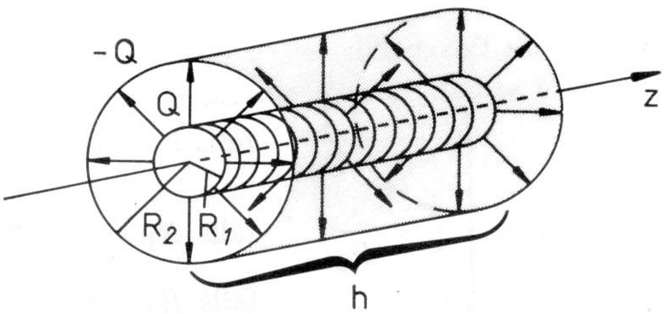
1. Zylinderkondensator (3+2+2):



Die Anordnung besteht aus zwei koaxialen Zylindern der Höhe h mit den Radien $R_1 < R_2$. Das elektrische Feld $\vec{E}$ verläuft axialsymmetrisch. Verwenden sie Zylinderkoordinaten mit dem Ansatz: $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\, e_\rho$.

a) Berechnen sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das elektrostatische Potential V (Fallunterscheidung für $\rho < R_1$, $R_1 < \rho < R_2$ und $R_2 < \rho$).

b) Berechnen sie die Spannung U zwischen den Zylindern und die Kapazität C des Zylinderkondensators.

c) Berechnen sie die Energiedichte $w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ .und die Gesamtenergie $W = \int w(\vec{r})\, d\vec{r}$.

Lösung:

a) Der Gaußsche Satz kann durch die Zylindersymmetrie vereinfacht werden. Man wählt für die Integration eine Zylinderoberfläche, so dass darauf überall $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ und $|\vec{E}| = const$ gilt:

$$\int \vec{E}\, d\vec{A} = E(\rho) 2\pi\rho h = \begin{matrix} 0, falls\ \rho < R_1 \\ Q/\epsilon_0\ , falls\ R_1 < \rho < R_2 \\ 0, falls\ R_2 < \rho \end{matrix}$$

D.h. das elektrische Feld verschwindet für $\rho < R_1$ und $R_2 < \rho$, nur für den Bereich dazwischen nicht und dort gilt: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h\rho} \vec{e}_\rho$

Das Potential erhält man allgemein durch $V(\rho)=-\int E(\rho)\, d\rho$. Danach bestimmt man die Integrationskonstanten aus den Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen:

$R_2<\rho$: $V_a(\rho)=0+c_1;\ \ RB: V_a(\infty)=0\ \Rightarrow c_1=0\ \Rightarrow V_a(\rho)=0$

$R_1<\rho<R_2$:

$$V_m(\rho)=-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln(\rho)+c_2;\ \ RB: V_m(R_2)=V_a(R_2)$$

$$\Rightarrow c_2=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln(R_2)\ \Rightarrow V_m(\rho)=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{\rho}$$

$\rho<R_1$:

$$V_i(\rho)=0+c_3;\ \ RB: V_i(R_1)=V_m(R_1)\ \Rightarrow c_3=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}\ \Rightarrow V_i(\rho)=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

b) Zwischen den Zylindern liegt also die Spannung: $U=V(R_1)-V(R_2)=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

Damit folgt für die Kapazität aus $C=\frac{Q}{U}$: $\quad C=\frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln R_2/R_1}$

c) Die Energiedichte folgt direkt aus a): $w(\vec{r})= \begin{cases} \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2\rho^2}, & falls\, R_1<\rho<R_2 \\ 0 & sonst \end{cases}$

und die Gesamtenergie berechnet sich so zu:

$$W=\int \rho\, d\rho\, d\phi\, dz\, w(\vec{r}) = 2\pi h\frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0 h^2}\int_{R_1}^{R_2} d\rho\,\frac{1}{\rho} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Bemerkung: Hier gilt natürlich auch wieder $W=\frac{1}{2}C\,U^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$.

2. Wasserstoffatom (3):

Berechnen sie die Energie die aufgebracht werden muss, um das Elektron und das Proton eines Wasserstoffatoms vollständig voneinander zu trennen (Ionisationsenergie). Nehmen sie dazu an, dass im Wasserstoffatom das Elektron im Abstand von $r=0,529\cdot 10^{-10}\ m$ um das Proton kreist (berücksichtigen sie auch die Energie, die in der Bewegung des Elektrons steckt).

