

1 Elektrische Kraft und Gravitationskraft (2 + 2)

- a. Die Gravitation F_G und die elektrische Kraft $F_{el.}$ sind radiale Kräfte und es gilt für die Kraft zwischen zwei Elektronen:

$$F_G = G \frac{m_e^2}{r^2}$$

$$F_{el.} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Mit den Konstanten $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ C/(Vm) und $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m³s⁻²/kg folgt dann

$$\left| \frac{F_{el.}}{F_G} \right| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e^2} = 4.167 \cdot 10^{42}.$$

- b. Damit beide Kräfte betragsmässig gleich groß sind, müsste die quadratische Masse m_e^2 um genau den Faktor $4.167 \cdot 10^{42}$ größer sein. Daraus folgt, dass das Elektron eine Masse von

$$m_e' = \sqrt{4.167 \cdot 10^{42}} \cdot m_e = 2.04 \cdot 10^{21} m_e = 1.86 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

besitzen müsste.

2 Feldlinien und Äquipotentiallinien (2 +2)

Eigentlich sollte in der Aufgabe drinstehen, dass die beiden Skizzen von parallelen Drähten gezeichnet werden sollen. Aber nun steht das ein wenig vage auf dem Aufgabenblatt, daher die vielen Bilder zur Klärung.

a ungleichnamige Ladungen

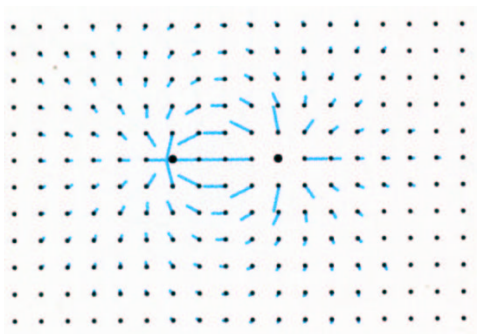


Abbildung 1: Feld einer positiven und einer negativen Ladung gleicher Größe. Ein Dipolfeld entsteht daraus, wenn die Ladungen immer mehr zusammengerücken, dabei immer größer werden, so dass das Dipolmoment $p = Qd$ endlich bleibt.

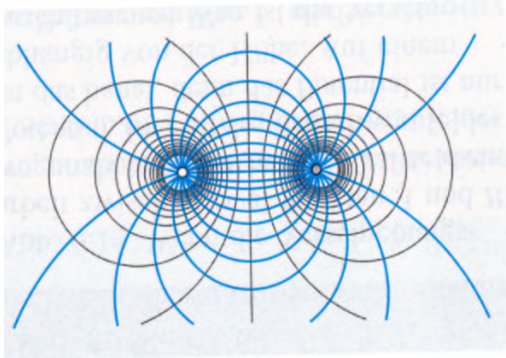


Abbildung 2: Potentialflächen in schwarz und Feldlinien in blau für zwei parallele, entgegengesetzt geladene Drähte.

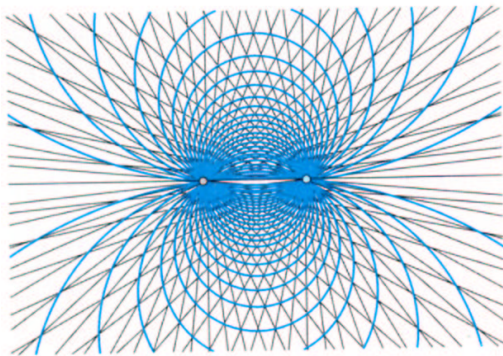


Abbildung 3: Man kann das Feld einer Ladungsverteilung aus den Feldern der Einzelladungen konstruieren, indem man in den Vierecken, in die die Einzelfeldlinien die Ebene aufteilen, Diagonalen zieht. Abbildung 5) entsteht ähnlich, nur muss man dort die andere Diagonale nehmen. Allerdings erhält man so nur "zweidimensionale" Felder, hier das Feld zweier entgegengesetzt geladener paralleler Drähte (nicht zwei Punktladungen).

b gleichnamige Ladungen

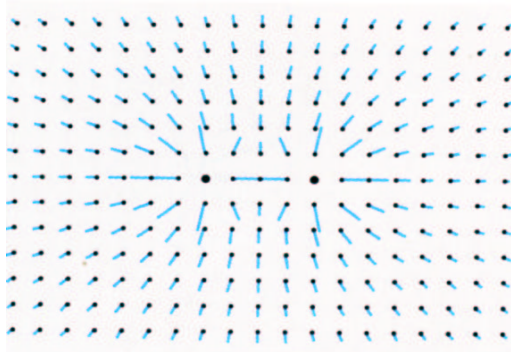


Abbildung 4: Feld von zwei gleichgroßen positiven Ladungen.

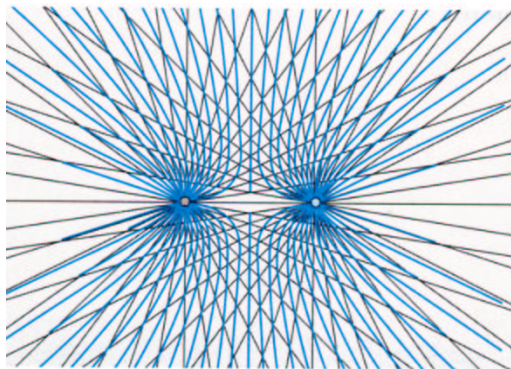


Abbildung 5: Konstruktion des Feldes von zwei parallelen Drähten mit gleicher Ladung aus den Einzelfeldern. Die Konstruktion ist ähnlich wie in Bild 3.

3 Wieviel ist 1 Coulomb (3)

Durch einen 10 W-Rasierapparat fließen 0,05 A, also in 5 min. 15 C. Für ein 600 W-Bügeleisen lauten die Werte 3 A und 1636.4 C, falls es 10 min. ständig heizt (alles bei 220 V). Zwei Kugeln, mit ± 800 C geladen, würden einander in 1 m Abstand mit rund $1.5 \cdot 10^{13}$ N anziehen! Alle statischen Aufladungen sind offensichtlich sehr viel kleiner. Wenn man sich im Dunkeln den Wollpullover über den Kopf zieht, sieht man, besonders bei trockener Luft, mehrere cm lange Entladungen. Das setzt Spannungen um 100 kV voraus. Trotzdem bleiben die Ladungen sehr klein: Die Kapazität des Systems Körper-Pullover ist entsprechend der Abmessungen von ca. 1 m von der Ordnung $\epsilon_0 A/d \approx 10^{-19}$ Farad, also erzeugen schon 10^{-5} C die Spannung von 100 kV. Man müsste gehörig reiben, um das kleinste Elektrogerät betreiben zu können.

4 Punktladungen und Kräfte (3 + 1)

Die Ladungen q_1 und q_2 befinden sich auf der x -Achse, die Ladung q_3 hat den gleichen Abstand r zu beiden Ladungen auf der x -Achse, die Koordinaten von q_3 in der $x-y$ -Ebene sind folglich $x_3 = 0.5(x_2 + x_1)$ und $y_3 = \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2}$.

a

Für den Vektor $\vec{r}_{13}$ ergibt sich dann

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_2+x_1}{2} \\ \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für den Einheitsvektor

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

und für die Kraft auf q_3

$$\vec{F}_{13} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r^2} \cdot \hat{r}_{13} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich

$$\vec{F}_{23} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r^2} \cdot \hat{r}_{23} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}.$$

Insgesamt wirkt auf q_3 somit die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2}(q_1 - q_2) \\ \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2}(q_1 + q_2) \end{pmatrix}.$$

Mit den angegebenen Werten für die Ladung q_1 sowie den Koordinaten x_1 und x_2 und $q_2 = -4q_1$ ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 2.88 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 7.5 \\ -6 \end{pmatrix} \\ |\vec{F}| &= 2.88 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{56.25 + 36} = 2.77 \cdot 10^{-5} \text{ N}. \end{aligned}$$

b

Für den Fall $q_1 = q_2$ ergibt sich direkt aus der allgemeinen Beschreibung von $\vec{F}$ in Teilaufgabe a:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 2.88 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ |\vec{F}| &= 1.15 \cdot 10^{-5} \text{ N}. \end{aligned}$$