Institut für Experimentelle Kernphysik

Lösungen zur Physik II (Elektrodynamik) SS 2003

Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann **Blatt 11** Bearbeitung: 16.7.2003

1. 2 Leiter

ZUSATZ Kraft nicht nur auf einen Probekörper, sondern auch auf einen Nachbarleiter!)
Nach dem Gesetz von Biot-Savart (letztes Übungsblatt) erzeugt ein Stromelement $\vec{I}d\vec{l}$ in einem Punkt der vom Stromelement um den Ortsvektor $\vec{r}$ entfernt liegt, senkrecht zu $d\vec{l}$ und $\vec{r}$ den Beitrag

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I}}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

zum magnetischen Gesamtfeld $\vec{H}$ des Leiters in diesem Punkt. Mit $dl = dz$, $|d\vec{l} \times \vec{r}| = dz \sin\varphi = dz\ a$ und $r = \sqrt{z^2 + a^2}$ gilt für den Betrag

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz \sin\varphi}{r^2} = \frac{Ia}{4\pi}\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{Il}{4\pi a\sqrt{(l^2/4) + a^2}} \tag{2}$$

Das Magnetfeld ist rechts vom Leiter in die Zeichenebene hinein gerichtet (Rechte-Hand-Regel).
Für $l \to \infty$ erhält man

$$H_\infty = \lim_{l\to\infty} \frac{I}{2\pi a\sqrt{1 + 4a^2/l^2}} = \frac{I}{2\pi a} \tag{3}$$

Einfachere Rechnung via Maxwell-Gleichung / Ampersches Gesetz:
dafür ausführlich:

$$\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int\int_F \vec{J} \cdot d\vec{F}; \qquad \vec{D} = 0 \tag{4}$$

Flächenstromdichte über die Fläche integriert ergibt den Gesamtstrom I
Magnetfeld Linienintegral geht *um* den Leiter ((Kreis) radialsymmetrisch, d.h. nur von r abhängig)

$$\int_0^{2\pi} r \cdot H \cdot d\varphi = 2\pi \cdot r \cdot H = I \tag{5}$$

Magnetfeld um Leiter ($\vec{B} = \mu_0\vec{H}$)

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r}; \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \tag{6}$$

(a) Aus $H = \frac{I}{2\pi r}$ folgt mit $r = d/2 : H_1 + H_2 = \frac{I_1 - I_2}{\pi d} = -31,8 A/m$ (bezüglich I_2 gemäß Rechte-Handregel orientiert)

(b) Aus $H_1 + H_2 = \frac{I_1}{2\pi x} - \frac{I_2}{2\pi(d-x)} = 0$ folgt $x = \frac{I_1 d}{I_1 + I_2} = 4cm$

(c) **ZUSATZ:** Kraft zwischen 2 Leitern!
Feld im Abstand r vom Leiter:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \tag{7}$$

Kraft des B-Felds auf einen Leiter:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \tag{8}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{9}$$

(7) und (9) in (8)

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \overset{l \perp B}{=} \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2\pi r} \frac{\vec{r}}{r} \tag{10}$$

A la Newton 3 erfahren beide Leiter diese Kraft.

Da stromführende Leiter sowohl Magnetfelder erzeugen wie auch durch Magnetfelder Kräfte erfahren, ergibt sich, dass zwischen zwei Strömen eine Kraft wirken muss. Gleichgerichtete Ströme sind anziehend und entgegengesetzt gerichtete abstossend (Hierzu muss man die rechten Winkel und die Rechte-Handregel beachten).

