Experimentalphysik II Sommersemester 2005 Lösung Übungsblatt 2

1 Eine einfache Ladungsverteilung (3)

Gesucht ist die Gesamtladung Q. Bekannt ist:

$$Q = \int_V \rho \, dV, \qquad \rho = dx\, dy\, dz$$

$$\begin{aligned}
Q &= \rho_0 \cdot \iiint 2x^2 + 4yz - 3xz \, dx\, dy\, dz \\
&= \rho_0 \cdot \iint \left[2x^2 z + 2yz^2 - \frac{3}{2} xz^2 \right]_0^a dx\, dy = \rho_0 \cdot \iint 2x^2 a + 2ya^2 - \frac{3}{2} xa^2 \\
&= \rho_0 \cdot \int_0^a \left[2ax^2 y + a^2 y^2 - \frac{3}{2} a^2 xy \right]_0^a dx = \rho_0 \cdot \int_0^a \left[2a^2 x^2 + a^4 - \frac{3}{2} a^3 x \right]_0^a dx \\
&= \rho_0 \cdot \left[\frac{2}{3} a^2 x^3 + a^4 x - \frac{3}{4} a^3 x^2 \right]_0^a \\
&= \frac{11}{12} \cdot \rho_0 a^5
\end{aligned}$$

2 Kugelsymmetrische Ladungsverteilung (2+2)

a) Gesucht ist die Gesamtladung Q. Bekannt ist:

$$\rho(r) = k \cdot \frac{e^{-2r/a}}{r^2}, \qquad dV = r^2 \cdot \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\begin{aligned}
Q &= \int_V \rho \, dV = k \iiint \frac{e^{-2r/a}}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= k \cdot \int e^{-2r/a} \Big[-\cos\theta \Big]_0^\pi \Big[\varphi \Big]_0^{2\pi} dr \\
&= 4\pi k \cdot \left[-\frac{a}{2} \cdot e^{-2r/a} \right]_0^\infty = 2\pi\, ka
\end{aligned}$$

b) Wir verwenden den Gauß'schen Satz $\int \vec{E} d\vec{A} = Q/\epsilon_0$. Da die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist gibt es keine Vorzugsrichtung. Somit gilt zwangsläufig $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ auf einer Kugeloberfläche und man erhält das Oberflächenintegral

$$\int_O \vec{E}\, d\vec{A} = 4\pi R^2 \cdot E = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

Unter $Q(R)$ ist nur die Ladung zu verstehen, die von der Oberfläche des ersten Integrals eingeschlossen wird, $Q(R)$ ist also nicht die eben berechnete Gesamtladung. Man verwendet die Berechnung aus Teil a) wieder, indem man im letzten Schritt den Wert ∞ durch die Variable R ersetzt.

$$Q(r) = 4\pi k \cdot \left[-\frac{a}{2} \cdot e^{-2r/a}\right]_0^R = 2\pi\, ka \cdot \left(1 - e^{-2R/a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{ka \cdot \left(1 - e^{-2R/a}\right)}{2R^2 \cdot \epsilon_0}$$

3 Superposition und Gauß'scher Satz (1+1+2)

a) Das elektrische Feld wird durch zwei Punktladung, deren Felder sich ungestört überlagern, erzeugt.

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{a^2} - \frac{q}{(3a)^2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8q}{9a^2}$$

b) Man versucht analog zu Aufgabe 2 die Integration über eine beliebige Oberfläche um beide Ladungen zu wiederholen, man verwendet etwa eine Kugel.

$$\int_O \vec{E} d\vec{A} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} = \frac{q-q}{\epsilon_0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E = 0 \quad \text{WIDERSPRUCH zu a)!}$$

c) Der Gauß'sche Satz funktioniert scheinbar nicht, weil eine nicht zutreffende Symmetrieüberlegung verwendet wurde. Die Ladungsverteilung ist nicht kugelsymmetrisch, daher wird es auf der Oberfläche der Kugel immer verschiedene Richtungen von $\vec{E}$ im Verhältnis zu $d\vec{A}$ geben. Auch der Betrag von $\vec{E}$ wird schwanken. Insgesamt werden sich diese Unterschiede zu 0 aufintegrieren. Im Mittel ist also $E = 0$ erfüllt, allerdings kann keine Aussage über ein spezielles $\vec{E}$ an einem Punkt getroffen werden. Eine sinnvolle Anwendung des Gauß'schen Satzes setzt daher eine vorhandene Ladungssymmetrie voraus, die gewährleistet, dass $\vec{E}$ und $d\vec{A}$ immer gleich groß sind und im gleichen Winkel zueinander stehen.

