Institut für Experimentelle Kernphysik

Übungen zur Physik II (Elektrodynamik)

SS 2003

Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann

Blatt 2

Bearbeitung: 14.5.2003

---

1. Ladungsverteilung I

Berechnen Sie die Gesamtladung Q und die *mittlere* lineare Ladungsdichte $\bar{\lambda}$ eines dünnen Stabs der Länge L. Die Ladungsdichte des Stabs ist gegeben durch $\lambda = \lambda_0(1 - x/L)x/L$, wobei x der Abstand von einem Ende des Stabs zu einem Punkt auf dem Stab ist. λ_0 ist eine Konstante.

2. Ladungsverteilung II

Eine kreisförmige Scheibe in der x, y-Ebene mit Mittelpunkt bei $(0, 0, 0)$ und Radius a hat auf einer Seite eine Oberflächenladung mit Ladungsdichte:
(i) $\sigma = \sigma_0 r/a$, (ii) $\sigma = \sigma_0 \exp(-r/a)$ wobei σ_0 eine Konstante ist.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung Q für (i) und (ii).

(b) Welche Kraft wirkt auf Teilchen der Ladung q am Punkt $Q(0, 0, a)$ im Falle (i)?
(Hilfe: $\int \frac{1}{\cos x} dx = ln(\frac{1}{\cos x} + \tan x) + C$)

3. Mathematisches Vorgeplänkel

Mit Hilfe des sogenannten Nabla-Operators (in kartesischen Koordinaten)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_z \tag{1}$$

lassen sich der Gradient einer skalaren Funktion $f(x, y, z)$ sowie die Divergenz und Rotation einer vektorartigen Funktion $\vec{F}(x, y, z)$ schreiben.

$$grad\ f = \nabla f, \quad div\ \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}, \quad rot\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F} \tag{2}$$

Gegeben sei nun $f(x, y, z) = f(r) = r^{2n}$ mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Bestimmen sie dafür:
(a) *grad* f, **(b)** *div grad* f, **(c)** *rot grad* f
Die Ergebnisse lassen sich auf alle Funktionen $f(r)$, die nur von $r = |\vec{r}|$ abhängen, verallgemeinern. Bestimmen sie auch für ein allgemeines $f(r)$ die obigen drei Ausdrücke und überprüfen sie ihr Ergebnis für den Spezialfall $f(r) = r^{2n}$.
Hinweis: Die Ableitungen von $f(r)$ nach x, y, z können und müssen mit Hilfe der Kettenregel auf Ableitungen von $f(r)$ nach r zurückgeführt werden. Die Aufgabe läßt sich mit ihrem Wissen über Vektoren und Ableitungen lösen, ohne die genauen mathematischen bzw. physikalischen Eigenschaften von den eventuellen neuen Begriffen Gradient, Divergenz und Rotation zu kennen!
Anmerkung: Den Vektor-Operatoren grad, div und rot werden sie in diesem Semester noch des öfteren begegnen.

4. Vorgriff und mathematisches Geplänkel II — Potential und Feldstärke

Ein elektrostatisches Feld wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$E_x = 6xy; \quad E_y = 3x^2 - 3y^2; \quad E_z = 0$$

(a) Berechnen sie das Linienintegral von $\vec{E}$ vom Ursprung aus zum Punkt $P(x_1, y_1, 0)$. Integrieren sie erst entlang der x-Achse, dann entlang der y-Achse und umgekehrt.

(b) Zeigen sie, dass sich durch *Gradientenbildung* der in (a) erhaltenen Potentialfunktion wieder die Komponenten des anfänglichen Feldes ergeben.
Anmerkung: Zu jedem konservativen Kraftfeld $F = F(x;y;z) = F(x)$ gibt es eine skalare Funktion, das Potential $V = V(x)$, so dass gilt: $F = -grad\ V = \nabla V$.

5. Coulombkraft

Wie verhalten sich die Beträge der gegenseitigen Coulombkräfte F_1 und F_2 zweier Punktladungen, wenn sich ihre Ladungsmengen Q wie $Q_1 : Q_2 = 2 : 3$ verhalten?
i) $F_1 = F_2$ ii) $2F_1 = 3F_2$ iii) $3F_1 = 2F_2$ iv) $4F_1 = 9F_2$ v) $9F_1 = 4F_2$

Hier finden sie eine kurze Beschreibung der Vektor-Operatoren:
http://studweb.studserv.uni-stuttgart.de/studweb/users/phy/phy31653/xf1/pdf/gradient.pdf

Kleines Lexikon: Gradient, Divergenz, Rotation:
Der Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstieges (oder Abstieges) der Funktion $f(x, y, z)$ an. Er "verwandelt" ein skalares Feld in ein Vektorfeld.
Die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich der Dichte des Flußes durch die Oberfläche eines Volumenelementes. (Maß für Quellen- und Senken-Dichte)
Die Rotation zeigt in Richtung der Flächennormale des Flächenelementes mit der größten Zirkulation. (Maß für die Wirbeleigenschaft des Feldes)

Operation	Feld	Ergebnis	Symbol
Gradient	Skalares Feld U	Vektorfeld *grad* U	$\nabla\ U$
Divergenz	Vektorfeld $\vec{V}$	Skalares Feld *div* $\vec{V}$	$\nabla \cdot \vec{V}$
Rotation	Vektorfeld $\vec{V}$	Vektorfeld *rot* $\vec{V}$	$\nabla \times \vec{V}$

Hamiltonscher Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_z$, "nabla"
Laplace-Operator: $\triangle = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$

Besondere Felder:

$div\ rot\vec{V} = 0$	quellenfreies Rotorfeld
$rot\ gradU = 0$	wirbelfreies Gradientenfeld(konservativ), z.B. $\vec{E} = grad\ U$(Feldstärke)

Im quellenfreien Raum gilt "Laplacegleichung: $div\ gradU = \triangle U = 0$
Im quellenbehafteten Raum gilt die Poisson-Gleichung: $div\ gradU = \triangle U = \varrho$ mit der Quellendichte $\varrho = \varrho(x, y, z)$.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor; Tel.: 07247 82 4173; Büro; Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/edyn.html
Hier gibt es auch eine Excel-Liste, mit deren Hilfe sie ihr Tutorium herausfinden können.