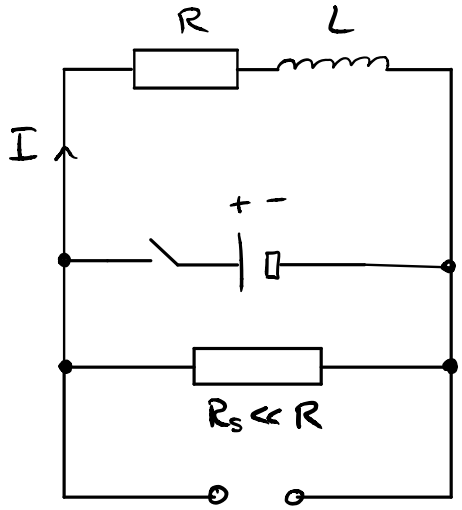
6.2 Elektrische Schaltkreise

Beim Zusammenschalten von Ohm'schen Widerständen, Kondensatoren und Induktivitäten gelten weiterhin die Kirchhoffschen Regeln.

! Vorsicht mit den VORZEICHEN !



Beispiel:



R_S: Schaltwiderstand

$$U(t) = R \cdot I + L \cdot \dot{I}$$
(Maschenregel)

ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zur Bestimmung von $I(t)$.

Zunächst homogene Dglu.: $R \cdot I + L \cdot \dot{I} = 0$

Ansatz: $I = A \cdot e^{-t/\tau}$ ← Zeitkonstante τ

$$\Rightarrow \quad \dot{I}(t) = -\frac{1}{\tau} A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \quad R \cdot A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + L \cdot \left(-\frac{1}{\tau} A e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R}$$ Zeitkonstante

Inhomogene Dglu.: spezielle Lösung Stationärer Fall

$$U_0 = RI + L \cdot \dot{I}$$ ⇒ Stationärer Fall ⇒ $\dot{I} = 0$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{U_0}{R}$$

Allgemeine Lösung: $I(t) = \frac{U_0}{R} + A \cdot e^{-t/\tau}$

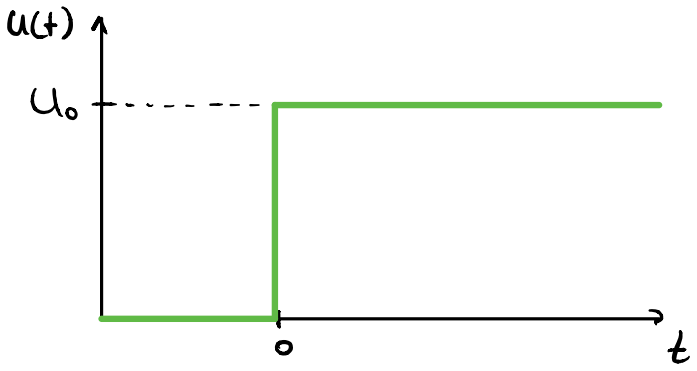
$$I(t=0) = 0 = \frac{U_0}{R} + A \cdot e^{-0}$$

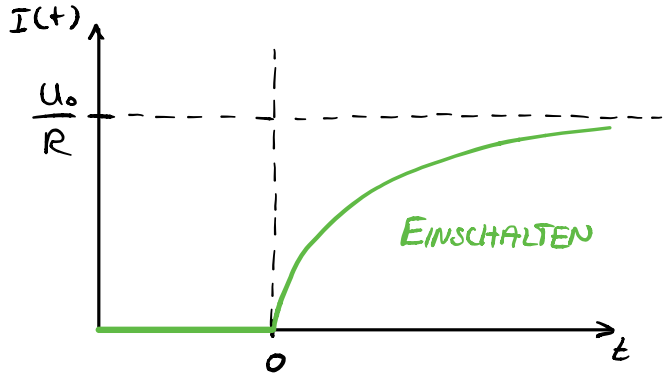
$$\Rightarrow \quad A = -\frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

EINSCHALTVORGANG

grafisch:





Ausschaltvorgang:

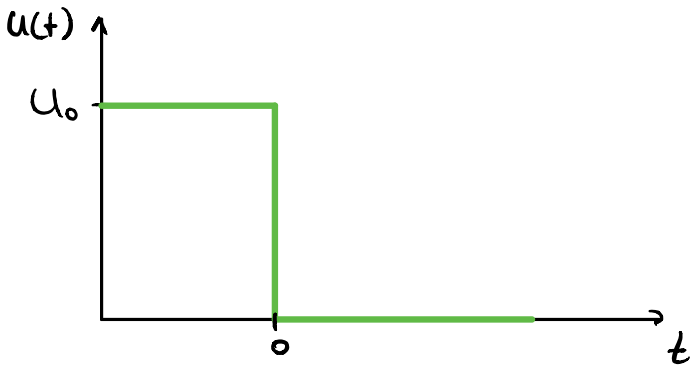
$$U(t=0) = 0 \qquad I(t=0) = \frac{U_0}{R}$$

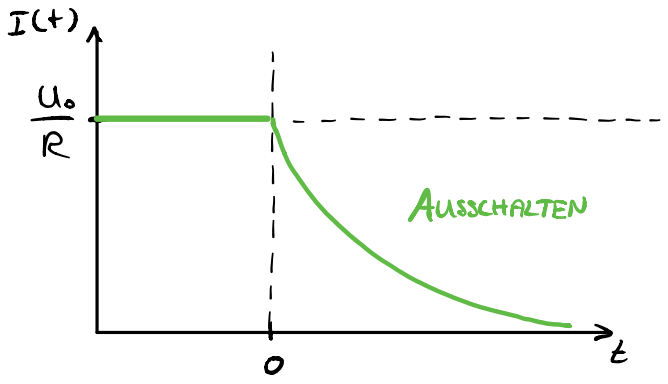
$$I(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I(0) = \frac{U_0}{R} = A \cdot e^0 = A$$

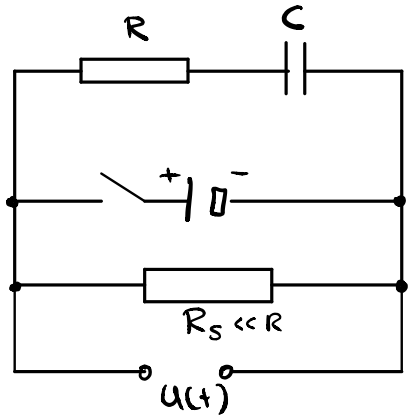
$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

grafisch:





Beispiel:



$$U(t) = RI + \frac{Q}{C} \qquad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$= R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Homogene Dglu.:

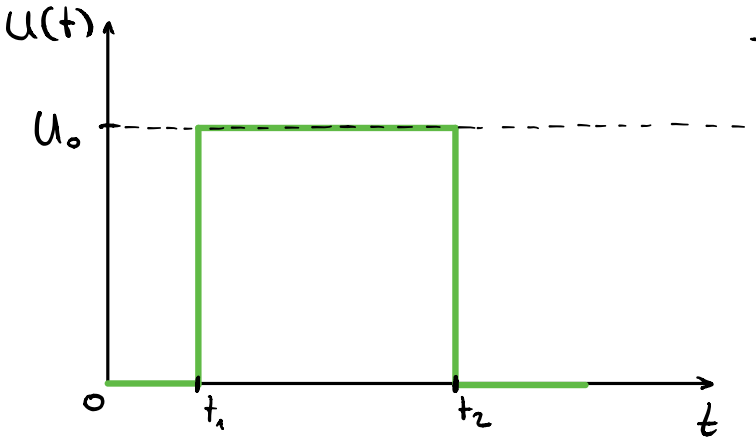
$$R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

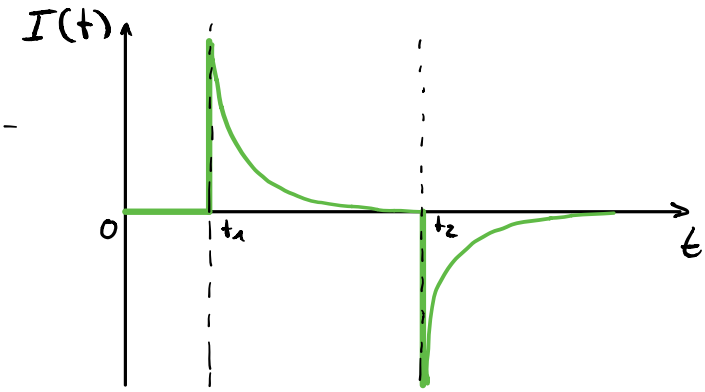
Ansatz:

$$Q(t) = A \cdot e^{-t/\tau}$$

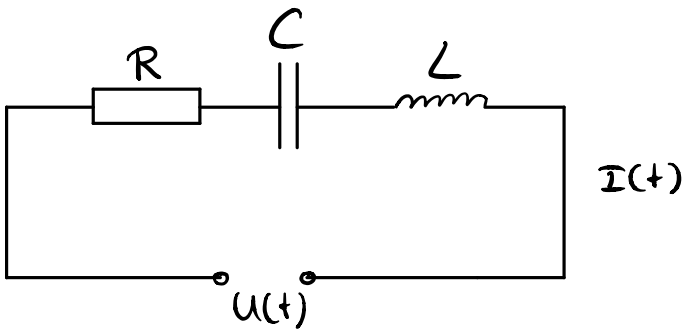
$$\Rightarrow \quad R \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \cdot A \cdot e^{-t/\tau}\right) + \frac{A}{C} \cdot e^{-t/\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau = R \cdot C$$





6.2.2. Schwingkreise



$$U(t) = R \cdot I + \frac{Q}{C} + L \cdot \dot{I}$$

$$\overset{z.B.}{=} U_0 \cos(\Omega t)$$

Differenzieren:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = -\Omega U_0 \sin(\Omega t)$$

harm. Fall:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0$$

vgl. $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = 0$

Spezialfall $R = 0$:

$$L\ddot{I} + \frac{I}{C} = 0$$

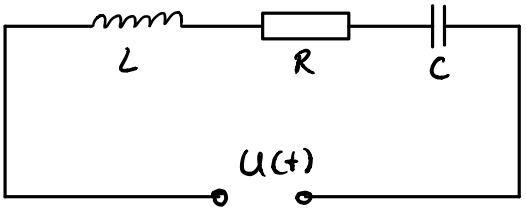
Ansatz: $I = I_0 \cdot \cos(\omega t)$

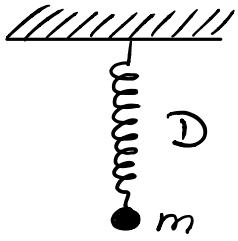
$$\Rightarrow \quad -L\omega^2 I_0 \cos(\omega t) + \frac{I_0 \cos(\omega t)}{C} = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Betrachte Schaltkreis:

/ Di, 11.6.19





$$L\ddot{I} + R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} = 0$$

- $R = 0$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

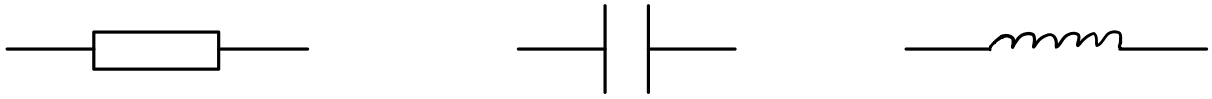
$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Dx = 0$$

- $\gamma = 0$

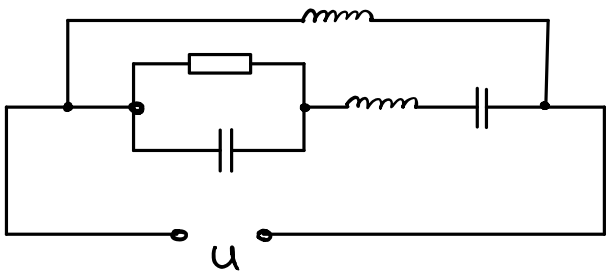
$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

6.2.3 Wechselstromschaltkreise und -widerstände

$U_R = R \cdot I$ $\qquad$ $U_C = \frac{1}{C}\int I\,dt$ $\qquad$ $U_L = L \cdot \dot{I}$



Bei etwas komplizierteren Schaltkreisen ist das explizite Aufstellen und Lösen der DGL sehr lästig.