2. BOHRsches Magneton

(a) Mit $\omega = 2\pi T = v/a_H$ wird $I = e/T = ev/(2\pi a_H \approx 1mA$

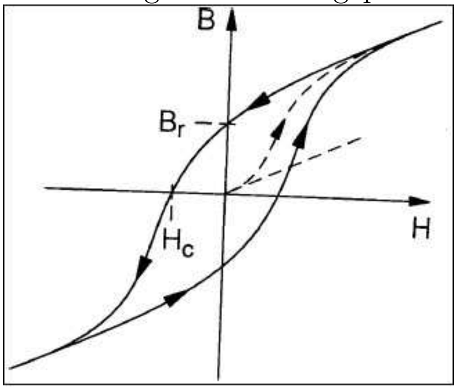
(b) $m = \mu_0 T \pi a_h^2 = \mu_0 e v a_H / 2 = 1,17 \cdot 10^{-29} Vsm$ (BOHRsches Magneton)

(c) $H = I/(2a_H) = ev/(4\pi a_H^2) \approx 10^7 A/m$, bzw. $B = \mu_0 H = 12,5T$ (!)

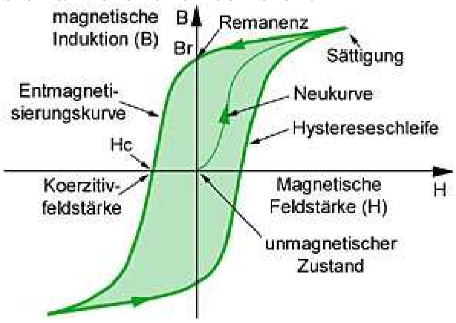
3. Ferromagnetismus – Hysteresis

Erklären sie die Begriffe Hysteresis (mit Zeichnung), Koerzitivfeldstärke, Sättigung, Remanenz! Was stellt die Fläche der Hysteresiskurve dar?
Trägt man für ein ferromagnetisches Material die magnetische Flussdichte gegen das äußere Magnetfeld auf, so erhält man eine Kurve, die von der zeitlichen Änderung der Felder abhängt. Beginnt man mit einem nicht magnetisierten Material so findet man ein näherungsweise lineares Verhalten. Bei größeren Feldern treten Sättigungseffekte auf. Diese können auf die vollständige Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke zurückgeführt werden. Wird das Feld wieder verringert so bleibt die Orientierung zunächst erhalten. Auch ohne äußeres Feld findet man eine Magnetisierung, die sogenannte **Remanenz** B_r. Dies ist die charakteristische Eigenschaft eines Permanentmagneten. Erst wenn ein Gegenfeld (das **Koerzitivfeld** H_c) angelegt wird kann diese Magnetisierung auf Null reduziert werden. Für stärker negatives Feld wird tritt eine negative Magnetisierung auf, welche schließlich ebenfalls sättigt. Gute Permanentmagnete haben hohe Koerzitivfeldstärken und hohe Remanenzen. Die Remanenzfelder liegen in der

Größenordnung von 1 T, während die Koerzitivfelder von einigen 1000 bis zu einigen 100000 A/m gehen können. Die höchsten Werte erzielt man mit seltenen Erden, da diese eine große Zahl ungepaarter Elektronen enthalten.



Hysteresiskurve
Hysteresis (griech. = das Zurückbleiben)
Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Fludichte B und der magnetischen Feldstärke H beim Ummagnetisieren von magnetischen Stoffen ist durch die Hysteresiskurve charakterisiert.



Beschreibung der Hysterese: Obwohl die Feldstärke Null ist, bleibt eine restliche magnetische Flußdichte, die **Remanenz** B_r (remanente Flußdichte bzw. Restmagnetismus) zurück. Durch eine entgegengesetzt gerichtete Feldstärke läßt sich die Remanenz beseitigen. Die Spule erzeugt zwar eine Feldstärke, im Eisen ist jedoch keine magnetische Flußdichte mehr vorhanden. Die Feldstärke, die notwendig ist, um den Restmagnetismus zu beseitigen, wird **Koerzitiv-Feldstärke** H_c genannt.(coercere, lat. = in Schranken halten) Die magnetische Flußdichte bleibt wegen der inneren Reibung der Molekularmagnete hinter der Feldstärke zurück. Beim Wechselstrom kippen die Molekularmagnete ständig um. Das Eisen wird durch die innere Reibung erwärmt. Die dabei entstehenden Verluste nennt man Hysteresisverluste. Die von der bf Hysteresiskurve umschlossene Fläche ist ein Maß für diese Verluste.

