Übungen zur Physik II (Elektrodynamik) **SS 05**

5. Übungsblatt, Lösungen **12.05.2005**

1. Plattenkondensator mit Dielektrikum (1+1+2+2+1+1)

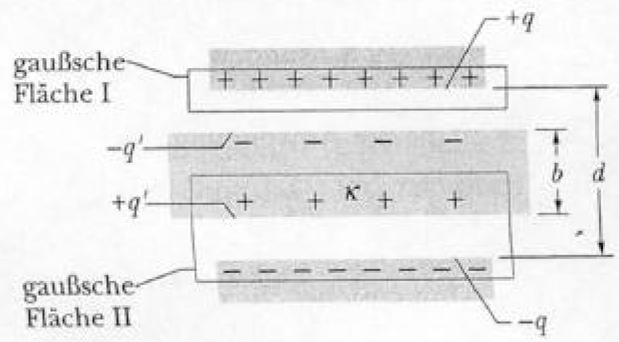

Abb. 26-17
Ein Plattenkondensator mit Dielektrikum, welches den Plattenzwischenraum nur teilweise ausfüllt.

Die Abbildung zeigt einen Plattenkondensator der Plattenfläche $A = 115\,\mathrm{cm}^2$ mit einem Plattenabstand $d = 1{,}24\,\mathrm{cm}$. An den Platten liege die Potentialdifferenz $V_0 = 85{,}5\,\mathrm{V}$ einer Batterie. Nun werde die Batterie entfernt und eine dielektrische Platte der Dicke $b = 0{,}78\,\mathrm{cm}$ mit der Dielektrizitätszahl $k = 2{,}61$ werde wie dargestellt in den Plattenzwischenraum gebracht.

a) Wie groß ist die Kapazität des Kondensators ohne Dielektrikum?
b) Wie groß ist die freie Ladung auf den Kondensatorplatten?
c) Wie groß ist das elektrische Feld E_0 in den Zwischenräumen zwischen Kondensatorplatten und Dielektrikum?
d) Wie groß ist das elektrische Feld E_1 im Inneren des Dielektrikums?
e) Wie groß ist die Potentialdifferenz V zwischen den Kondensatorplatten, nachdem das Dielektrikum eingeschoben wurde?
f) Wie groß ist die Kapazität des Kondensators mit Dielektrikum?

Lösung:

a) $C_0 = \dfrac{e_0 A}{d} = \dfrac{\left(8{,}85 \cdot 10^{-12}\, F/m\right)\left(1.15 \cdot 10^{-2}\, m^2\right)}{1.24 \cdot 10^{-2}\, m} = 8{,}21 pF$.

b) $q = C_0 V_0 = 702\, pC$.

c) Ansatz: Gaußscher Satz für gaußsche Flächen I: Diese verläuft im Raum zwischen Platte und Dieelektrikum und schließt deshalb ausschließlich freie Ladungen der oberen Kondensatorfläche ein:

$\int e_0 k \vec{E}_0\, d\vec{A} = q, E_0 = \dfrac{q}{e_0 k A} = \dfrac{7{,}02 \cdot 10^{-10} C}{8{,}85\left(\cdot 10^{-12}\, Fm^{-1}\right)(1)\left(1{,}15 \cdot 10^{-4}\, m^2\right)} = 6900 Vm^{-1}$. Da die Fläche nicht innerhalb des Dieelektrikums liegt ist k=1.

d) Ebenso für Fläche II: $\int e_0 k \vec{E}_I \, d\vec{A} = -e_0 k E_I A = -q,\ E_I = \dfrac{q}{e_0 k A} = \dfrac{E_0}{k} = 2{,}65 kVm^{-1}$. Das erste Minuszeichen ergibt sich aus dem Skalarprodukt, da Feldvektor und Flächennormale in diesem Fall entgegengesetzt sind.