$\Rightarrow$ Einführung von Scheinwiderständen

$U(t)$ habe die Form: $\quad U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$

$$= U_0 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

Lineare DGL $\Rightarrow$ Einschränkung auf $U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$

Wir machen den Ansatz: $\quad I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$

Ohmscher Widerstand: $\quad U_R = R \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t} = R \cdot I(t) =: Z_R \cdot I(t)$

Kapazität: $\quad U_C = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I(t) =: Z_C \cdot I(t)$

Induktivität: $\quad U_L = L \cdot i\omega \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I(t) =: Z_L \cdot I(t)$

mit den SCHEINWIDERSTÄNDEN

$$Z_R = R + i\omega L_{kin}$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z_L = i\omega L$$

Parallel- und Serienschaltung ist wie bei Ohmschen Widerständen.

Dabei ergibt sich ein komplexwertiger Gesamtscheinwiderstand.

$$z_{ges} = \underbrace{Re(z_{ges})}_{\text{Wirkungswiderstand}} + i \cdot \underbrace{Im(z_{ges})}_{\text{Blindwiderstand}}$$

Wirkungswiderstand: $\delta\varphi = 0°$ $\Rightarrow$ Leistungsabfall

Blindwiderstand: $\delta\varphi = 90°$ $\Rightarrow$ KEIN Leistungsabfall!

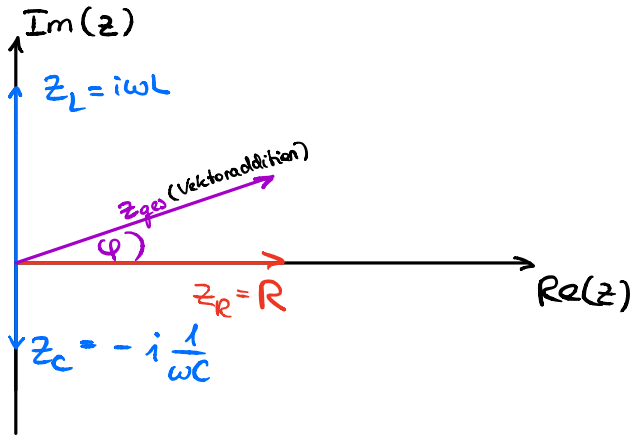
Diesen können wir in Betrag und Phase zerlegen.

$$U = z_{ges} \cdot I$$

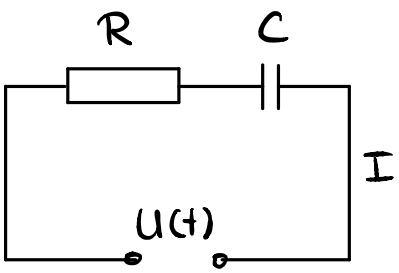
$$|U| = |z_{ges}| \cdot |I| \quad \text{und}$$

$$\tan\varphi = \frac{Im(z_{ges})}{Re(z_{ges})}$$

$\varphi > 0 \Rightarrow$ U eilt I voraus



Beispiel:



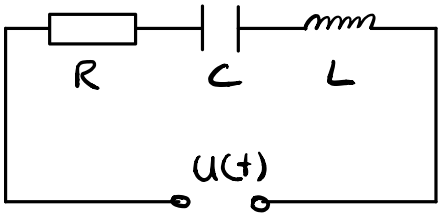
$$z_{ges} = z_R + z_C = R + \frac{1}{i\omega C}$$

$$\Rightarrow z_{ges} = R - \frac{i}{\omega C}$$

$$\Rightarrow |z_{ges}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = -\frac{1}{\omega C R}$$

Beispiel:

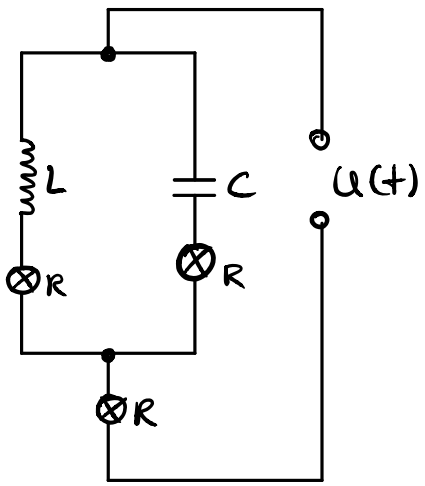


$$z_{ges} = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$
$$= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

R sei klein $\Rightarrow$ $z_{ges} = 0$ wenn Frequenz $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$ RESONANZFREQUENZ

Beispiel:



$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

variiere Frequenz $z_L \sim \omega$, $z_C \sim \frac{1}{\omega}$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{z_{ges}} = \frac{1}{z_L} + \frac{1}{z_C} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C$$

$$\Rightarrow z_{ges} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{1}{i} \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

$|z_{ges}| \to \infty$ bei $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$\Rightarrow \varphi \to 90°$

Entsteht Wärme? Betrachte Mittelwert!

Leistungsabfall an einem Ohm'schen Widerstand

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$
$$I(t) = \frac{U(t)}{Z_R} = \frac{1}{R} U_0 \cos(\omega t)$$

Leistung $P(t) = U(t) \cdot I(t)$

$$= \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$$

und somit die mittlere Leistung $\langle P \rangle$:

$$\langle P \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{U_0^2}{R} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} \quad , \quad \text{statischer Fall: } P = \frac{U^2}{R}$$

$\Rightarrow$ definiere U_{eff}: $\frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} =: \frac{U_{eff}^2}{R}$

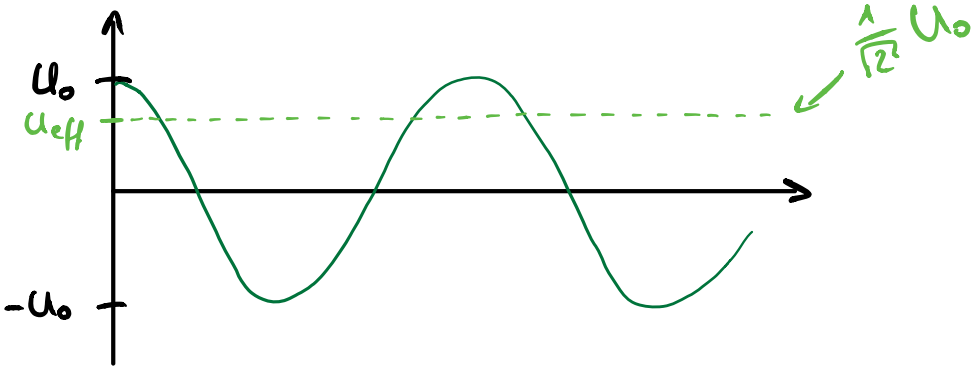
$\Rightarrow$ $\boxed{U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_0}$ EFFEKTIVSPANNUNG

(U_0: Spitzenwert)

Beispiel: Steckdose

Was ist 220V? U_0 oder U_{eff}?

$\Rightarrow$ 220 V sind Effektivwert! (Spitzenwert $\hat{=}$ $311V = \sqrt{2} \cdot 220V$)



Betrachte Leistungsabfall an einer Induktivität:

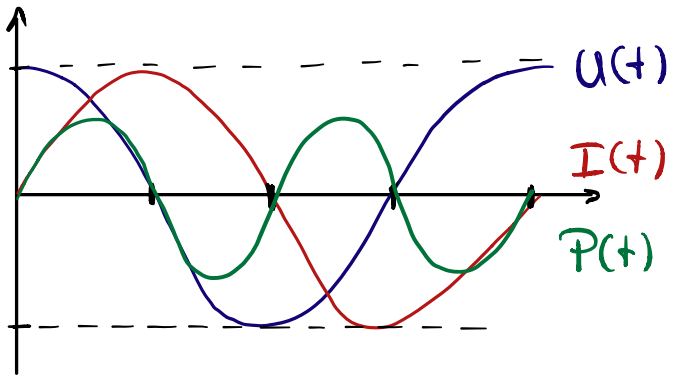
$$U = U_0 \cos(\omega t) = L \cdot \dot{I}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \frac{U_0^2}{L\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \neq 0$$

und die mittlere Leistung $\langle P \rangle$:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt = \frac{U_0^2}{L\omega T} \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t)\, dt = 0 .$$

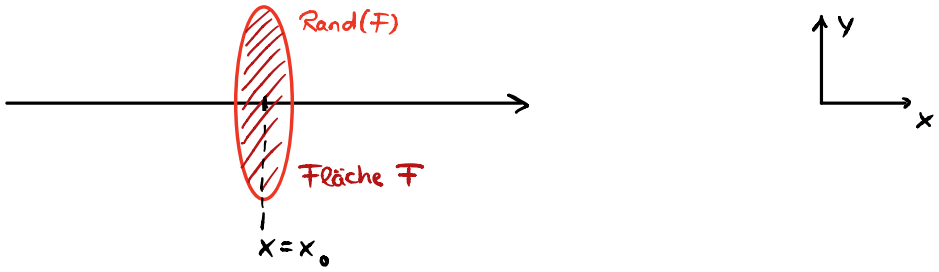


Do
13.6.19

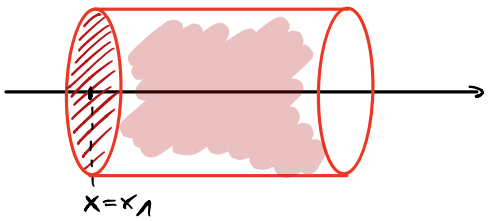
6.3 Der Verschiebungsstrom

4. Maxwell-Gesetz: $\oint_{\text{Rand}(F)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A}$

z.B.:



Möglich ist auch:



Das Gesetz legt den Strom sowohl bei $x = x_0$ als auch bei $x = x_1$ fest.

Allgemein:

$$\oint_{\text{Rand}(F)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot}\, \vec{H}\, d\vec{A}$$

(Stokes'scher Satz, Beweis später)

Daher:

$$\int_F \text{rot}\, \vec{H}\, d\vec{A} = \int_F \vec{j}\, d\vec{A}$$

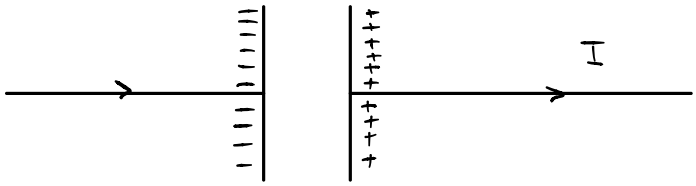
$$\text{rot}\, \vec{H} = \vec{j}$$

Wir wissen (Mechanik-VL): $\text{div}(\text{rot}\, \vec{f}) \equiv 0$ (für die Vektorfelder $\vec{f}$)

$$\Rightarrow \boxed{\text{div}\, \vec{j} = 0}$$

Kontinuitätsgleichung der Elektro- und Magnetostatik

Betrachte Situation mit Kondensator (nun zeitabhängig!)