4. Magnetfeld einer Spule

Wir betrachten einen Querschnitt des Magneten in der Zeichenebene. Die Umrandung L dieser Fläche, den Spalt des Magneten mitgerechnet, ist dann ein Quadrat der Seitenlänge $l = 20\,\text{cm}$ Die magnetische Stärke im Spalt ist $H_S = B/\mu_0$, während innerhalb des Magneten $H_M = B/(\mu_0\mu_r)$ gilt. μ_r bezeichnet dabei die relative magnetische Permeabilität von Eisen. An der Grenze zwischen Eisen und Spalt ist das zur Oberfläche normale wie auch parallele Magnetfeld stetig, d.h. $H_S = H_M$. Mit Ampère's

Durchflussgesetz

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = N \cdot I$$

angewandt auf die Umrandung L erhält man dann

$$\frac{B}{\mu_0} d + \frac{B}{\mu_0 \mu_r}(4l - d) = N \cdot I$$

wobei $d = 0.02\,\mathrm{m}$ die Breite des Spaltes angibt. Also folgt, dass

$$\begin{aligned} N &= \frac{B}{\mu_0 I}\left[d + \frac{1}{\mu_r}(4l - d)\right] \\ &= \frac{10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}\left(0.02 + \frac{4 \cdot 0.2 - 0.02}{3000}\right) = 161 \end{aligned}$$

Windungen benötigt werden.

5. <u>induziertes elektrisches Feld</u>

(a) ist richtig. Grund: Es ist keine neue Ladung vorhanden, und die Feldlinien können nicht einfach im Raum beginnen oder enden.

(b) ist falsch, denn die Arbeit längs der Schleife ist $\neq 0$, da $\vec{E}$ stets parallel oder antiparallel zu $d\vec{r}$ steht. Im Wegintergral eines konservativen Faldes muss sich die Feldrichtung bezüglich des Wegelements irgendwann einmal umdrehen.

6. <u>Lenz'sche Regel</u>

Die Lenz'sche Regel besagt, dass der induzierte Strom so gerichtet ist, dass er seiner Ursache entgegenwirkt, hier also der Änderung des magnetischen Flusses durch den rechten Kreis. Der Strom in der linken Schleife fließt von + nach −, nach der rechten Handregel zeigt das den linken Leiter umgebende Magnetfeld im Bereich der linken Leiterschleife in die Zeichenebene, während das Magnetfeld durch die rechte Leiterschleife dann aus der Zeichenebene herauszeigt.

(a) Mit ansteigendem Widerstand gilt $R \uparrow \Rightarrow I \downarrow$, d.h. das Magnetfeld erniedrigt sich in der rechten Schleife, mit $\Phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$ folgt dann $B \downarrow \Rightarrow \Phi_m \downarrow$. Das durch den Induktionsstrom I_{ind} entstehende Magnetfeld in der rechten Schleife ist also parallel zum bestehenden Feld, um der Abnahme der Feldstärke entgegenzuwirken, also aus der Zeichenebene heraus. Wieder mit der rechten Handregel muss dann I_{ind} gegen den Uhrzeigersinn fließen.
Alternative Erklärung:
Mit $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}_m$ ergibt sich, dass $U_{\text{ind}} > 0$, weiter aus $U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} d\vec{r}$ dass $\vec{E}$ parallel zu $d\vec{r}$ ist. Da das Magnetfeld in der rechten Leiterschleife aus der Zeichenebene zeigt, die Änderung von Φ_m negativ ist, folgt für die Orientierung der Fläche $d\vec{A} \parallel \vec{B}$, also auch aus der Zeichenebene. Da $d\vec{A}$ und $d\vec{r}$ eine Rechtsschraube bilden, ist also auch E_{ind} im Gegenuhrzeigersinn gerichtet, folglich fließt I_{ind} in diese Richtung.

