1. Feld und Potenzial einer Kugel (3+2):

a) Betrachten Sie eine homogen geladene Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q. Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes das $\vec{E}$-Feld inner- und außerhalb der Kugelschale (d.h. r < R und r ≥ R, wobei r den Abstand vom Mittelpunkt der Kugelschale bezeichnet). Leiten Sie damit einen Ausdruck für das Potenzial inner- und außerhalb der Kugelschale her (unter der Annahme, dass das Potenzial im Unendlichen verschwindet). Skizzieren Sie sowohl das $\vec{E}$-Feld als auch das Potenzial in Abhängigkeit von r.

b) Bestimmen Sie das $\vec{E}$-Feld inner- und außerhalb einer soliden nichtleitenden Kugel mit Radius R und einer homogen verteilten Gesamtladung Q. Skizzieren Sie das Feld als Funktion des Abstandes zum Kugelmittelpunkt.

Lösung:

a) $$\int_A E dA = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E\int_A dA = E * 4\pi r^2 \Rightarrow E(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Für r < R ist keine Ladung eingeschlossen und damit E (r < R) = 0.
Die Potenzialdifferenz zwischen einem Punkt r < R und dem Unendlichen beträgt:

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r E dr' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Für V(∞) = 0 ist V(r) = ΔV und daher $V(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Für r < R ergibt die Integration:

$$\Delta V = -\int_\infty^r E dr' = -(\int_\infty^R E_{außen} dr' + \int_R^r E_{innen} dr') = -\int_\infty^R E_{außen} dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = const.$$

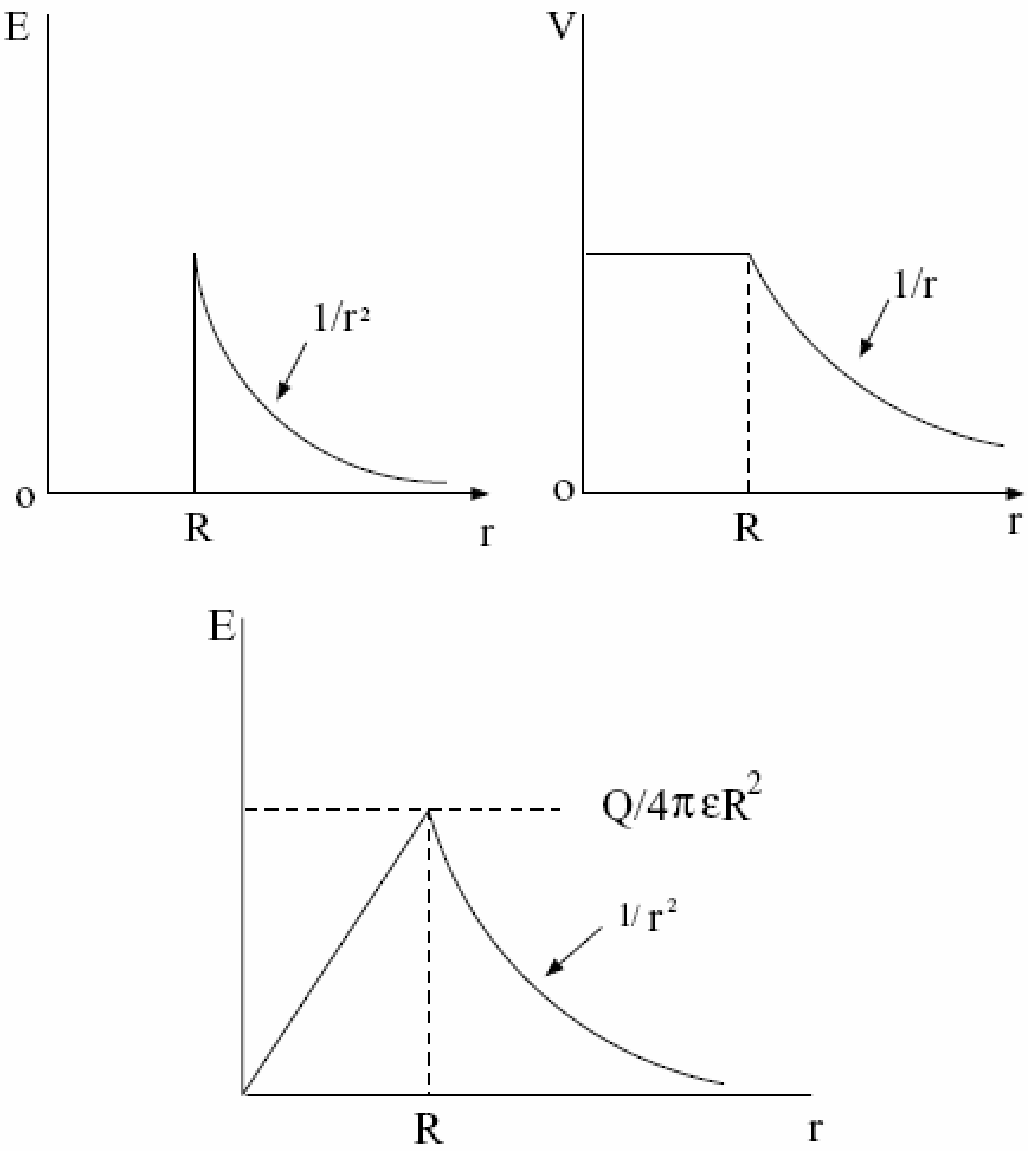
Obwohl das Feld innerhalb der Kugelschale Null ist, ist es das Potenzial nicht!