Durch den Kondensator fließt kein Strom (Isolator). Der Strom stammt von der abfließenden Ladung. Allgemeine Kontinuitätsgleichung (Ladungserh.):

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \quad \xrightarrow{\text{(Integration)}} \quad \dot{Q} + I = 0$$

Maxwell folgert:

$$\dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

VERSCHIEBUNGSSTROM

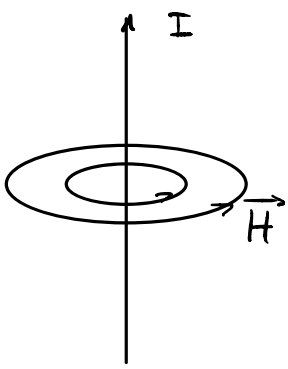
und

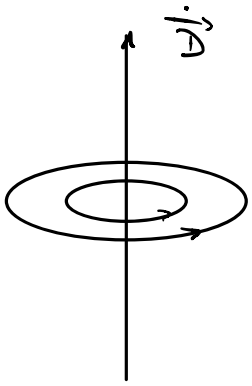
$$\oint \vec{H}\, d\vec{r} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

4. Maxwell-Gesetz (allgemein)

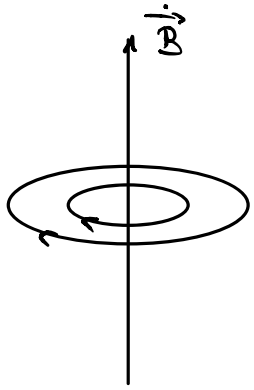
analog zum Induktionsgesetz: $\oint \vec{E}\, d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}\, d\vec{A}$

ohne „magnetische Ströme" von Monopolen



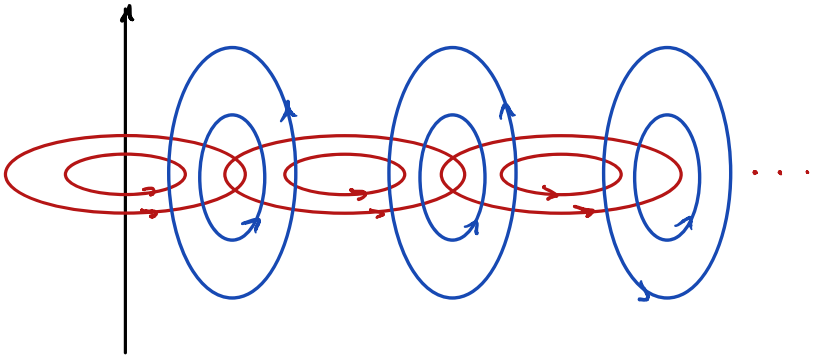


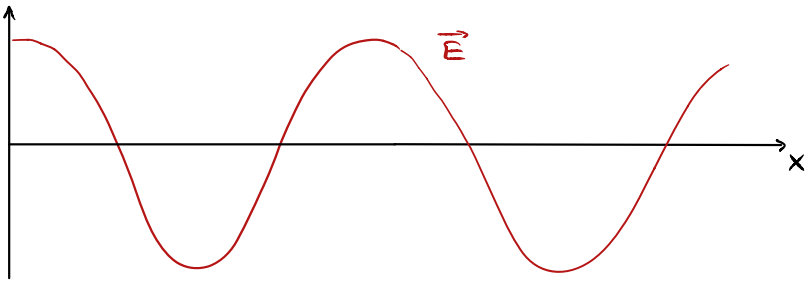
mit Induktion:



Zeitlich veränderter Strom $\Rightarrow$ zeitlich verändertes $\vec{B}$-Feld

$\Rightarrow$ zeitlich verändertes $\vec{E}$-Feld





Wir sehen also anschaulich: Zeitveränderliche Ströme, also beschleunigte Ladungen, rufen EM-Felder hervor, die sich im Raum ausbreiten.

$\Rightarrow$ Wellen

Kapitel 7: Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form

Ist die differentielle Formulierung äquivalent zur Integraldarstellung?

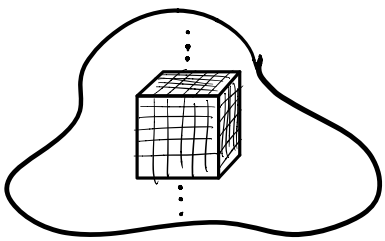
7.1 Die Integralsätze von Gauss und Stokes

Der Satz von Gauß:

$\vec{f}$ sei ein beliebiges Vektorfeld. Dann gilt:

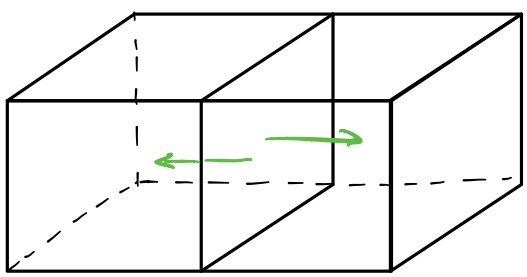
$$\int_V \operatorname{div}\vec{f}\, dV = \oint_{A(V)} \vec{f}\, d\vec{A}$$

Beweis:

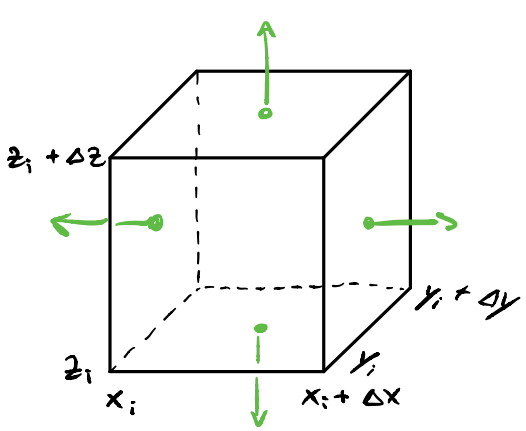


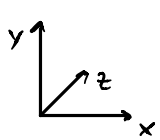
$$\oint_{A(V)} \vec{f}\, d\vec{A} = \sum_i \oint_{A_i} \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

denn



die Beiträge der Kontaktflächen heben sich weg!





$$= \sum_i \Bigg\{ \frac{f_x(x_i + \Delta x) - f_x(x_i)}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

(erweitert)

$$+ \frac{f_y(y_i + \Delta y) - f_y(y_i)}{\Delta y} \cdot \Delta y \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$+ \frac{f_z(z_i + \Delta z) - f_z(z_i)}{\Delta z} \cdot \Delta z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \Bigg\}$$

$\Delta z \to 0 \Rightarrow \frac{\partial f_z}{\partial z}(z_i)$

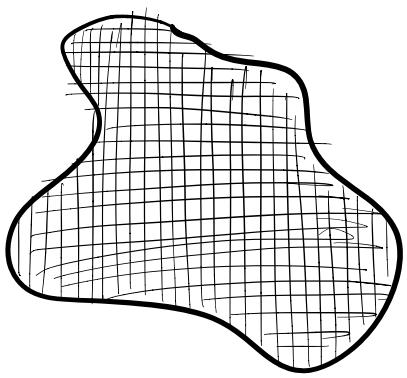
$$\overset{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0}{=} \int \operatorname{div} \vec{f} \, dV \qquad \blacksquare$$

Der Satz von Stokes

$\vec{f}$ sei ein bel. Vektorfeld, dann gilt

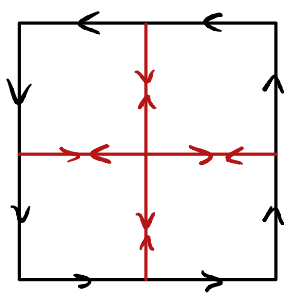
$$\int_A \operatorname{rot} \vec{f} \, d\vec{A} = \oint_{\text{Rand}(A)} \vec{f} \, d\vec{r}$$

Beweis: Fläche A in x-y-Ebene

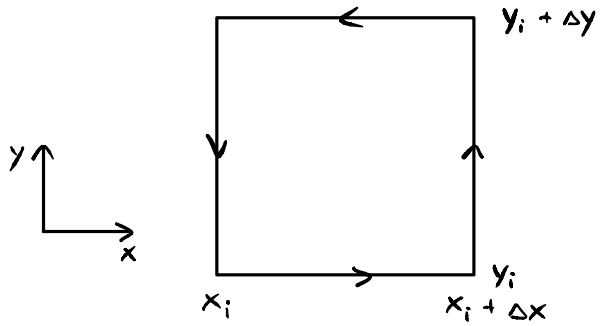


$$\oint \vec{f} \, d\vec{r} = \sum_i \oint_{R_i} \vec{f} \, d\vec{r}$$

↳ Rand des Quadrats i



Die Beiträge der Kontaktflächen heben sich weg!



$$= \sum_i \left\{ - \frac{f_x(y_i + \Delta y) - f_x(y_i)}{\Delta y} \Delta x \Delta y + \underbrace{\frac{f_y(x_i + \Delta x) - f_y(x_i)}{\Delta x}}_{\Delta x \to 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial f_y}{\partial x}(x_i)} \Delta y \Delta x \right\}$$

$$= \sum_i \underbrace{(\mathrm{rot}\, \vec{f})_z}_{\text{Normalkomp.}} \cdot \Delta x \Delta y$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow = \int \mathrm{rot}\, \vec{f}\, d\vec{A} \quad \blacksquare$$

Herleitung der Maxwellschen Gleichungen in Integralform aus der differentiellen Formulierung

1. Maxwellsches Gesetz

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = \rho \qquad \Big| \int_V dV$$

$$\Rightarrow \int_V \mathrm{div}\, \vec{D}\, dV = \int_V \rho\, dV$$

Gauß $\Rightarrow$

$$\oint_{A(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

2. Maxwellsches Gesetz

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \Big| \int_A d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \int_A \mathrm{rot}\, \vec{E} \cdot d\vec{A} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Stokes $\Rightarrow$

$$\oint_{\mathrm{Rand}(A)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

3. Maxwellsches Gesetz

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \Big| \int_V$$

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{B}\, dV = 0$$

Gauß $\Rightarrow$

$$\oint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

4. Maxwellsches Gesetz

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \Big| \int_A d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \int_A \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}}_{I} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{I_V}$$

I_V: Verschiebungsstrom

Stokes $\Rightarrow$

$$\oint_{\text{Rand}(A)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I + I_V$$

Wiederholung:

Di, 18. Juni '19

1. Maxwell-Gleichung: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

„Die Quellen des elektrischen Feldes sind Ladungen"

2. Maxwell-Gleichung: Induktionsgesetz: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$

Die Wirbel des $\vec{E}$-Feldes werden hervorgerufen durch zeitl. veränderliche $\vec{B}$-Felder

3. Maxwell-Gleichung: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Es gibt keine magn. Quellen

4. Maxwell-Gleichung: $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j}$

Wirbel im $\vec{H}$-Feld rufen zeitl. veränderliche $\vec{D}$-Felder hervor, sowie Ströme (j)

$$\left.\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Vakuum} + \text{Lorentzkraft}$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{f}\, dV = \int_{A(V)} \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

Normalkomponente von f bzgl. der Oberfläche A über die Oberfläche A integrieren

GAUSS

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{f}\, d\vec{A} = \int_{\text{Rand}(A)} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Stokes

Kontinuitätsglu.:

(I) $\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad | \frac{\partial}{\partial t}$

(II) $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} \quad | \operatorname{div}$

mit $\operatorname{div}(\operatorname{rot}) = 0$

$\Rightarrow$

(I) $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \dot{\rho}$

(II) $\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H}}_{=0} = \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \operatorname{div} \vec{j}$

$0 = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} + \operatorname{div} \vec{j}$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \dot{\rho} = 0}$ KONTINUITÄTSGLEICHUNG

analog zur Hydromechanik

mit Integration $\int_V dV$

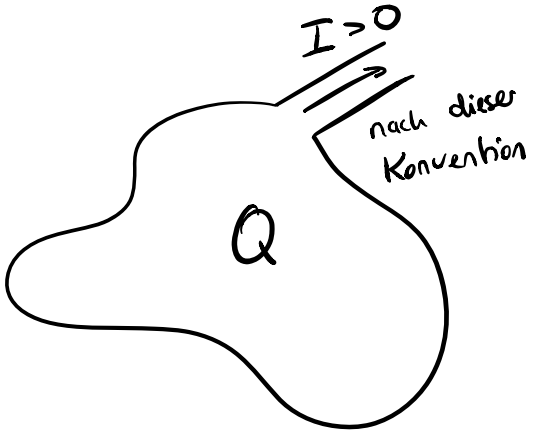
$\Rightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = 0$

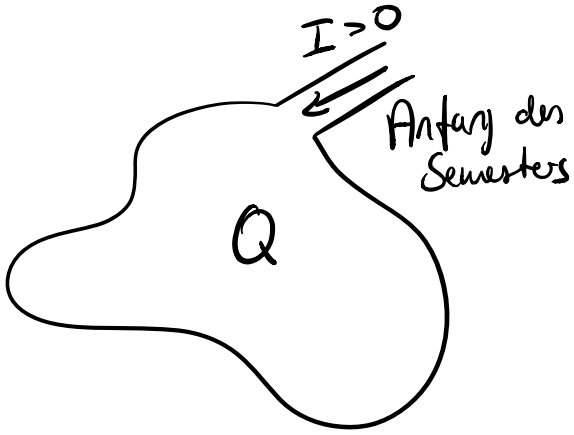
Gauss $\oint_{A(V)} \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} Q = I + \dot{Q} = 0$

$\Rightarrow I = -\dot{Q}$

$\vec{j} \cdot d\vec{A}$: Normalkomp. von $\vec{j}$, die nach außen zeigt

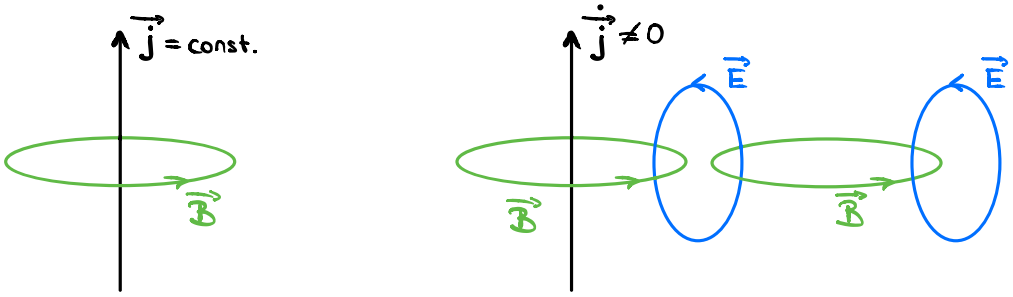
Physikalische Stromrichtung ↯ Technische Stromrichtung





Kapitel 8:

Elektromagnetische Wellen



Beschleunigte Ladungen sind die Quellen elektromagn. Wellen.