Lösung:

Die potentielle Energie des Elektrons ist gegeben durch: $U=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$

Um die kinetische Energie zu erhalten, betrachtet man $F_{el}=F_{Zentr}$ und damit: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$. Hieraus folgt, dass $E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}=-\frac{1}{2}U$.
(Bemerkung: Diese Relation erhält man auch aus dem Virialsatz.) Die gesamte Energie wird somit zu $E_{ges}=U+E_{kin}=\frac{1}{2}U=-2{,}18*10^{-18}J=-13{,}6\,eV$.

Nach der Ionisation ist das Elektron bei $r=\infty$ und hat im Grenzfall die Geschw. $v=0$. Damit ist auch seine Energie gleich Null und die Ionisationsenergie beträgt $E_I=E(r=\infty,\ v=0)-E_{ges}=+13{,}6\,eV$. Diese klassische Rechnung liefert also tatsächlich den experimentell bestimmten Wert!

3. Plattenkondensator (2+1+1+1):

a) Berechnen sie die Kapazität C eines Plattenkondensators dessen Kondensatorplatten die Maße 200mm×30mm haben und einen Luftspalt von 1mm aufweisen.

b) Welche Ladung befindet sich auf den Platten, wenn der Kondensator an eine 12V Batterie angeschlossen ist?

c) Wie groß ist das elektrische Feld E zwischen den Platten?

d) Schätzen sie ab, wie groß die Fläche des Kondensators sein müsste, wenn er eine Kapazität von 1F haben soll (gleicher Luftspalt wie unter a)).

Lösung:

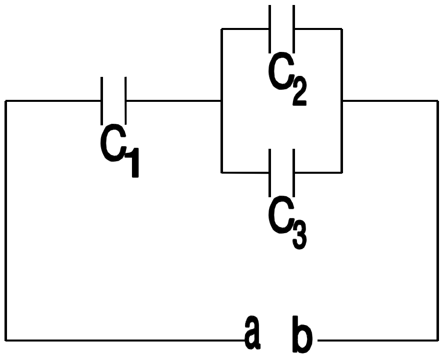
a) Die Kapazität ergibt sich zu $C=\epsilon_0\frac{A}{d}=53\,pF$.

b) Aus $Q=CU$ folgt $Q=6{,}4*10^{-10}C$.

c) Das elektrische Feld ergibt sich zu $E=\frac{U}{d}=1{,}2*10^4\ V/m$.

d) Einfaches Umformen der Gleichung in a) führt zu: $A=\frac{Cd}{\epsilon_0}\approx 10^8\ m^2$. Das ist eine Fläche mit Seitenlängen von 10 km, das entspricht z.B. ziemlich genau der Größe von Heidelberg!

4. Gekoppelte Kondensatoren (1+2):



a) Berechnen sie die äquivalente Kapazität der Schaltung, d.h. die Kapazität zwischen den Punkten a und b.

b) Die Kondensatoren werde durch eine 12V Batterie (zwischen a und b platziert) aufgeladen. Berechnen sie jeweils die Ladung auf den Kondensatoren und die über sie abfallende Potentialdifferenz.

Lösung:

a) Da C_2 und C_3 parallel geschaltet sind, gilt: $C_{23}=C_2+C_3$.
C_1 und C_{23} dagegen sind in Reihe geschaltet und es gilt:

$$C_{ges}=\frac{C_1 C_{23}}{C_1+C_{23}}=\frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}=4\,\mu F$$

b) Die Gesamtladung ergibt sich zu: $Q_{ges}=C_{ges}U=4{,}8*10^{-5}C$.

Die beiden Kondensatoren C_1 und C_{23} tragen auch diese Ladung, die Spannungen ergeben dann sich zu $U_1=Q_{ges}/C_1=8\,V$ bzw. $U_{23}=Q_{ges}/C_{23}=4\,V$.

Da die beiden Kondensatoren C_2 und C_3 parallel geschaltet sind, liegt an ihnen die gleiche Spannung U_{23} an. Die Ladungen ergeben sich nun zu $Q_2=C_2 U_{23}=1{,}6*10^{-5}C$ bzw. $Q_3=C_3 U_{23}=3{,}2*10^{-5}C$. Natürlich ergibt sich wieder $Q_2+Q_3=Q_{23}=Q_{ges}$.