b) Der Fall r > R ist identisch zu Teilaufgabe a).
Für r < R ist die eingeschlossene Ladung:

$$Q' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}, \quad \text{wobei } \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3} \text{ die Ladungsdichte ist.}$$

Mit dem Gaußschen Satz ergibt sich:

$$E = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$


E
1/r²
o
R
r
V
1/r
o
R
r
E
Q/4πεR²
1/ r²
R
r

2. Drehmoment eines Dipols (2+1):

a) Wie groß ist das Drehmoment, das ein aus zwei Elementarladungen Q = $\pm 1{,}6 \times 10^{-19}$ C mit gleicher Masse im Abstand L= $0{,}5 \times 10^{-8}$ cm bestehender Dipol im Feld eines Plattenkondensators erfährt?
Der Plattenkondensator habe d = 1 cm Plattenabstand und sei auf U = 5000 V aufgeladen. Der Dipol bilde mit der Feldrichtung einen Winkel von $\alpha = 45°$.

b) Wie stellen Sie das Drehmoment in Vektorschreibweise dar?

Lösung:

a) Wenn die Verbindungslinie der beiden Ladungen Q den Winkel α mit der Feldrichtung bildet, so ist das Drehmoment des an den Ladungen angreifenden Kräftepaares:

M = Kraft × Hebelarm = $2 * Q * E * \frac{l}{2} * \sin\alpha = p * \frac{U}{d} * \sin\alpha = 2\sqrt{2} \times 10^{-14}\, Nm$

mit dem Dipolmoment $p = Q * l$.

b) Als Vektor zeigt das Dipolmoment von der negativen zur positiven Ladung Q und das Drehmoment ist dann das Produkt aus Dipolmoment und Elektrischem Feld
$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

3. Ablenkung im E-Feld (2+2+1):

Ein Elektron bewege sich mit der kinetischen Energie 3×10^{-16} J längs der Achse durch eine Kathodenstrahlröhre. Zwischen den Ablenkplatten der Länge 4 cm wirke das elektrische Feld $\vec{E} = (2 \times 10^4)\,\hat{e}_y$ N/C und außerhalb sei $\vec{E} = \vec{0}$.

a) Welchen Abstand von der Achse hat das Elektron am Ende der Platten?

b) Welchen Winkel schließt dann die Bewegungsrichtung des Elektrons mit der Achse ein?

c) In welcher Entfernung von der Achse trifft das Elektron auf einen 12 cm vom Ende der Ablenkplatten entfernten Leuchtschirm?