Herleitung aus den Maxwellschen Gleichungen

$$(\mathrm{I}) \quad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j} \qquad \left| \; \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$(\mathrm{II}) \quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \qquad \left| \; \mathrm{rot} \right.$$

$$\Rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\vec{B}$$

mit $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{=0} - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

$\nabla \cdot (\nabla E)$ (komponentenweise)

$\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{=0}$: falls $\varrho = 0$ (im Vakuum)

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vec{E}$: Komponentenweise zu verstehen!

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$\Delta\vec{E} = \partial_x^2 E_x + \partial_y^2 E_y + \partial_z^2 E_z$$

Beschleunigte Ladungen sind Quellen Elektromagn. Wellen

Hierbei ist $\varepsilon_0\mu_0 =: \frac{1}{c_0^2}$

mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit $\quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.99 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

Lösungsansatz:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega \cdot t)$$

Einsetzen: (rechte Seite = Null)

$$-\vec{E}_0 \vec{k}^2 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t) + \frac{1}{c_0^2}\vec{E}_0 \omega^2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} = c_0^2$$

Dispersionsrelation der EM-Wellen im Vakuum (auch in guter Näherung für Luft)

auch $c_0 = \lambda \cdot f$

Wie sieht das zugehörige $\vec{B}$-Feld aus?

Ansatz:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)$$

mit $\quad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

$$= -\begin{pmatrix} k_y E_z^0 - k_z E_y^0 \\ k_z E_x^0 - k_x E_z^0 \\ k_x E_y^0 - k_y E_x^0 \end{pmatrix} \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)$$

$$= \pm \omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \mp \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}$$

26.6.19

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \qquad \text{mit} \quad c_0 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

(c_0: Lichtgeschw. im Vakuum)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad \checkmark$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad \checkmark$$

haben wir bereits gecheckt

mit $\frac{\omega}{|\vec{k}|} = c_0$

und $\vec{B} = -\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} \Rightarrow \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{\omega}{k} = c_0$

Zeige dass gilt: $\vec{k} \perp \vec{E}$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho = 0$$

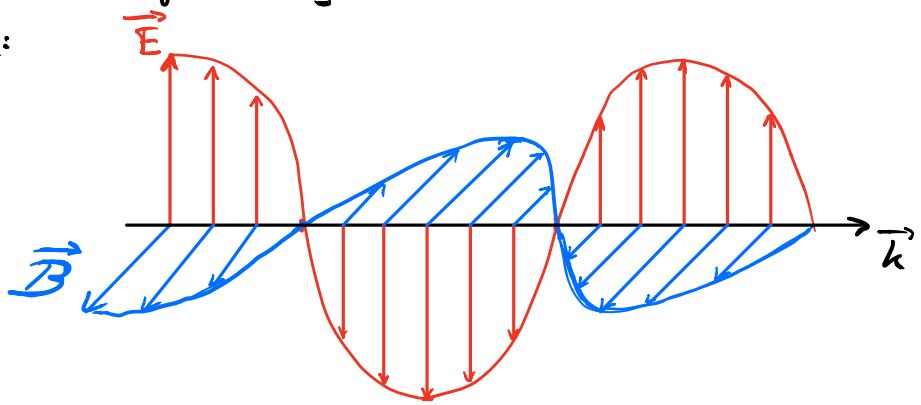
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = 0$$

$$= -\left(k_x E_x^0 + k_y E_y^0 + k_z E_z^0\right)\sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k}\cdot\vec{E} = 0} \quad \text{d.h.} \quad \vec{k} \perp \vec{E}$$

(gleiche Richtung wie $\vec{E}^0$)

graphisch:



Elektromagnetische Wellen sind TRANSVERSAL!

Nicht nur die Richtungen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ stehen in fester Beziehung, sondern auch die Beträge:

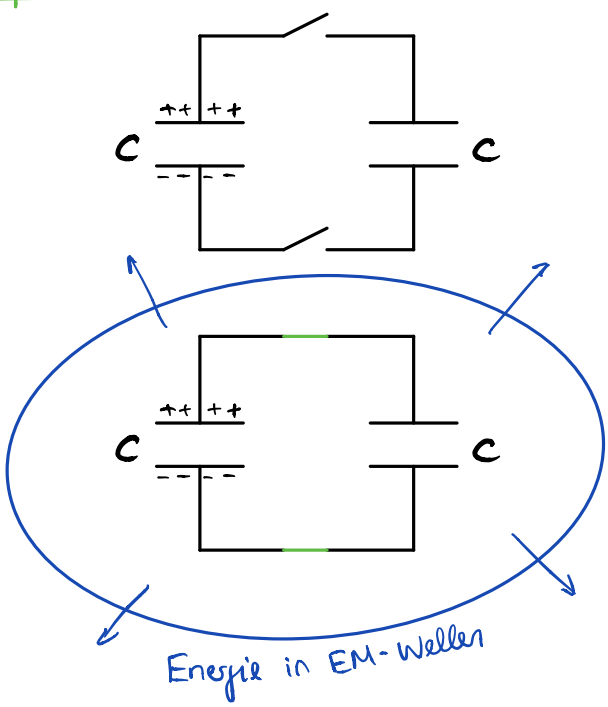
mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ und $\circledast\ \vec{B} = + \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$ und $\frac{\omega}{|\vec{k}|} = c_0$

$$\Rightarrow \quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \mu_0 c_0 = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} =: Z_0 \ \hat{=}\ \text{Vakuumwiderstand}$$

$$[Z_0] = \frac{V/m}{A/m} = \frac{V}{A} = \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_0 = 376\,\Omega}$$

8.1 Energieflüsse und der Poynting Vektor

Beispiel:



Energie: $W = \frac{1}{2} C U^2$; $C = \frac{Q}{U}$

$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2$ VORHER

Energie: $W = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \left(\frac{Q}{2}\right)^2$ (links/rechts)

$\Rightarrow \quad W = \frac{Q^2}{4C} = \frac{W}{2}$ NACHHER

Elektromagnetische Energiedichte im Vakuum

$$W_{EM} = \frac{1}{2} \left(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H} \right)$$

Betrachte $\frac{\partial}{\partial t} W_{EM} = \frac{1}{2} \left(\dot{\vec{D}} \cdot \vec{E} + \vec{D} \cdot \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{B}} \cdot \vec{H} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{H}} \right)$

$$= \underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} \dot{\vec{E}}}_{= \dot{\vec{D}}} + \underbrace{\mu_0 \vec{H} \cdot \dot{\vec{H}}}_{= \dot{\vec{B}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{EM} = \vec{E}\,\underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{j})}_{\text{4. Maxwell-Glu.}} - \vec{H}\,\underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{\text{2. Maxwell-Glu.}}$$

Vektoralgebra: $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a})$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{EM} = -\vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \operatorname{rot}(\vec{H}) - \vec{H} \cdot \operatorname{rot}(\vec{E})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} w_{EM} + \operatorname{div}(\underbrace{\vec{E} \times \vec{H}}_{=: \vec{S}}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

vgl. $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$
Kontinuitätsgleichung für elektrische Felder

mit dem Poynting Vektor

$$\boxed{\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}}$$

$[S] = \frac{W}{m^2} \;\hat{=}\;$ Energiestromdichte

Beispiel: eine ebene Welle im Vakuum

$\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{B} \perp \vec{k}$, $\vec{E} \perp \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}\right)$$

Vektoralgebra: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{E}^2 \cdot \vec{k} + 0$$

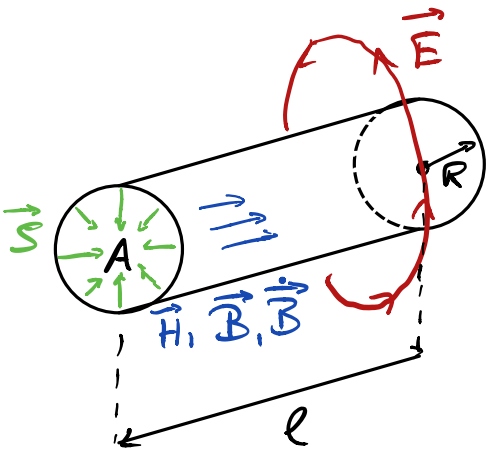
$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} \parallel \vec{k}}$$

für eine ebene EM-Welle

Intensität $I \;\hat{=}$ zeitl. Mittelwert von $|\vec{S}|$

Beispiel: Zylinderspule, Ein- bzw. Ausschalten

Do, 27.6.19



Poynting-Vektor auf der Spuleroberfläche

$$\int \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$= E \cdot 2\pi R = -\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\mu_0 \frac{N \cdot I}{\ell}\right) dA$$

$$= -\mu_0 \frac{N}{\ell} \dot{I} \pi R^2$$

$$|\vec{S}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| = \left(\frac{1}{2} \mu_0 \frac{N}{\ell} \dot{I} R\right)\left(\frac{N \cdot I}{\ell}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell^2} \dot{I} R I$$

gesamte Leistung durch Spuleroberfläche $= |\vec{S}| \cdot 2\pi R \cdot \ell$

$$= \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \underbrace{\pi R^2}_{A} \cdot \dot{I} \cdot I$$

$$= L \cdot \dot{I} \cdot I$$

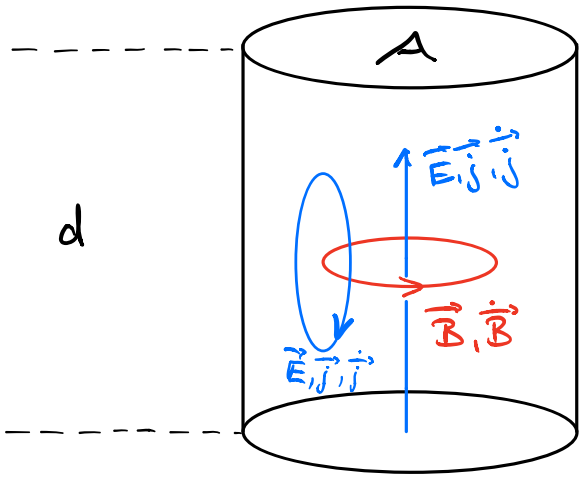
Energie in der Spule

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} W_{mag} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot L \cdot I \cdot \dot{I}$$

$\Rightarrow$ Die gesamte in einer Spule gespeicherte EM Energie fließt durch die Zylinderoberfläche ein bzw. aus.

8.2 Der Skin-Effekt und Hohlleiter

Wir wollen den Stromfluss durch einen homogenen Leiter betrachten.