4 Elektrostatisches Potential I (2+2)

a) Zunächst erfolgt die Integration entlang der x-Achse, dann entlang der y-Achse:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \vec{E}\, d\vec{s} = \int_{(0,0)}^{(x_1,0)} \vec{E} \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{(x_1,0)}^{(x_1,y_1)} \vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\int_0^{x_1} 3y^2 + 2y\Big|_{y\equiv 0!} dx}_{=0} + \int_0^{y_1} 6xy + 2x\Big|_{x\equiv x_1!} dy \\
&= \left[3x_1 y^2 + 2x_1 y\right]_0^{y_1} = 3x_1 y_1^2 + 2x_1 y_1
\end{aligned}
$$

Der zweite Weg ist völlig analog zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)} \vec{E}\, d\vec{s} = \int_{(0,0)}^{(0,y_1)} \vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix} + \int_{(0,y_1)}^{(x_1,y_1)} \vec{E} \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\int_0^{y_1} 6xy + 2x\Big|_{x\equiv 0!} dy}_{=0} + \int_0^{y_1} 3y^2 + 2y\Big|_{y\equiv y_1!} dx \\
&= \left[3xy_1^2 + 2xy_1\right]_0^{x_1} = 3x_1 y_1^2 + 2x_1 y_1
\end{aligned}
$$

b) Die beiden Potentiale stimmen also überein. Man bildet den Gradienten dieser Funktion:

$$
\operatorname{grad}\phi = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left(3xy^2 + 2xy\right) = \begin{pmatrix} 3y^2 + 2y \\ 6xy + 2x \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \vec{E}
$$

Das gegebene Elektrische Feld besitzt also ein Potential und ist damit wegunabhängig. Konvention ist die Verwendung eines Minuszeichens vor der Íntegration bzw. der Gradientenbildung, was aber für diese Aufgabe keine Rolle spielt.

5 Elektrostatisches Potential II (2+2+1)

a) Um das elektrische Feld zu berechnen verwenden wir zunächst eine Symmetrieüerlegung. Da die Kreisscheibe in allen Richtungen die selbe Ladung trägt werden auf der Mittelsenkrechte radiale Kraftkomponenten aufgehoben. Wir müssen also nur die Kraftkomponente senkrecht zur Kreisscheibe berechnen. Für den Winkel φ zwischen der Mittelsenkrechten, einem auf ihr gelegenen Punkt im Abstand z von der Scheibe und einem Punkt im Abstand r auf der Scheibe gilt

$$
\cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \qquad E_\perp = E \cdot \cos\varphi, \qquad dq = \sigma \cdot r\, dr\, d\varphi = 2\pi\, \sigma \cdot r\, dr
$$

Damit können wir integrieren:

$$E(z) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi\sigma r}{r^2+z^2} \cdot \cos\varphi(r)\, dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \int_0^R \underbrace{\frac{r}{r^2+z^2}}_{=r\cdot\frac{\cos^2\varphi}{z^2}} \cos\varphi\, dr$$

Dieses Integral kann nun entweder per Bronstein oder per Substitution gelöst werden. Man substituiert:

$$\frac{d(\cos\varphi)}{dr} = -\frac{2rz}{2(r^2+z^2)^{3/2}} = -r \cdot \frac{\cos^3\varphi}{z^2} \quad \Rightarrow \quad dr = -\frac{1}{r} \cdot \frac{z^2}{\cos^3\varphi}$$

Man führt die Substitution aus, wobei die Veränderung der Grenzen zu achten ist.

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \int_1^{\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}} \left(-\frac{r\cdot\cos^3\varphi}{z^2} \cdot \frac{z^2}{r\cdot\cos^3\varphi}\right) d(\cos\varphi) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

Für kleine Abstände ist $z \ll R$ und $E \approx \sigma/(2\epsilon_0)$. Für große Abstände erhält man durch Taylorentwicklung des Feldes das Ergebnis

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - (1 - \frac{1}{2}R^2/z^2)\right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} R^2/z^2$$

b) Man integriert nun das elektrische Feld entlang der Mittelsenkrechten:

$$\phi = -\int_0^z E(s) ds = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+R^2}}\right) ds = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[s - \sqrt{s^2+R^2}\right]_0^z$$

$$\phi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(z - \sqrt{z^2+R^2} + R\right)$$

Es folgen sofort die Näherungen für das Nah- und das Fernfeld:

$$z \ll R: \quad \phi \approx \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}, \qquad z \gg R: \quad \phi \approx \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

c) Für $R \to \infty$ wir das elektrische Feld unabhängig von z, es gilt $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Dementsprechend steigt das Potential linear mit dem Abstand an. Man erhält das Feld einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte.