Lösungen zur Übungen zur Physik II (Elektrodynamik)	**SS 05**
6. Übungsblatt	**19.05.2005**
Bearbeitung bis Mi. 25.05.2005	

1. Geschwindigkeit von Elektronen in Drähten (2+2+2)

Ein Kupferdraht mit dem Durchmesse $d = 3{,}2\,\text{mm}$ wird von einem Strom $I = 5{,}0\,\text{A}$ durchflossen. Berechnen Sie

a) die Stromdicht j im Draht,

b) die Driftgeschwindigkeit der freien Elektronen.

c) Versuchen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\mathrm{v}_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ der Elektronen zu bestimmen indem Sie davon ausgehen, daß diese sich wie ein ideales Gas bei 20°C verhalten.

Die atomare Masse von Kupfer beträgt $63{,}5\,\text{u}$ (oder auch amu), d.h. 63,5g Kupfer enthalten ein Mol oder $6{,}02 \cdot 10^{23}$ Atome. Die spezifische Dichte von Kupfer ist $\rho_D = 8{,}9\ \text{g}/\text{cm}^3$. Nehmen Sie an, dass sich pro Cu-Atom nur ein Elektron frei bewegen kann.

Lösung 1a:

Stromdichte j ist der Strom, der pro Flächeneinheit fliesst: $j = \frac{I}{A}$

$$A = \pi r^2 = \pi (1.6 \times 10^{-3} m)^2 = 8.04 \times 10^{-6} m^2$$

$$j = \frac{I}{A} = \frac{5.0A}{8.04 \times 10^{-6} m^2} = 6.2 \times 10^5 A/m^2$$

Lösung 1b:

Elektronen im Leiter werden durch die Kraft $-e\vec{E}$ beschleunigt. Sie bewegen sich ein bisschen, bis sie durch Stöße mit Metallionen ihre kinetische Energie verlieren, werden wieder beschleunigt usw. Die mittlere Geschwindigkeit ist die Driftgeschwindigkeit v_D.

Durch die Querschnittsfläche A fliesst in Δt die Ladung $\Delta Q = qnAv_D\Delta t$ (Ladung q, Dichte n).

Man benötigt die Dichte n der beweglichen Elektronen: Für Kupfer ist charakteristisch, dass jedes Atom ein Leitungselektron hat, also:

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{(8.93g\ cm^{-3})(6.02 \times 10^{23} mol^{-1})}{63.5g\ mol^{-1}} = 8.47 \times 10^{28} m^{-3}$$

Also: $I = \Delta Q / \Delta t = qnAv_D \Rightarrow v_D = \frac{j}{nq} = \frac{j}{ne} = \frac{6.2 \times 10^5 A\, m^{-2}}{8.47 \times 10^{28} m^{-3} \cdot 1.6 \times 10^{-19} C} = 4.57 \times 10^{-5} m\, s^{-1}$

Das sind 50µm pro sekunde.

Lösung 1c:

Woher die Gleichung? Aus der kinetischen Gastheorie (Druck ergibt sich durch elastische Stöße mit der Wand, Temperatur kommt über $PV = Nk_B T$ rein).

v_{rms} ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit

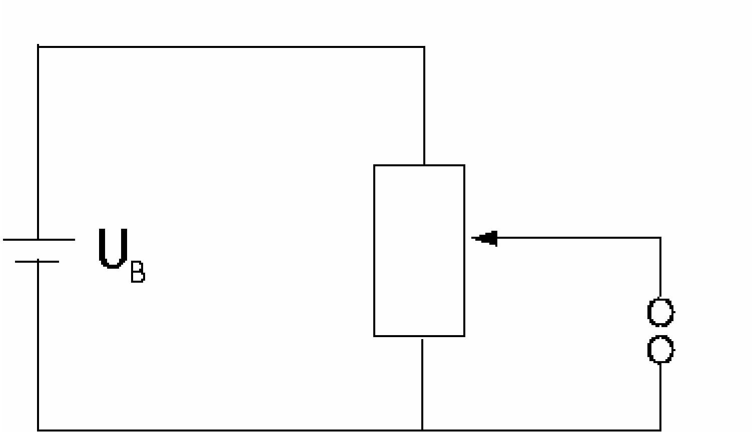
Also:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38\times10^{-23}\,J\,K^{-1})(293K)}{9.11\times10^{-31}\,kg}} = 1.15\times10^{5}\,m\,s^{-1}$$

Die thermische Geschwindigkeit ist also 10^9 - mal so hoch wie die Driftgeschwindigkeit. Dies ist die QUADRATISCH gemittelte Geschwindigkeit, normal gemittelt wäre die thermische Geschwindigkeit 0.