Ohmsches Gesetz:

Wir hatten: $R = \frac{U}{I}$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{IR}{d} = \frac{I}{A} \cdot \frac{AR}{d} =: j \cdot \sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

mit der Leitfähigkeit $\sigma = \frac{d}{AR}$

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega m}$$

Nehme an, dass $\sigma = \text{const.} \neq \sigma(\omega)$

$\Rightarrow$ „normaler" Skin-Effekt

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}$$

Starten mit (Wellengleichung)

mit $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$:

$$\frac{1}{\sigma} \Delta \vec{j} - \frac{1}{\sigma} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{j} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

σ: Konstante beim normalen Skin-Effekt

oder eindimensional:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} j - \frac{1}{\sigma} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} j = \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t}$$

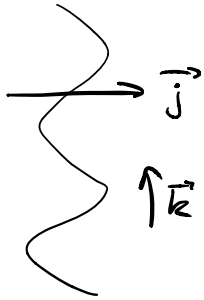
hat auch n-dimensional nur eine $\neq 0$ Komp.

Richtung von $\vec{j}$:

$$\text{div}\, \vec{D} = \rho = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}\, \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \text{div}\, \vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{j} \perp \vec{k}$$



Ansatz: $j = j_0 \cdot e^{i(kx-\omega t)}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\sigma} k^2 j_0 e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{\sigma}\frac{1}{c_0^2}\omega^2 j_0 e^{i(kx-\omega t)} = -\mu_0 i\omega j_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

$\frac{1}{c_0^2}$ klein für kleine ω, also für $\frac{\omega^2}{\sigma c_0^2} \ll |-i\mu_0\omega|$

$$\Rightarrow \quad \omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \text{gute Näherung}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k^2 = i\mu_0\sigma\omega} \quad \text{Dispersionsrelation (im Leiter, nicht im Vakuum)}$$

$\in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{i}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}$$

also mit $j = j_0 e^{i(kx-\omega t)} = j_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(k_r x - \omega t)}$

mit $\delta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu_0\sigma\omega}}$ „Eindringtiefe" je besser der Leiter, desto ausgeprägter der Skin-Effekt

und $k_r = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}$ (Realteil der Wellenzahl)

Zahlenbeispiele: Kupfer, $\omega = 2\pi \cdot 50\,\text{Hz}$

$$\Rightarrow \quad \delta \simeq 0{,}85\,\text{cm}$$

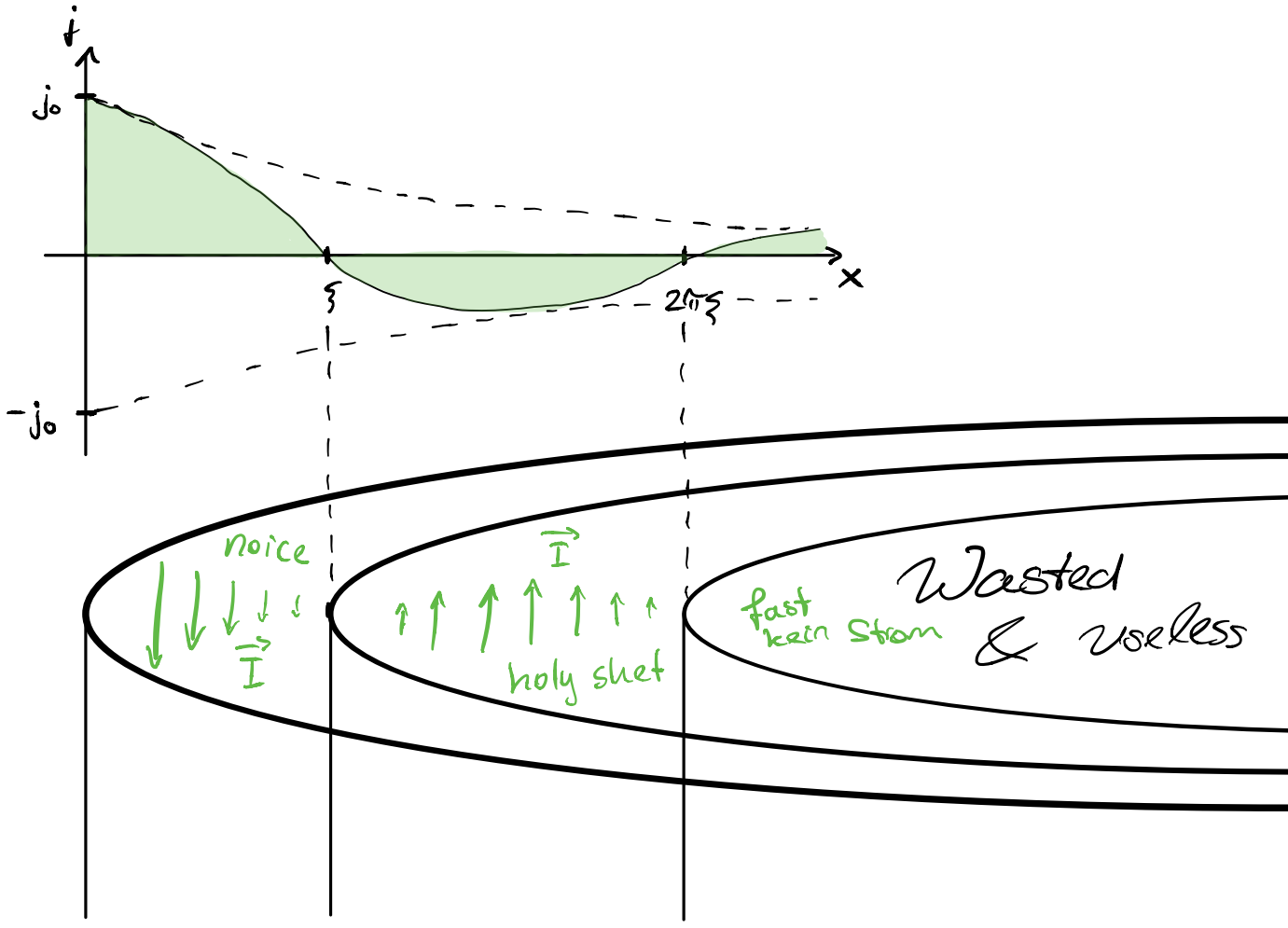
Kupfer, $\omega = 2\pi \cdot 100\,\text{Hz}$

$$\Rightarrow \quad \delta \simeq 7\,\mu\text{m}$$

Bei sehr hohen Frequenzen sind Drähte daher als Zuleitungen nicht geeignet.

Bei hohen Frequenzen verwendet man Hohlleiter.

graphisch:



12. Jul. '19

Hohlleiter:

Idee: Führe EM Welle bzw. Energie im Hohlraum.

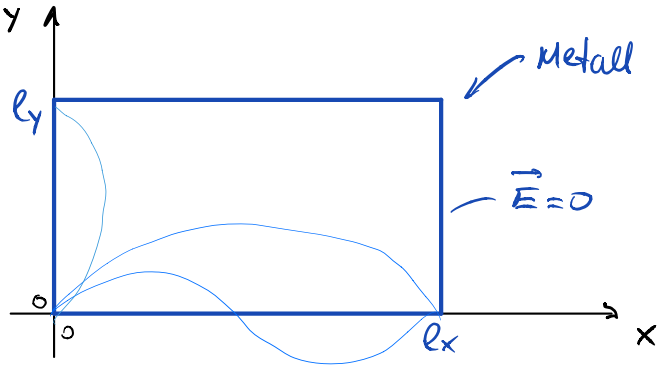
Annahme: $\sigma \to \infty$

$\Rightarrow$ $\vec{E}$(Wänden) = 0

$\Rightarrow$ laufende Welle in z-Richtung

$\Rightarrow$ stehende Welle in x- und y-Richtung

Rechteckiger Hohlleiter:



Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(keine Quellen, daher = 0)}$$

Ansatz: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z - \omega t)$

stehende Welle | laufende Welle

Einsetzen: $-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{1}{c_0^2} \omega^2 = 0$

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0} \qquad (*)$$

und (wegen Randbed. $\vec{E}(x=0, x=\ell) = 0$)

Anzahl der Moden

$$\boxed{k_x = n_x \cdot \frac{\pi}{\ell_x} \quad ; \quad k_y = n_y \frac{\pi}{\ell_y}}$$

mit $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$

Mit welcher Phasengeschw. läuft die Welle? $\frac{\omega}{k_z}$! (NICHT $\frac{\omega}{|k|}$ ∇ 0)

$$(*) \Rightarrow \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - n_x^2 \frac{\pi^2}{\ell_x^2} - n_y^2 \frac{\pi^2}{\ell_y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\omega}{k_z} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\omega^2} \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{\ell_x^2} + \frac{n_y^2}{\ell_y^2} \right)}}} \geq c_0$$

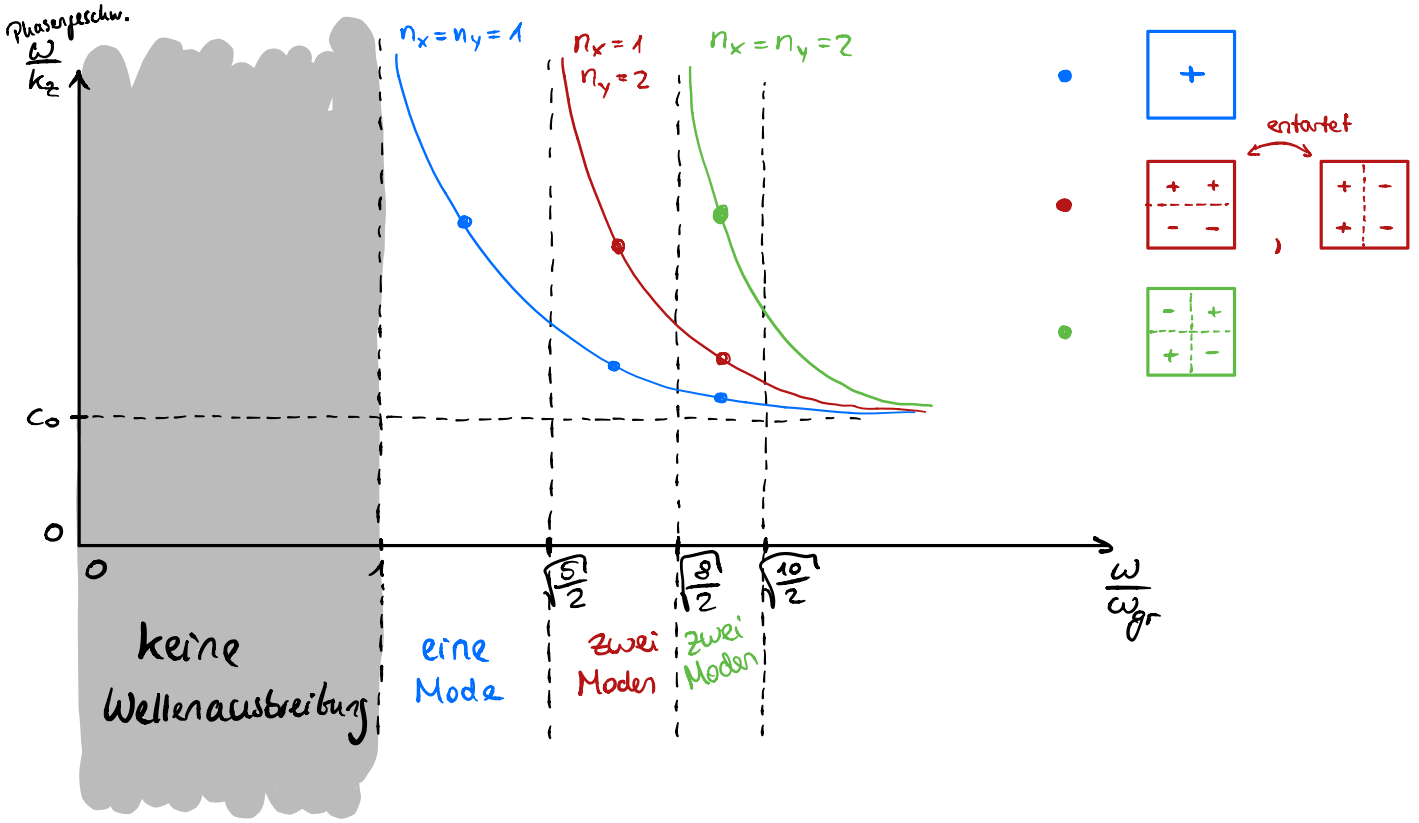
durch Umstellen der vorherigen Formel

1) Es gibt eine <u>Grenzfrequenz</u> (Cutoff-Frequenz) ω_{gr}, unterhalb derer der Radikand negativ wird, also nur gedämpfte Wellen (evaneszente Wellen, vgl. Tunneleffekt Quantentheorie)

