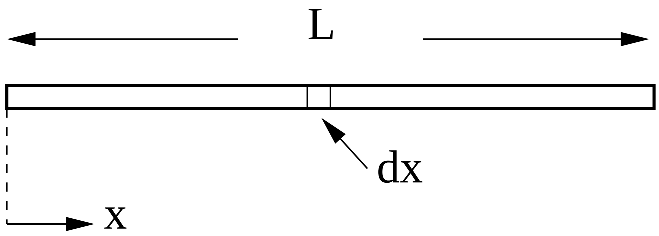
Institut für Experimentelle Kernphysik

Übungen zur Physik II (Elektrodynamik) SS 2003

Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann **Blatt 2** Bearbeitung: 14.5.2003

1. Ladungsverteilung I



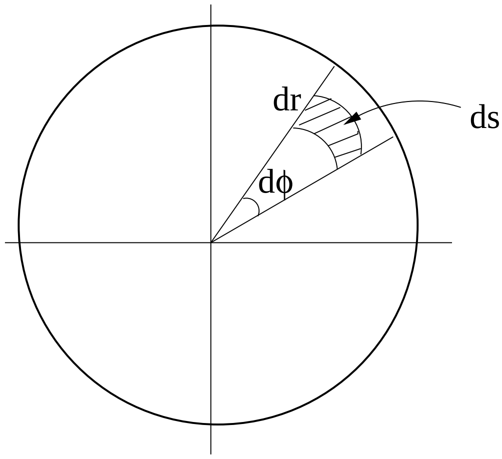
Betrachten Sie ein kleines Element dx. Die Ladung in diesem Element ist gegeben durch $dQ = \lambda\ dx$. Damit ergibt sich für die Gesamtladung:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^L \lambda\ dx \\ &= \int_0^L \lambda_0(1 - x/L)x/L\ dx = \frac{\lambda_0}{L}\left[\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{3}\right] \\ Q &= \frac{\lambda_0 L}{6} \end{aligned}$$

Die mittlere lineare Ladungsdichte, $\bar{\lambda} = Q/L = \lambda_0/6$

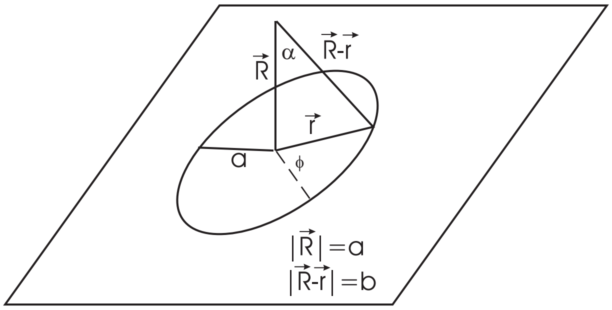
2. Ladungsverteilung

(a) Ladung
Analog zu oben wird ein kleines Element ds der Scheibe betrachtet:



$$\begin{aligned} dQ &= \sigma\ ds = \sigma\ r\ d\phi\ dr \\ (i)\ \ Q &= \frac{\sigma_0}{a}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^2 dr \\ \rightarrow Q &= \frac{2\pi\sigma_0 a^2}{3} \\ (ii)\ \ Q &= \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r e^{-r/a} dr \\ \rightarrow Q &= 2\pi\sigma_0 a^2\,(1 - 2/e) \end{aligned}$$

(b) Kraft



Volumen:

$$F(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}\varrho(\vec{r})d^3r \tag{1}$$

Fläche:

$$F(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A \frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}\sigma(\vec{r})d^2r \tag{2}$$

$\hat{b}$ Einheitsvektor in $\vec{b}$ bzw. $\vec{R}-\vec{r}$-Richtung;
Polarkoordinaten: $d^2r = dA = \varphi\ r\ dr$
Kraft auf Probeladung q im Abstand $|\vec{R}-\vec{r}| = b$

$$dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dA}{b^2}\hat{b} \tag{3}$$

Parametrisierung nötig, um nur noch Konstanten und Integrationsvariablen zu erhalten!
Hier: Aufspaltung in horizontale Komponente $dF_h = dF\cdot\sin\alpha$ (Probeladung liegt im horizontalen Mittelpunkt, deshalb mittelt sich die horizontale Komponente weg (Symmetrie).
Vertikale Komponente: $dF_v = dF\cdot\cos\alpha$.

$$dF_v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(r)d\varphi\ r\ dr}{b^2}\cos\alpha \tag{4}$$

Aktuelles Problem: Integrationsvariablen: φ und r, mit *"zusätzlichen"* Variablen α,b!!! $\rightarrow$ Eliminiere Variablen!
$b = \frac{a}{\cos\alpha}$; $\quad r = a\tan\alpha$; $\quad dr = a\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$; $\quad \frac{d\tan\alpha}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$dF_v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(r)\cos^3\alpha\tan\alpha}{\cos^2\alpha}d\varphi d\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\sigma(r)d\varphi d\alpha \tag{5}$$

(i) $\sigma(r) = \sigma_0 r = \sigma_0\tan\alpha$

$$dF_v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\sigma_0\tan\alpha d\varphi d\alpha = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}d\varphi d\alpha = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}d\varphi d\alpha \tag{6}$$

Integrationsgrenzen: $\varphi:\ 0$ bis 2π; $\alpha:\ 0$ bis $\pi/4$ (Radius a und Höhe $a \Rightarrow \alpha_{end} = 45$)

$$F = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)d\alpha = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\left[\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\tan\alpha\right)-\sin\alpha\right]_0^{\pi/4} \tag{7}$$

$$F = \frac{q\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} - ln(1) - 0\right) = \frac{q\sigma_0}{2\varepsilon_0}(ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (8)$$