2. Gleichstrom (2+2+2):

Ein Taschenrechner benötigt die Versorgungsspannung $U_V = 3\,\mathrm{V}$ und nimmt dabei den Strom $I_V = 3\,\mathrm{mA}$ auf. Sie haben nicht die passende Batterie zur Verfügung und müssen sich mit einer Batterie mit $U_B = 9\,\mathrm{V}$ behelfen. Im ihrem Fundus finden Sie noch ein Potentiometer mit Widerstand $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.

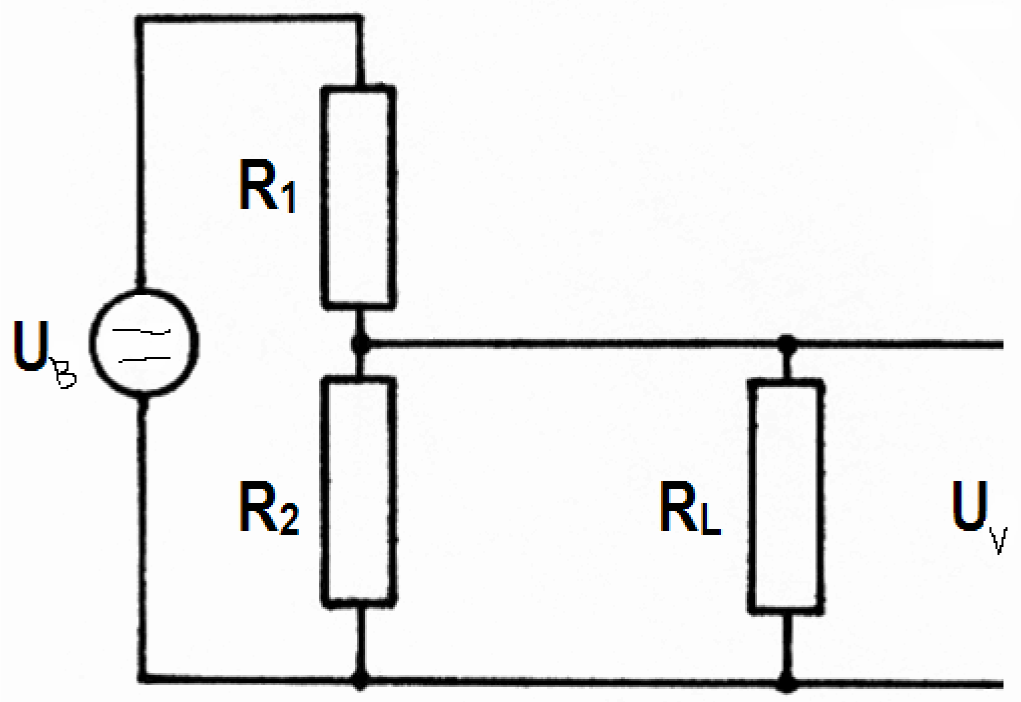


a) Wie muß das Potentiometer eingestellt werden, um ohne angeschlossenen Taschenrechner die Spannung von $U_V = 3\,\mathrm{V}$ zu erzeugen?

b) Wie ändert sich die Spannung am Potentiometer in dieser Stellung, wenn Sie den Taschenrechner anschließen?

c) Welche Leistung gibt die Batterie dann ab und welche Leistung nimmt der Taschenrechner auf?

Lösung 2a:
Das ist das Ersatzschaltbild, $R1 + R2 = 1k\Omega$ sind das Poti:



Ohne Last ist $R_L = \infty$, U2 soll 3V betragen. Der Gesamtstrom, der fliesst, ist $I = U / R = 9V / 1000\Omega = 9mA$. Durch R2 fliesst auch dieser Strom, dort gilt: $R_2 = U_V / I = 3V / 9mA = 1/3k\Omega$. Damit $R_1 = 2/3k\Omega$.

Lösung 2b:

Widerstand Taschenrechner ist $R_L = U_V / I_V = 1k\Omega$.

Wie ist nun U_V?