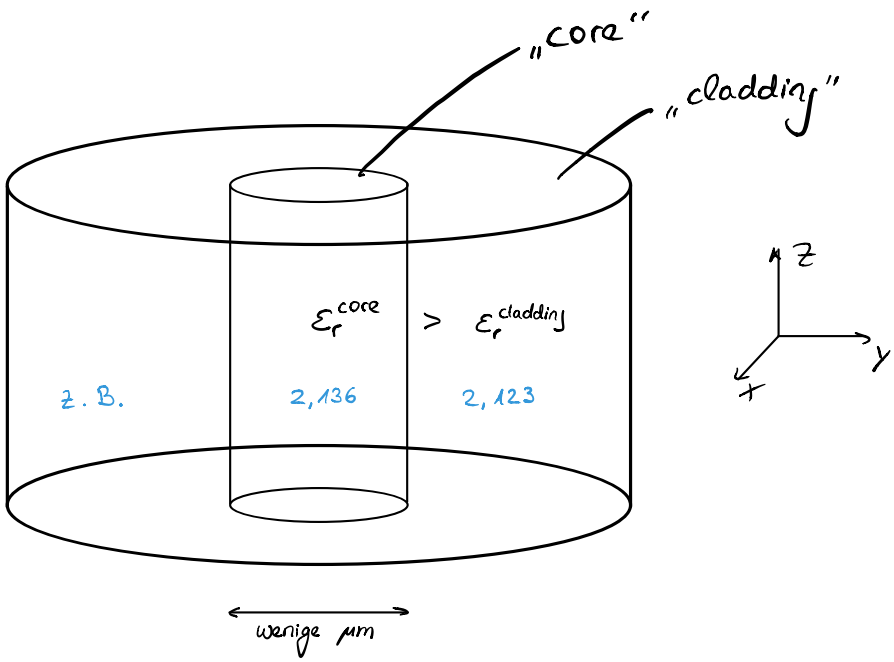
$$\boxed{\omega_{gr} = c_0 \pi \sqrt{\frac{1}{\ell_x^2} + \frac{1}{\ell_y^2}}}$$

grafisch: $l_x = l_y$

ist der Hohlleiter zu klein, passt keine Welle mehr durch ⇒ keine komplette Mode ⇒ Dämpfung



Optische Wellenleiter



Wie sieht die Wellengl. aus?

Maxwell-Glu.:

$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (\rho = 0)$

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad | \operatorname{rot}$

$\operatorname{rot} \vec{H} = \dot{\vec{D}} \quad | \frac{\partial}{\partial t} \quad (\vec{j} = 0)$

$$\Rightarrow \quad \text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta E = -\mu_0 \text{ rot } \dot{\vec{H}}$$

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = \ddot{\vec{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \ddot{\vec{E}}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 = \text{div}(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}) = \varepsilon_0 (\varepsilon_r \text{ div } \vec{E} + \vec{E} \cdot \underbrace{\text{grad } \varepsilon_r}_{\neq 0})$$

$$\Rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E} \cdot \text{grad } \varepsilon_r$$

einsetzen

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad}\left(\frac{\vec{E}}{\varepsilon_r} \cdot \underbrace{\text{grad}(\varepsilon_r)}_{=0 \text{ in homogenen Medien}}\right) = 0}$$

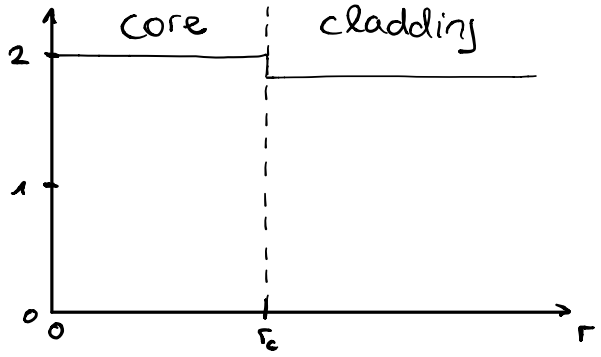
mit $c = \frac{c_0}{n}$ $\quad n \mathrel{\hat{=}}$ Brechzahl, $[n] = 1$

„Langsamkeitsfaktor" – um wie viel langsamer ist das Licht im Medium verglichen mit Vakuum

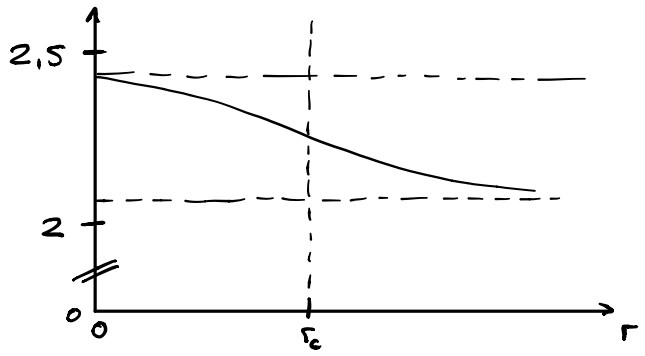
Medium-Lichtgeschw.: $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

nur eine Abkürzung, wichtig in Optik

Beispiel: „step-Index" Glasfaser



Beispiel: „dispersion-shifted" Glasfaser



Do 4.7.19

Kapitel 9: Elektrodynamik in Kontinua

„Materie"

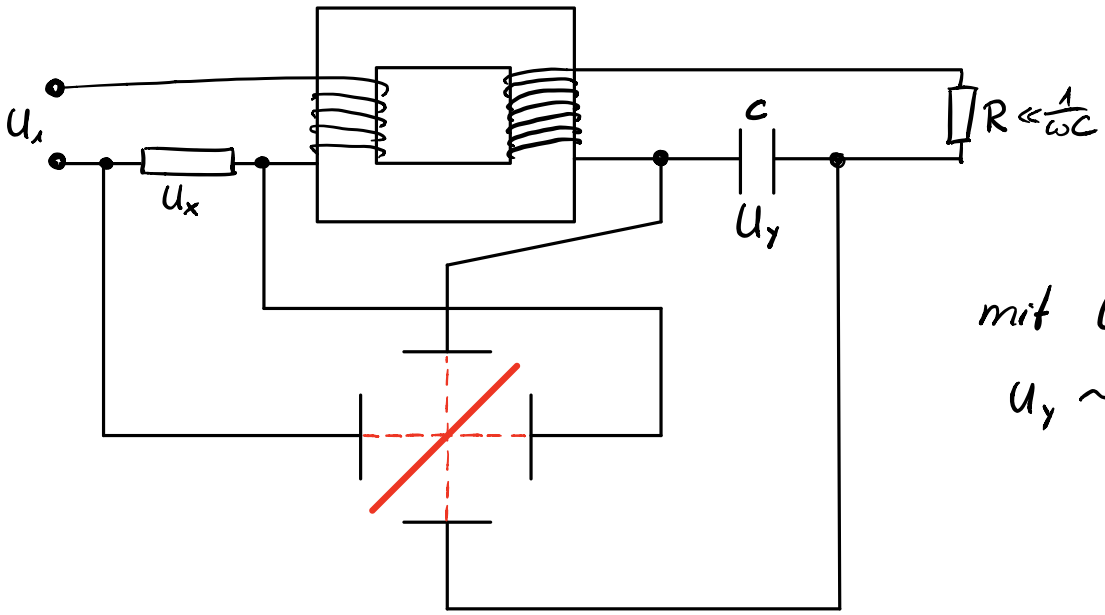
Bisher hatten wir die Zusammenhänge

$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 \vec{H}\\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E}\end{aligned}\right\}$$ im Vakuum

bzw.

$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H}\\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}\end{aligned}\right\}$$ in „vielen" Materialien

Kann man den Zusammenhang $\vec{B} \leftrightarrow \vec{H}$ messen?

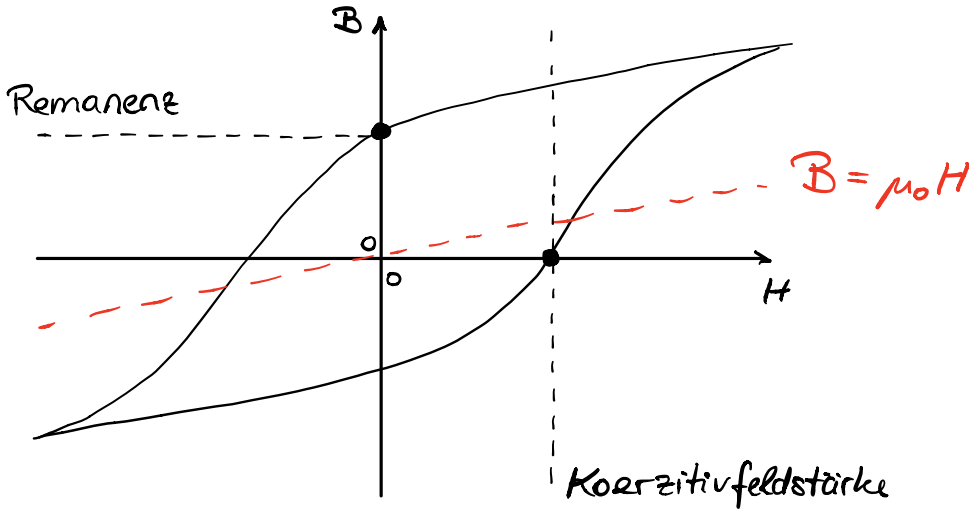


mit $U_x \sim I \sim H$

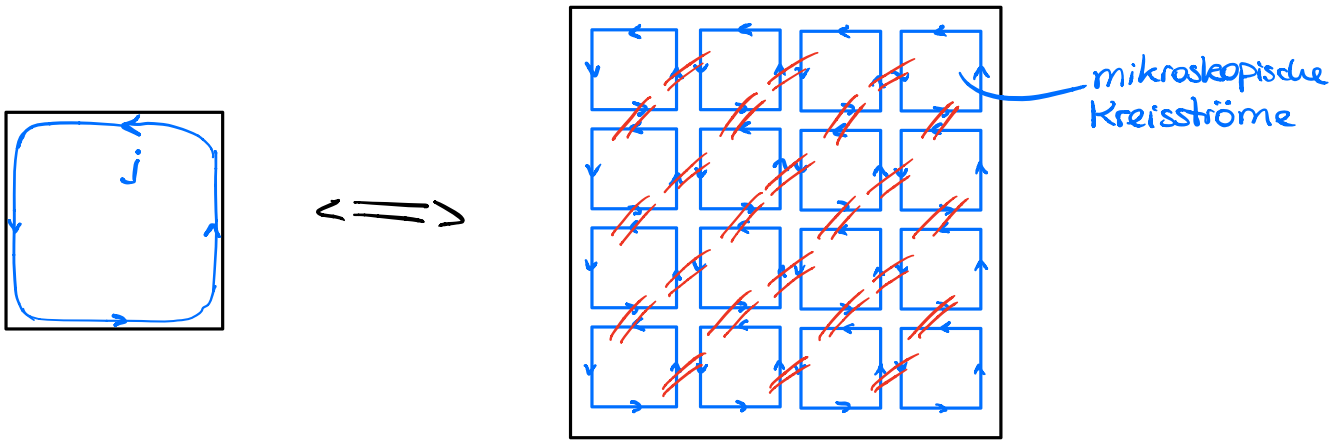
$U_y \sim U_{ind} \sim \dot{B} \sim B$

?