Lösung:

a) $\vec{F} = q\vec{E} = -eE\,\hat{e}_y$; e = |e|

$m\ddot{y} = F \quad =>$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}(-e)E$$

$$\dot{y} = -\frac{e}{m}Et = v_y \text{ ; t = Flugzeit zwischen Ablenkplatten } = \frac{x_p}{v_x}; \quad v_x \text{ aus } E_{kin} = \frac{1}{2}mv_x^2$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2$$

y(x) ist eine Parabel:

$$y_p = -\frac{1}{2}\frac{e}{m}E\frac{x_p^2}{v_x^2} = -\frac{1}{4}eE\frac{x_p^2}{E_{kin}} = 4{,}24mm$$

b) Winkel mit Achse:

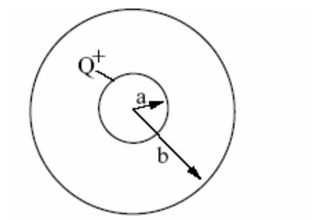
$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{e}{m}E\frac{x_p}{v_x^2} = -\frac{e}{2}E\frac{x_p}{E_{kin}} \;=>\; \varphi = -12{,}06°$$

c) Auftreffentfernung auf Schirm:

$$y_s = \tan\varphi * x_s + y_p = -\frac{e}{2}E\frac{x_p}{E_{kin}}x_s - \frac{1}{4}eE\frac{x_p^2}{E_{kin}} = -\frac{e}{2}E\frac{x_p}{E_{kin}}(x_s + \frac{1}{2}x_p) = -2{,}99cm$$

4. Kondensatoren mit Dielektrikum (3+1+1+2):

Die Abbildung zeigt zwei konzentrische leitfähige evakuierte Hohlkugeln mit Radius a und b. Die innere Kugel habe eine Ladung Q.



a) Zeigen Sie, dass die Kapazität zwischen den beiden Kugeln gegeben ist durch:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

b) Wie ändert sich die Lösung zu Teilaufgabe a), wenn die innere Kugel mit einem dielektrischen Material mit Permeabilitätskonstante ε_r =2 aufgefüllt wird?

c) Wie ändert sich die Lösung zu Teilaufgabe a), wenn der Raum zwischen den beiden Kugeln mit dem Dielektrikum aufgefüllt wird?

d) Wie ändert sich die Lösung zu Teilaufgabe a), wenn das Dielektrikum die innere Kugel bis zu einem Radius 2a umgibt? Nehmen sie an, für den Radius der äußeren Kugel gelte b = 3a.

Lösung:

a) Man lege eine Kugelfläche mit Radius a < r < b der Oberfläche S um die innere Kugel. Das $\vec{E}$-Feld ist radialsymmetrisch und steht immer senkrecht auf S, daher gilt: $\int_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi r^2 E$

Unter Verwendung des Gaußschen Satzes erhält man: $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, also $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Das Potenzial ist gegeben durch $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (als sei alle Ladung in einem Punkt im Mittelpunkt der Kugel konzentriert). Somit gilt für den Potenzialunterschied zwischen innerer und äußerer Kugel: $V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$

Damit ist $C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$

b) Die Kapazität ändert sich nicht.

c) Die Kapazität muss mit $\varepsilon_r = 2$ multipliziert werden, verdoppelt sich also.

d) Die Situation ist äquivalent zu zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren $C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r * 2a^2}{a} = 16\pi\varepsilon_0 a$ und $C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 * 6a^2}{a} = 24\pi\varepsilon_0 a$

Daraus ergibt sich: $C_{tot} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{48}{5}\pi\varepsilon_0 a$