Die Parallelschaltung aus R2 und RL hat den Widerstand

$$R_X = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} = 1/4k\Omega$$

Berechne neuen Gesamtstrom:

$$I = U_B / (R_1 + R_X) = \frac{9V}{11/12k\Omega} = 9.82mA$$

Damit kann man die neue Spannung über R_L bestimmen:

$$U_V = R_X \cdot I = 2.45V$$

Lösung 2c:

$$P_{Batterie} = U_B I = 9V \cdot 9.82mA = 88.4mW$$

$$P_{Taschenrechner} = U_V{}^2 / R_V = (2.45V)^2 / 1k\Omega = 6mW$$

3. Aufladung eines Plattenkondensators (2+2+2):

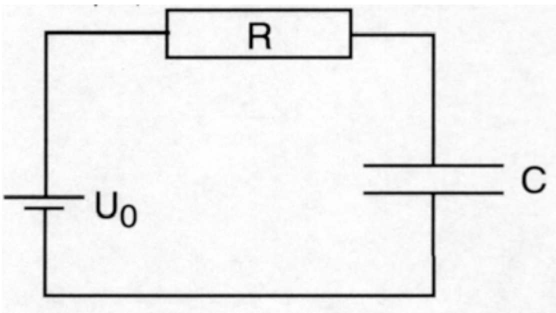
Ein Plattenkondensator der Kapazität $C = 10\,\mu\text{F}$ wir über einen Widerstand $R = 1\,\text{M}\Omega$ auf die Spannung U_0 aufgeladen.

a) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf des Ladestroms.

b) Nach welcher Zeit t ist der Strom auf die Hälfte abgesunken?

c) Wie groß ist die im Kondensator gespeicherte elektrische Feldenergie? Zeigen Sie, dass diese Energie beim Entladen im Widerstand R in Wärme umgewandelt wird.

Lösung 3a:



Beim Laden fliesst der Ladestrom $I(t)$, Maschenregel liefert $U_0 = U_R + U_C$ und es gilt immer $I(t) = dQ/dt$. Man nimmt am einfachsten Q als die gesuchte Größe. Also:

$$U_0 = U_R + U_C = I(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C} \Leftrightarrow CU_0 = Q(t) + C \cdot R \cdot \dot{Q}(t)$$

Lösen dieser DGL:

1. Lösen der homogenen DGL
   $0 = Q(t) + C \cdot R \cdot \dot{Q}(t) \Rightarrow Q(t) = k_1 \cdot e^{-t/RC} + k_2$

2. Bestimmung der Konstanten der allg. DGL durch die Randbedingungen
   a. $Q(t \to \infty) = C \cdot U_0 = k_2 \quad \Rightarrow k_2 = C \cdot U_0$
   b. $Q(t=0) = 0 = k_1 + k_2 \quad \Rightarrow k_1 = -C \cdot U_0$: und:

   Das ergibt $Q(t) = C \cdot U_0 \cdot \left(1 - e^{-t/RC}\right)$

Der zeitliche Verlauf vom Strom ist dann:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{C \cdot U_0}{R \cdot C} \cdot \left(e^{-t/RC}\right) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(e^{-t/RC}\right)$$

Lösung 3b:

Der Ladestrom bei $t = 0$ ist $I_0 = U_0 / R$. Der Zeitpunkt $t_{1/2}$, an dem der Ladestrom auf $I(t_{1/2}) = I_0 / 2$ abgesunken ist, errechnet sich so:

$$1/2 = \left(\frac{U_0}{R} \cdot \exp(-t_{1/2} / RC)\right) / (U_0 / R)$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = R \cdot C \cdot \ln 2 = 1 \times 10^6 \Omega \cdot 10 \times 10^{-6} F \cdot \ln 2 = 10 \frac{V}{A} \frac{C}{V} \ln 2 = 6.93 s$$

Lösung 3c:

Entweder mit

Feldenergie: Die Feldenergie im Volumen $V = A \cdot d$ ist bei einem Plattenkondensator

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \cdot V = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{U_0}{d}\right)^2 \cdot A \cdot d = \frac{C}{2} \cdot U_0{}^2$$

Oder **Integration über Ladevorgang:**

Wird dem Kondensator die infinitesimale Ladung dq zugeführt, erhöht sich die Potentielle Energie W um $dW = Udq = \frac{q}{C} dq$, da die momentane Potentialdifferenz $U = \frac{q}{C}$ ist. Der Gesamtbetrag Potentieller Energie, integriert über den gesamten Ladevorgang, ist dann:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2 \cdot C}, \text{ mit } C = Q / U_0 \text{: } W = \frac{1}{2} C U_0{}^2$$

Beim Entladen über R wird folgende Energie in Wärme umgewandelt:

$$W = \int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty I(t) \cdot U(t) dt = \int_0^\infty I(t)^2 dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{U_0^2}{R} \frac{RC}{2} \left[e^{-2t/RC} \right]_0^\infty = \frac{C}{2} \cdot U_0^2$$