- $H = 0$, dennoch $B \neq 0$
- B ist keine eindeutige Funktion von H

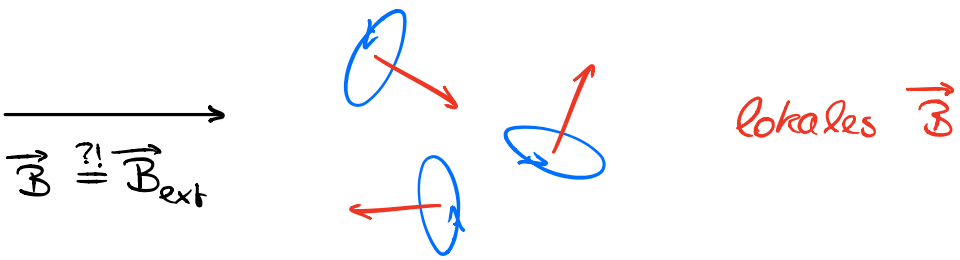


⇒ interne Ströme im magn. Material?



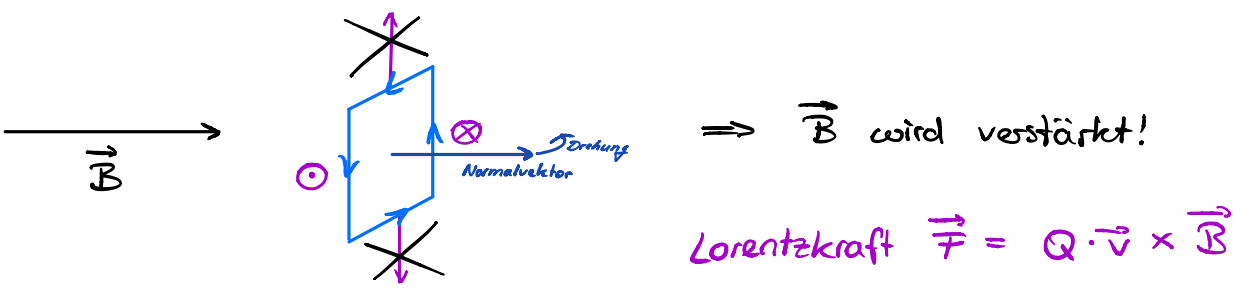
$\Rightarrow$ Ja, man spricht jedoch von magn. Dipolmomenten

Betrachte atomare Bewegung (klassisch)



! Ausrichten durch äußeres $\vec{B}$ - Feld

Betrachte rechteckige kleine starre Leiterschlaufe:



mit der Kraft auf einen Leiter der Länge l (siehe Kapitel 5.2.2)

$$F = l \cdot I \cdot B$$

resultiert das Drehmoment

$$M = b \cdot (l \cdot I \cdot B) = (I \cdot bl) \cdot B$$

vektoriell $\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$ DREHMOMENT

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$
$= \frac{d}{dt} \vec{L}$

dreht $\vec{m}$ so lange, bis $\vec{m}$ in die gleiche Richtung wie $\vec{B}$ zeigt

mit dem magn. Dipolmoment $\vec{m}$

$|\vec{m}|$ = Strom · Fläche = $I \cdot \ell \cdot b$;

Richtung von $\vec{m}$ $\hat{=}$ Normale bzgl. der Fläche

Also: $\vec{B}$ richtet magn. Dipolmomente aus $\Rightarrow$ $\vec{B}$ wird verstärkt.

Aber! Thermische Fluktuationen zerstören Ausrichtung wieder.

(zugegeben sehr verwirrend)

Formales Vorgehen: Maxwellgl. im Vakuum

(1) $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho$

(2) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

(3) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

(4) $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}$

ρ ist die gesamte Ladungsdichte, also

$\rho = \rho_{ext} + \rho_{int}$

$\vec{j}$ ist die gesamte Stromdichte

$\vec{j} = \vec{j}_{ext} + \vec{j}_{int}$

Betrachte statischen Fall, ersetzen in (4)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}_{ext} + \vec{j}_{int}$

„Taschenspielertrick"

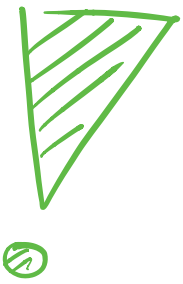
Ziel: man lasse interne Beiträge „verschwinden"

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \underbrace{\vec{j}_{int}}_{=: \operatorname{rot} \vec{M}} = \vec{j}_{ext}$

$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}\underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right)}_{=: \vec{H}} = \vec{j}_{ext}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{ext}}$

$\boxed{\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})}$



$\operatorname{rot} M = \vec{j}_{int}$ $\quad$ M wird „Magnetisierung" genannt

$$[M] = [H] = \frac{A}{m} = \frac{Am^2}{m^3} \triangleq \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

Häufig hat man $\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$ $\quad + \ldots \vec{H}^2 + \ldots$ (Taylor)

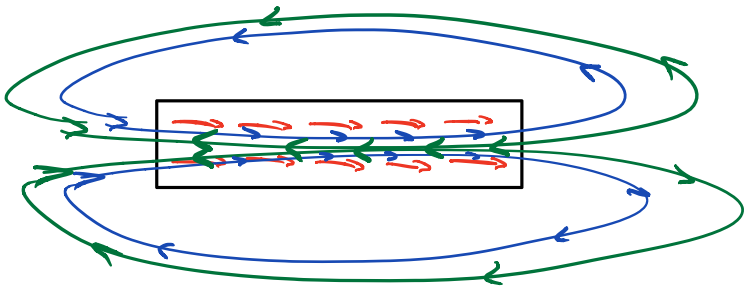
mit der magnetischen Suszeptibilität χ_m

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{=: \mu_r} \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Beispiel: homogener Permanentmagnet

im Magneten: $\vec{M} = \text{const.} \neq 0$

außerhalb: $\vec{M} = 0$



innen: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

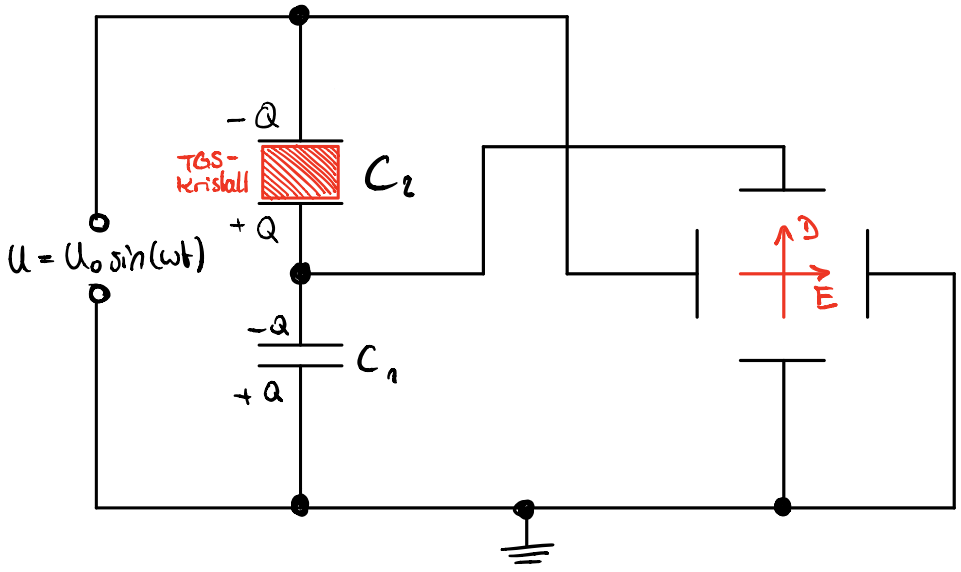
außen: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\Rightarrow$ wegen $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ist die Normalkomponente von $\sim \vec{B}$ stetig,

die Normalkomponente von $\sim \vec{H}$ **NICHT!**

19.7.19

Messung $\vec{D}(\vec{E})$



Mit dem Scheinwiderstand einer Kapazität $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$

mit $C_1 \gg C_2 \Rightarrow |Z_{C1}| \ll |Z_{C2}|$

D.h. die angelegte Spannung U fällt hauptsächlich über C_2 ab.

Wegen $E = \frac{U}{d}$ am Kondensator C_2 ist E auf der x-Achse aufgetragen.

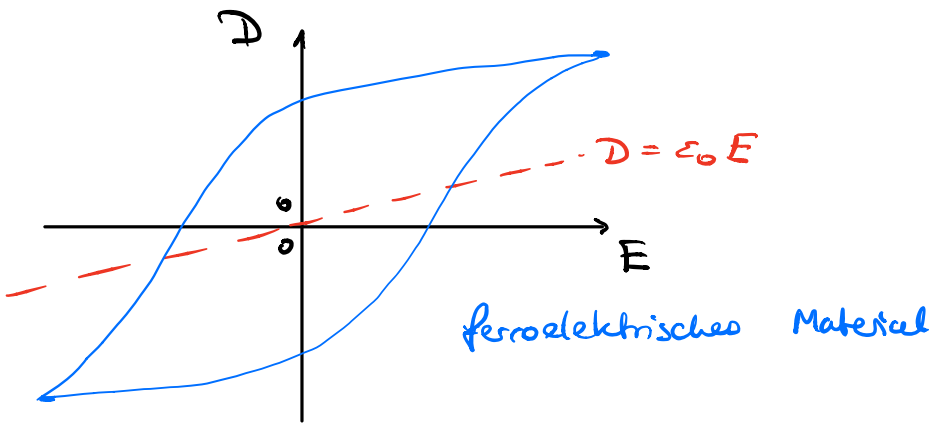
$\Rightarrow$ Ablenkung Elektronen

Vertikale Achse: $U_y = U_{C1} = \frac{Z_{C1}}{Z_{C1} + Z_{C2}} U(\text{serie}) = \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} U$

(Z_{C1} klein)

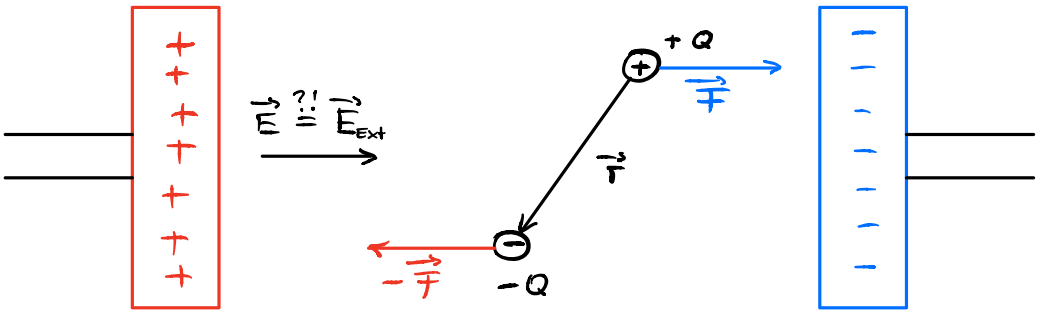
$= \frac{C_2}{C_1} U = \frac{Q}{C_1} \sim D$

$\Rightarrow$ $\boxed{Q = C \cdot U}$ $\boxed{Q = \int D}$



Zusammenhang $\vec{D} \leftrightarrow \vec{E}$

Betrachte einen el. Dipol (Kap. 4.6) im $\vec{E}$-Feld.



Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (Q\vec{r}) \times \vec{E} =: \vec{p} \times \vec{E}$

$\vec{p}$: el. Dipolmoment

Also: $\vec{E}$ richtet el. Dipolmomente aus $\Rightarrow$ $\vec{E}$ wird abgeschwächt.

Aber thermische Fluktuationen zerstören Ausrichtungen wieder!