(b) Wird der Widerstand im linken Stromkreis erniedrigt, dann drehen sich die Verhältnisse im Vergleich zu (a) jeweils um, d.h. der Induktionsstrom fließt dann im Uhrzeigersinn.

7. Lorentz-Kraft und Induktion

Der Strom fließt vom positiven zum negativen Pol der Quellspannung U_0, das Magnetfeld zeigt nach oben, d.h. nach der rechten Handregel wirkt die Lorentz-Kraft nach rechts, der Stab wird sich also auf den Schienen von den Kontaktstellen wegbewegen.

(a) Die Geschwindigkeit der Ladungsträger sei $\vec{v}$, die im Stab enthaltene freie Ladung q und der Stabquerschnitt A. Da $\vec{v} \perp \vec{B}$ folgt

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot v \cdot B \cdot \hat{e}_F$$

Mit

$$\begin{aligned} v &= \frac{j}{\rho} = \frac{I}{\rho \cdot A} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{q}{l \cdot A} \quad \text{folgt} \\ F_L &= q \cdot \frac{IlA}{qA} \cdot B = I \cdot l \cdot B \end{aligned}$$

(b) Berücksichtigt man die induzierte Spannung U_{ind} im Stab, so ergibt sich für die Lorentz-Kraft

$$F_L = I \cdot l \cdot B = \frac{U}{R} \cdot l \cdot B = \frac{U_0 - |U_{\text{ind}}|}{R} \cdot l \cdot B = m \cdot \dot{v}_S$$

Wir berechnen die Induktionsspannung über die Änderung des magnetischen Flusses:

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{f}$$

wobei aufgrund der gegebenen Geometrie $d\vec{f} \parallel \vec{B}$ und somit auch $d\vec{r} \parallel I$ gilt. Da B homogen ist, ergibt sich die Flussänderung nur aus der Flächenänderung, wobei sich die Fläche der 'Leiterschleife' links des Stabes mit v_S vergrößert:

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -\frac{d}{dt}(BF) = -B\dot{F} = -B \cdot l \frac{dx}{dt} = -B \cdot l \cdot v_S \\ &\Rightarrow \; F_L = \frac{lB}{R} (U_0 - B \cdot l \cdot v_S) = m \cdot \dot{v}_S \\ &\Rightarrow \; \dot{v}_S + \frac{lB}{mR} Blv_S - \frac{lB}{mR} U_0 = 0 \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Dgl. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $\dot{y} = \alpha y + \beta = 0$ mit der Lösung $y(t) = Ae^{-\alpha t} - \beta/\alpha$. Mit der Anfangsbedingung $v_S(t = 0) = 0$ folgt

$$v_S(t) = \frac{U_0}{lB} \left(1 - e^{\frac{B^2 l^2}{mR} t}\right)$$

Für $t \to \infty \Rightarrow v_S \to v_e = U_0/lB = \text{const.}$. Wir überprüfen zur Kontrolle den dann im Stab fließenden Strom $I = U/R$, d.h.

$$I_e = \frac{U_e}{R} = \frac{1}{R}(U_0 - lBv_e) = \frac{1}{R}\left(U_0 - lB\frac{U_0}{lB}\right) = 0$$

Da sich der Stab reibungsfrei bewegt, kann für $v_S = \text{const.}$ auch keine Kraft wirken.