e) V ergibt sich aus Integration entlang einer geraden Linie, die die Platten verbindet. Der Integrationsweg verläuft über eine Länge b innerhalb des Dieelektrikums, die Gesamtstrecke zwischen den Kondensatorplatten und den Oberflächen des Dieelektrikums ist d-b:

$$\int_{-}^{+} Eds = E_0 (d-b) + E_I b = 52{,}3V$$

f) $C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{7{,}02 \cdot 10^{-10} C}{52{,}3V} = 13{,}4\, pF$

2. Gradient, Divergenz und Rotation (2+2+2):

Berechnen sie:

a) die Komponenten von $grad(\vec{a} \cdot \vec{r})$ in Kugelkoordinaten,

b) $div\,\vec{e}_r$, $grad\; div\,\vec{e}_r$, $rot\,\vec{e}_r$, $div\,\vec{e}_j$, $rot\,\vec{e}_J$ in Kugelkoordinaten,

c) die Komponenten von $rot(\vec{a} \times \vec{r})$ in Zylinderkoordinaten ($\vec{a} = const.$).

Lösung

a) $\nabla = \vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_J \dfrac{1}{r} \partial_J + \vec{e}_j \dfrac{1}{r \sin J} \partial_J$. Mit $\vec{a}$ als Polarachse folgt $\vec{a} \cdot \vec{r} = a \cdot r \cdot \cos J$,
$grad(\vec{a} \cdot \vec{r}) = a(\cos J\, \vec{e}_r - \sin J\, \vec{e}_J)$.

b)
$$div\,\vec{e}_r = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \cdot 1) = \frac{2}{r},\ grad\; div\,\vec{e}_r = -\frac{2}{r^2} \vec{e}_r,\ rot\,\vec{e}_r = 0,\ div\,\vec{e}_j = 0,$$
$$rot\,\vec{e}_J = \vec{e}_j \frac{1}{r} \partial_r (r \cdot 1) = \frac{1}{r} \vec{e}_j$$

c) $\vec{a}$: Z-Achse $\rightarrow \vec{a} = a\vec{e}_z,\ \vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$,

$$rot_z(\vec{a} \times \vec{r}) = \frac{1}{r} \partial_r (a r^2) = 2a \Rightarrow rot(\vec{a} \times \vec{r}) = 2a\vec{e}_z.$$

Darstellung von Vektoroperationen in verschiedenen Koordinatensystemen

Bedeuten $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ orthogonale Einheitsvektoren in den unten spezifizierten Koordinatensystemen und A_1, A_2, A_3 die entsprechenden Komponenten eines Vektors $\mathbf{A}$, dann gilt:

Kartesische Koordinaten $(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$$

Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \mathbf{e}_3 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

[Man beachte die Identität $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$]

3. Strommeßgerät (3):

Zu einem Strommesser, dessen Innenwiderstand $R_i = 1\Omega$ beträgt, werden nacheinander Widerstände (Shunts) von $0{,}2\,\Omega$, $0{,}01266\,\Omega$ und $0{,}00402\,\Omega$ parallelgeschaltet. Auf den wievielfachen Wert erhöht sich dadurch der Messbereich?

Lösung:

$(I - I_1) : I_1 = R_i : R$. Die Meßbereichserweiterung entspricht dem Verhältnis $\frac{I}{I_1} = \frac{R_i}{R} + 1$ und damit 6, 80, 250.

4. Reale Widerstände (3):

Zwei Widerstände von $200\,\Omega(1 \pm 10\%)$ bzw. $500\,\Omega(1 \pm 10\%)$ sind parallelgeschaltet. Wie groß sind der Gesamtwiderstand und die dazugehörige Toleranz?

Lösung:

$R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 142{,}86\Omega$. Mit dem Größt- bzw. Kleinstwert ergibt sich $R_{gr} = 157{,}14\Omega$, $R_{kl} = 128{,}57\Omega$, so dass mit einer Toleranz von $\pm 14{,}3\Omega$ gerechnet werden muss.