Lösungsvorschlag zu Blatt 7

Aufgabe 1: Elektrolytische Leitung

Eine KCL-Lösung einer Konzentration von $10^{-4} Mol/cm^3$ besitzt bei $15°C$ eine spezifische Leitfäigkeit von $\sigma = 1.05 \frac{1}{\Omega m}$. Aus anderen Messungen wurde das Verhätnis der Ionenradien zu $a_{Cl}/a_K = 1.36$ bestimmt.

Wie groß sind die beiden Ionenradien?

Die Konzentration der Ionen pro Volumeneinheit ergibt sich dirket aus der Avogadrozahl zu $n = 10^{-4} \cdot 10^6 \cdot 6.023 \cdot 10^{23} = 6.023 \cdot 10^{25} m^{-3}$.
Die Geschwindigleit eines Ions ergibt sich aus der Kräftebilanz
$F_{Stokes} = 6\pi\eta a \cdot v = F_{Elektrisch} = e \cdot E$ zu

$$v = \frac{e \cdot E}{6\pi\eta a} \tag{1}$$

Fuer die Stromdichte gilt:

$$j = ne(v_+ - v_-) = \frac{n \cdot e^2}{6\pi\eta} \left(\frac{1}{a_+} + \frac{1}{a_-} \right) \cdot E$$

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{n \cdot e^2}{6\pi\eta a_-} \left(1 + \frac{a_-}{a_+} \right)$$

Umformen nach a_- liefert dann den Radius der negativen Cl^--Ionen

$$a_- = a_{Cl} = \frac{n \cdot e^2}{6\pi\eta\sigma} \left(1 + \frac{a_-}{a_+} \right) = 1,84 \cdot 10^{-10} m$$

und aus dem Verhältnis der Ionenradien $a_{Cl}/a_K = a_-/a_+$ und dem Radius a_- folgt der Radius $a_K = 13.5 nm$.

Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die Ionen in einem Feld von $E = 500V/m$?

Die Geschwindigkeiten der Ionen in einem elektrischen Feld E ergeben sich mit Hilfe der Stokes-Reibung $F_{Stokes} = 6\pi\eta a v$ (siehe Gl. 1) zu

$$\begin{aligned} v_- &= \frac{e \cdot E}{6\pi\eta a_-} = 2.31 \cdot 10^{-5} m/s \\ v_+ &= 3.15 \cdot 10^{-5} m/s \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Batterie-Entladung/Galvanisches Element

Um wieviel wird der Zylindermantel bei der Entladung dünner?

Jedes Zn^{++}-Ion trägt die Ladung $q = 3,2 \cdot 10^{-19}C$, die gesamte von der Batterie abgegebene Ladung ist $Q = 1,5 \cdot 3600As = 5400C$. Damit ergeben sich

$$N = \frac{Q}{q} = \frac{5400C}{3,2 \cdot 10^{-19}C} = 1,69 \cdot 10^{22}$$

gelöste Zn-Atomme. Die Masse der in Lösung gegangenen Zn-Atome ist

$$M = N \cdot \frac{m_{mol}}{N_A} = 1,69 \cdot 10^{22} \cdot \frac{65,4\frac{kg}{kmol}}{6,022 \cdot 10^{26}\frac{1}{kmol}} = 1,83g$$

Das Volumen dieser Atome, die dem Zn-Mantel jetzt fehlen, ist

$$\Delta V = \frac{M}{\rho} = \frac{1,83 \cdot 10^{-3}kg}{7133\frac{kg}{m^3}} = 257mm^3$$

Außerdem ist das Volumen $\Delta V = A \cdot \Delta x$ mit der Zylinderoberfläche $A = \pi \cdot L = \pi \cdot 40 \cdot 11mm^2$. Damit ergibt sich für die Dickenabnahme

$$\Delta x = \frac{\Delta V}{A} = 0,186mm$$

Aufgabe 3: Lorentzkraft

Für Elektronen, die auf einer Kreisbahn entlang des Äquators fliegen, muss die resultierende Zentrifugalkraft durch die Lorentzkraft kompensiert werden. Auf einer solchen Kreisbahn gilt: $\vec{v}\perp\vec{B}$, d.h. die resultierende Lorenzkraft zeigt in zur Zentrifugalkraft entgegengesetzter Richtung, also auf den Erdmittelpunkt. Somit gilt:

$$F_{Zentrifugal} = F_{Lorentz}$$

$$\frac{m(v) \cdot v^2}{R} = e \cdot v \cdot B$$

Hierbei ist die relativistische Elektronenmasse $m(v) = \gamma \cdot m_0 \quad (\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+v^2/c^2}})$ und für den Impuls ergibt sich dann:

$$p = m \cdot v = \gamma \cdot m_0 v = e \cdot R \cdot B = 7,8 \cdot 10^{-17}\frac{m \cdot kg}{s}$$

Mit $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}kg$ gilt $p \gg m_0 \cdot c$, also kann man in guter Näherung $v \approx c = 3 \cdot 10^8\frac{m}{s}$ setzen und es ergibt sich ein Lorentzfaktor $\gamma = 2,85 \cdot 10^5$, d.h. die Elektronen müssen ultra- relativistisch sein. Die kinetische Energie der Elektronen ergibt sich aus

$$E_{kin} = \sqrt{(m_0 \cdot c^2)^2 + (c \cdot p)^2} - (m_0 \cdot c^2)^2 \approx c \cdot p = 1,46 \cdot 10^{11} eV$$

oder über

$$E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 \approx \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = 2,85 \cdot 10^5 \cdot 511 keV = 1,46 \cdot 10^{11} eV$$