Aufgabe 2-2b) anderer Rechenweg:

Berechne Kraft über Potential am Punkt Q.

$$\begin{aligned}\Phi_Q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\sigma(r)dA}{d(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}d\varphi r dr\frac{\sigma(r)}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 a}\int_0^a\frac{r^2dr}{\sqrt{r^2+z^2}}\end{aligned}$$

Die Kraft auf die Probeladung q ist damit

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -q\nabla\Phi_Q = -q\begin{pmatrix}0\\0\\\partial\Phi_Q/\partial z\end{pmatrix} \\ F_z &= \frac{q\sigma_0 z}{2\epsilon_0 a}\int_0^a\frac{r^2dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} \overset{z=a}{=} \frac{q\sigma_0 a}{2\epsilon_0 a}\int_0^a\frac{r^2dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &\overset{x=r/a}{=} \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\text{arsinh } x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 = \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

3. Mathematisches Vorgeplänkel

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_z = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \quad (9)$$

Gegeben sei nun $f(x,y,z) = f(r) = r^{2n}$ mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$f(x,y,z) = r^{2n} = (x^2+y^2+z^2)^n; \quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) = 2n\cdot x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{n-1} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}f(x,y,z) = 2n\cdot(x^2+y^2+z^2)^{n-1} + 4n(n-1)x^2(x^2+y^2+z^2)^{n-2} \quad (11)$$

(a) *grad f* (Skalarfunktion $\Rightarrow$ Vektorfunktion)

$$\nabla\, f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_z\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} f(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\\\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)\\\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\nabla\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \cdot x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \\ 2n \cdot y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \\ 2n \cdot z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

(b) *div grad f* (*div*: Vektorfunktion $\Rightarrow$ Skalarfunktion)

$$\nabla \cdot [\nabla\ f(x,y,z)] = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} f(x,y,z) \tag{14}$$

$$= 6n \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} + 4n(n-1)(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{n-2} \tag{15}$$

$$= (4n^2+2n) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \tag{16}$$

(c) *rot* (*grad*) *f* (*rot*: Vektorfunktion $\Rightarrow$ Vektorfunktion) ($\times$: Kreuzprodukt)

$$\nabla \times f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} F_y(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x} F_z(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{17}$$

rot grad f

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{20}$$

Beispiel (eine Komponente):

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(2n \cdot x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1}) = 4xyn(n-1) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-2}$$

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = 4n(n-1)(x^2+y^2+z^2)^{n-2} \begin{pmatrix} yz - zy \\ zx - xz \\ xy - yx \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

Hier finden sie eine kurze Beschreibung der Operatoren:
http://studweb.studserv.uni-stuttgart.de/studweb/users/phy/phy31653/xf1/pdf/gradient.pdf

4. Vorgriff und mathematisches Geplänkel II — Potential und Feldstärke

Ein elektrostatisches Feld wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$E_x = 6xy; \quad E_y = 3x^2 - 3y^2; \quad E_z = 0$$

Das Linienintegral ist gegeben durch $\vec{E}(x,y,z) = (6xy, 3x^2 - 3y^2, 0)$.

(a) Das Linienintegral vom Punkt $P_0(0,0,0)$ zum Punkt $P(x_1, y1, z_1)$ ist dann (i) zunächst entlang der$y$-Achse

$$U_i(x_1, y_1, z_1) = \int_{(0,0,0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \vec{E}(x,y,z)d\vec{s} = \int_0^{x_1} (0, 3x^2, 0) \cdot (1,0,0)dx +$$

$$\int_0^{y_1} (6x_1 y, 3x_1^2 - 3y^2, 0) \cdot (0,1,0)dy = 0 + 3x_1^2 y_1 - y_1^3$$

oder (ii)

$$U_{ii}(x_1, y_1, z_1) = \int_0^{y_1} (0, -3y^2, 0) \cdot (0,1,0)dx + \int_0^{x_1} (6xy_1, 3x^2 - 3y_1^2, 0) \cdot (1,0,0)dy =$$

$$-y_1^3 + 3x_1^2 y_1 = U_i(x_1, y_1, z_1)$$

Die Verschiebung hängt offensichtlich nicht vom gewählten Weg ab. d.h. das gegebene Feld ist **konservativ** und die geleistete Arbeit (hier für die Verschiebung einer elektrischen Ladung) entlang eines geschlossenen Weges ist Null. Dies gilt insbesondere für das Gravitationsfeld und elektrostatische Felder. Daraus folgt auch, dass für das Wegintegral über einen geschlossenen Weg $\oint \vec{E}d\vec{s} = 0$ gilt. Zusammen mit dem Gausschen Flusssatz bildet dies gewissermaßen die Grudnlage der Elektrostatik.

(b) Mit $U(x,y,z) = 3x^2y - y^3$ ergibt sich für den Gradienten

$$grad\ U = \vec{\nabla} U = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)U = (6xy, 3x^2 - 3y^2, 0) = \vec{E}(x,y,z) \tag{22}$$

5. <u>Aktio = Reaktio</u>

(i)

Übungen gibt es Mittwochs zu folgenden Zeiten: 8.00 - 9.30, 9.45 - 11.15 und 11.30 - 13.00

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor
Tel.: 07247 82 4173; Büro
Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/edyn.html