Formales Vorgehen:

Maxwellsche Gleichung im Vakuum: $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho$

ρ ist die gesamte Ladungsdichte: $\rho = \rho_{int} + \rho_{ext}$

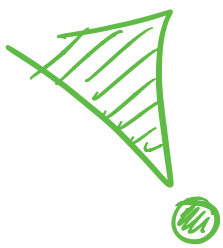
Einsetzen: $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho_{ext} + \rho_{int}$

Ziel: interne Beiträge „verschwinden" lassen

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) \underbrace{- \rho_{int}}_{=: \operatorname{div}\vec{P}} = \rho_{ext}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{=: \vec{D}} = \rho_{ext}$$

wird häufig weggelassen



also

$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{ext}$	$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\vec{D} - \vec{P})$	$\operatorname{div}\vec{P} = -\rho_{int}$

$\vec{P}$ wird Polarisation genannt.

$$[P] = [D] = \frac{As}{m^2} = \frac{Asm}{m^3} \hat{=} \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$$

Häufig hat man (hier phänomenologisch):

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}} + \vec{E}^2$$

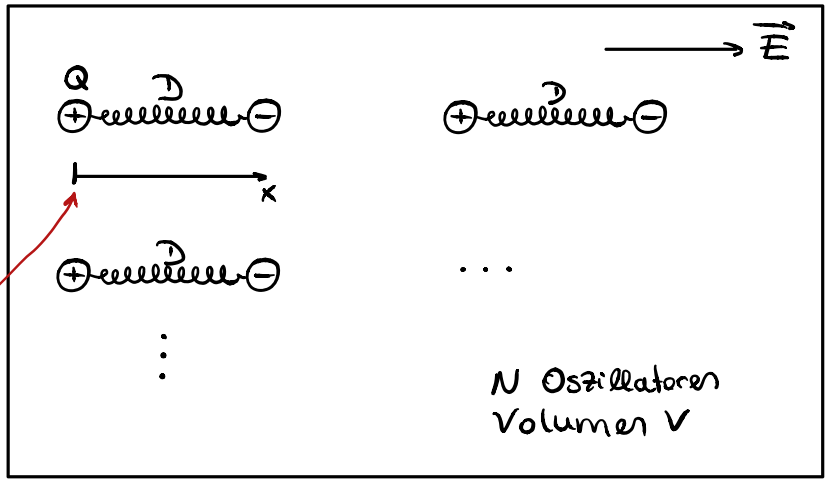
mit der elektrischen Suszeptibilität χ_e, $[\chi_e] = 1$

$$\Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{=: \varepsilon_r} \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

Beispiel: ein einfaches Modell für ε_r im Medium



sehr schwer, bzw. fertgeh.

Dipolmoment eines Oszil.

$$p = Q \cdot x$$

und damit die Polarisation

$$P = \frac{N \cdot p}{V} = \frac{N \cdot Q}{V} \cdot x$$

$x = ?$ $\Rightarrow$ Newtonsche Bewgl.: $m\ddot{x} = Q \cdot E - D \cdot x = Q \cdot E_0 \cdot \sin(\omega t) - D \cdot x$

Ansatz: $x = x_0 \cdot \sin(\omega t)$

Einsetzen: $-m\omega^2 x_0 \sin(\omega t) + D \cdot x_0 \sin(\omega t) = Q E_0 \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{Q E_0}{D - m\omega^2} = \frac{Q \frac{E_0}{m}}{\frac{D}{m} - \omega^2}$$

mit Eigenfrequenz $\Omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ $\Rightarrow$ $x_0 = \frac{Q \cdot E_0 \cdot \frac{1}{m}}{\Omega^2 - \omega^2}$

resultiert die Polarisation P:

$$P = \frac{N \cdot Q}{V} \cdot x = \frac{NQ}{V} \frac{QE_0 \frac{1}{m}}{\Omega^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

$$= \frac{NQ^2}{Vm} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} E(t) =: \varepsilon_0 \chi_e E(t)$$

folgt die el. Suszeptibilität: $\chi_e = \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$

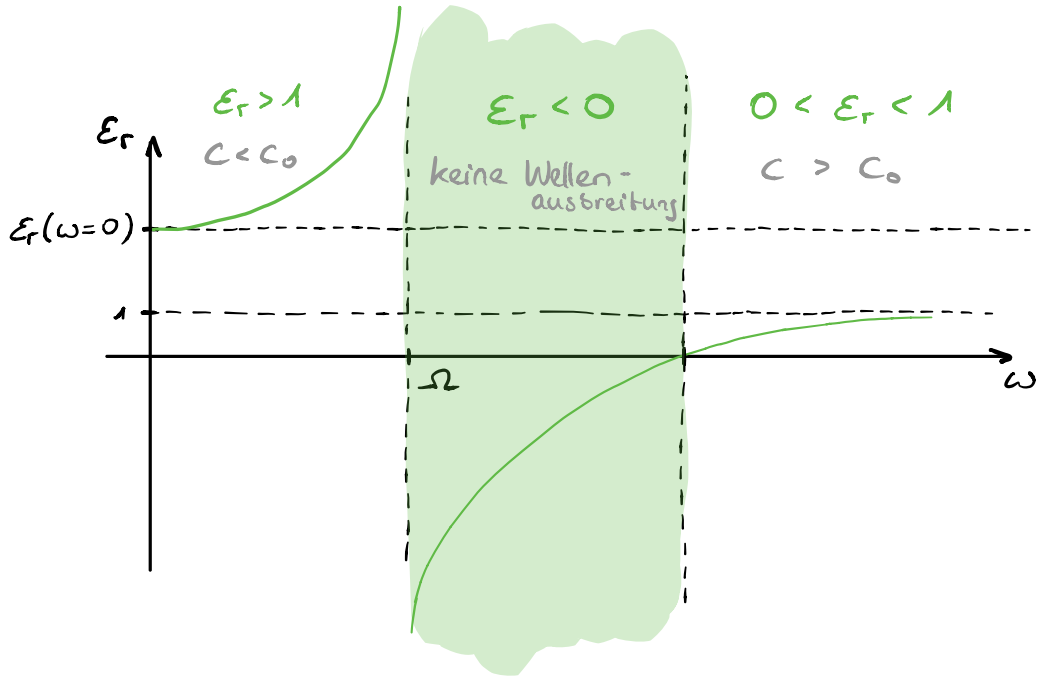
und die dielektrische Funktion: $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_r = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}}$$

„bei ganz hohen Frequenzen verhält sich jedes Material wie Vakuum"

$$= \varepsilon_r(\omega)$$

graphisch:



mit der statischen „Dielektrizitätskonstante"

$$\varepsilon_r(\omega=0) = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0} \frac{1}{\Omega^2} \geq 1$$

Phasengeschwindigkeit c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mu_0}}$$

häufig: $c =: \frac{c_0}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r}}$ BRECHZAHL

Naber rocks the house

11.7.19

9.1 Der Depolarisationsfaktor

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\vec{D} - \vec{P}) \qquad (P \text{ schwächt } E\text{-Feld})$$

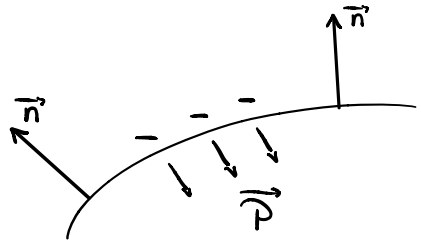
Das Feld $\vec{E}$ im Material setzt sich zusammen aus dem externen Feld $\vec{E}_{ext}$ und dem durch $\vec{P}$ erzeugten Feld $\vec{E}_{DP}$ (von „internen" Ladungen)

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{DP}$$

Für ein homogenes Material sind nur die durch $\vec{P}$ induzierten Oberflächenladungen relevant mit

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sigma_p(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \qquad (\text{aus } \operatorname{div}\vec{P} = -\varrho_{ext})$$

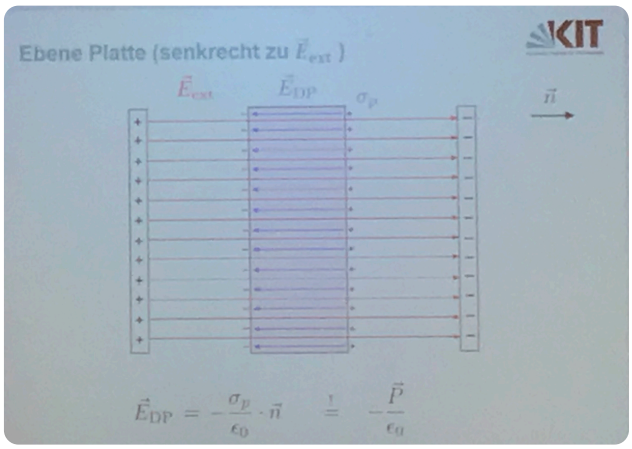
mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ auf einem Flächenelement der Fläche.



Mit $\sigma_p(\vec{r})$ wird $\vec{E}_{DP}(\vec{r})$ berechnet.

Folgerung: Das Depolarisationsfeld $\vec{E}_{DP}$ hängt von der Geometrie des Körpers ab!

Im Allgemeinen ist $\vec{E}_{DP}$ eine komplizierte Funktion des Ortes. Die Berechnung ist nur in Spezialfällen analytisch möglich.



$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$
$$= \varepsilon_0 \chi_e (\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{DP})$$

Einfacher Spezialfall: Ebene Platte in einem homogenen Feld

$$\vec{E}_{DP} = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \left(\vec{E}_{ext} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 \cdot \frac{\chi}{1+\chi} \cdot E_{ext}$$

Allgemein gilt für ein homogenes Material:

$$\vec{E}_{DP} = -\underline{\underline{N}} \cdot \frac{P}{\varepsilon_0}$$

mit der Depolarisationsmatrix $\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} N_x & 0 & 0 \\ 0 & N_y & 0 \\ 0 & 0 & N_z \end{bmatrix}$; $N_x, N_y, N_z \geq 0$

und den Depolarisationsfaktoren N_x, N_y, N_z

mit der Eigenschaft (für Ellipsoide) $N_x + N_y + N_z = 1$

Für jede der Komponenten x, y, z gilt dann:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi \left(E_{ext,i} - N_i \cdot \frac{P_i}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_i = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + N_i \chi} \cdot E_{ext,i}} \quad , \; i = x, y, z$$

und das elektrische Feld im Inneren

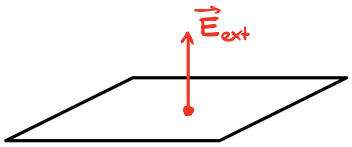
$$E_i = E_{ext,i} - N_i \frac{P_i}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_i = \frac{1}{1 + N_i \chi} \cdot E_{ext,i}}$$

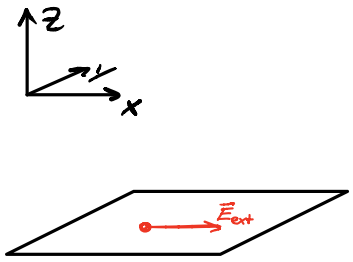
$\Rightarrow$ Feld wird abgeschwächt

Bekannte Depolarisationsfaktoren für einfache Geometrien

1) Dünne Platte



$N_z = 1$



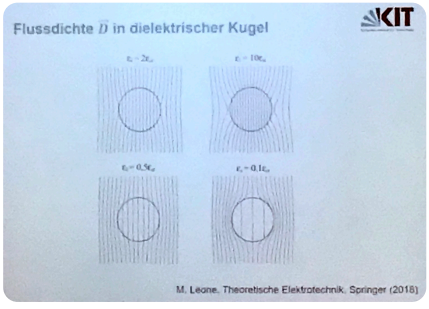
$N_x = N_y = 0$

2) Langer Zylinder

$N_x = 0$

$N_x = N_y = \frac{1}{2}$

3) Kugel $\quad N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$



Besonderheiten bei der polarisierten Kugel

Das innere Feld $\vec{E}$ sowie die Polarisation $\vec{P}$ sind homogen.

Das äußere von der Polarisation $\vec{P}$ erzeugte Feld ist das eines elektrischen Dipols mit Dipolmoment

$$\vec{p} = \vec{P} \cdot V$$

Mit $N = \frac{1}{3}$ und $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ folgt

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\chi}{1 + \frac{1}{3}\chi} \vec{E}_{ext} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 r^3 \frac{\chi}{\chi + 3} \cdot E_{ext}$$

oder mit $\varepsilon = 1 + \chi$ (Schreibweise in Büchern)

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3 \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \vec{E}_{ext}$$