8. Selbstinduktion

(a) Infolge der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ im Spuleninneren beim Abschalten der Spannung wird in der Spule selbst ein Kurzschlusstrom

$$i = \frac{U_{ind}}{R} = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{L}{R}\frac{di}{dt} \tag{11}$$

induziert, wobei $R = U_0/I_0$ der ohmsche Widerstand der Wicklung und $L = \mu_r \mu_0 N^2 A/l$ die InduktivitÄt der Sule mit der Querschnittsfläche $A = \pi d_E^2/4$ und der Länge $l = \pi d_s$ ist. Mit den Zahlenwerten wird $R = 38\Omega$ und $L = 67,9mH$. Aus (11) erhält man $di/i = -(R/L)dt$ und nach Integration mit der Anfangsbedingung $i = I_0$ für $t = 0:\;\; \ln i - \ln I_0 = \ln(i/I_0) = -(R/L)t$ bzw.

$$i = I_0 e^{-(R/L)t}$$

Für $t = 10^{-3}s$ folgt daraus $i = 2.0A$.

(b) Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe der Spannungsabfälle an der Spule $-u_{ind} = L(di/dt)$ und am Widerstand R_i gleich der Betriebsspannung U_0.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U_0 \quad \text{Differentialgleichung für die Stromstärke}$$

Nach der Trennung der Variablen i und t folgt daraus mit dem Maximalwert der Stromstärke $I_0 = U_0/I$

$$-\frac{di}{I_0 - i} = \frac{d(I_0 - i)}{I_0 - i} \quad (\text{wegen } I_0 = const) = -\frac{R}{L}dt$$

und nach Integration auf beiden Seiten mit der Anfangsbedingung $i = 0$ für $t = 0$:

$$[\ln[I_0 - i)]_0^i = \ln(1 - \frac{i}{I_0}) = -\frac{R}{L}t = -\frac{t}{\tau}; \quad i(t) = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$\tau = \frac{L}{R} = 0.08s$ ist die Zeitkonstante des Kreises.
Für $\frac{i}{I_0} = 0.99$ erhält man $\ln 0.01 = -\frac{t}{\tau}$ oder $t = -\tau \ln 0.01 = \tau \ln 100 = 0,37s$

9. Quellen? Wirbel?

(a) Was bedeutet *wirbelfrei*? Bildlich und mathematisch!
Wirbelfrei = konservativ = Kurvenintegral ist wegunabhängig!

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= 0 \text{ für jeden geschlossene Weg } C \\ rot\ \vec{F}(\vec{r}) &= 0 \text{ für alle } \vec{r} \text{ Element } \mathbb{R}^3 \\ \vec{F}(\vec{r}) &= -grad\ \Phi(\vec{r}) \text{ für geeignetes Skalarpotential } \Phi(\vec{r})\end{aligned}$$

(b) Was bedeutet *quellenfrei*? Bildlich und mathematisch!
Es gibt keine Quellen (Bsp. Elektrsche Ladungen, bzw. magnetische Monopole)

$$\begin{aligned}\int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_{\vec{r}} &= 0 \text{ für jedes geschlossenes Flächenstück } S \\ div\ \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \text{ für alle } \vec{r} \text{ Element } \mathbb{R}^3 \\ \vec{B}(\vec{r}) &= rot\ \vec{A}(\vec{r}) \text{ für geeignetes Vektorpotential } \vec{A}(\vec{r})\end{aligned}$$

(c) Was ist $div\ rot\ \vec{A}$? NULL

(d) Was $rot\ grad\ \Phi$? NULL

Die Konstanten μ_0 und ϵ_0 werden in der Klausur nicht angeben, auch die Zahlenwerte gelten als bekannt!!!!!!!!!
Permeabilität des Vakuums μ_0 :
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T^2 m^3/J = 12.566370614 \cdot 10^{-7} T^2 m^3/J$
Dielektrizitätskonstante des Vakuums ϵ_0:
$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8.854187817 \cdot 10^{-12} C^2/Jm$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor
Tel.: 07247 82 4173; Büro
Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/edyn.html

Die Klausur findet am Freitag den 18.07.03 von 14.00 bis 16.00 Uhr
im Gerthsen und Gaede Hoersaal statt.