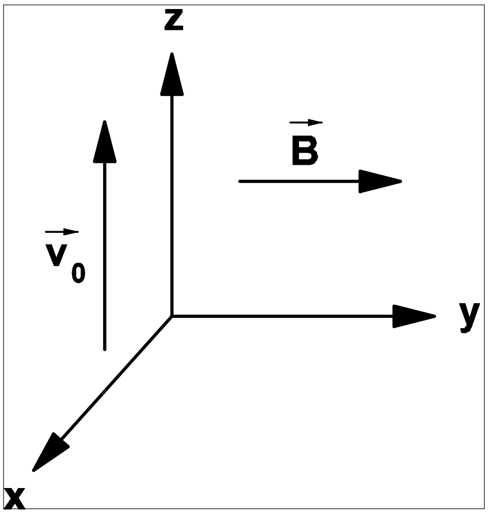
Übungen zur Physik II (Elektrodynamik)	**SS 05**
8. Übungsblatt Bearbeitung bis Mi. 15.06.2005	**09.06.2005**

1. Lorentz-Kraft (2+2+3)

Einem elektrischen Feld $\vec{E}$ wird ein $\vec{B}$-Feld überlagert.



a) Wie muß das elektrische Feld gewählt werden, damit ein Elektron, das mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = (0,0,v_0)$ senkrecht zum Magnetfeld $\vec{B} = (0,B,0)$ eintritt, nicht abgelenkt wird?

b) Wie groß ist $|\vec{v}_0|$, wenn bei $|\vec{B}| = (0,B,0)$ und $|\vec{E}| = 10^5\ \mathrm{V/m}$ keine Ablenkung des Elektrons erfolgt?

c) Berechnen Sie die Bahnen des Elektrons, wenn nur das $\vec{E}$-Feld bzw. nur das $\vec{B}$-Feld eingeschaltet ist. Verwenden sie dabei ein Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Eintrittspunkt des Elektrons in den Feldlinienbereich zusammenfällt.

Lösung:

a) Damit das Elektron nicht abgelenkt wird, muß die wirkende Gesamtkraft (durch das elektrische Feld und die Lorentzkraft) verschwinden

$$\vec{F} = e\cdot\vec{E} + e\cdot\vec{v}_0\times\vec{B} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}_0\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{v}_0 = (B\cdot v_0, 0, 0)$$

b) Der Betrag der Geschwindigkeit, mit der das Elektron in den Feldbereich eintritt, ist

$$|\vec{v}_0| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{E}{B} = \frac{10^5\ \mathrm{V/m}}{0.01\,\mathrm{Vs/m^2}} = 10^7\ \mathrm{m/s}$$

c) Wirkt nur das elektrische Feld, so wird das Elektron mit einer konstanten Kraft $\vec{F} = (e\cdot E, 0, 0)$ beschleunigt, d.h. es ergibt sich eine Parabelbahn. Die Geschwindigkeit ist $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (a\cdot t = eE/m\cdot t, o, v_0)$ und die Ortskurve dann

$\vec{r} = (x, y, z) = \left(eE/2m \cdot t^2, 0, \mathrm{v}_0 \cdot t\right)$, also eine Parabel in der x, z -Ebene. Wirkt nun das magnetische Feld $\vec{B}$, dann ist der Betrag der Geschwindigkeit konstant, da die Beschleunigung jeweils senkrecht zur Geschwindigkeit ist, d.h. es ergibt sich eine Kreisbahn mit Radius r:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_Z \Leftrightarrow e \cdot \mathrm{v}_0 \cdot B = m \cdot \frac{\mathrm{v}_0^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m \cdot \mathrm{v}_0}{e \cdot B}$$

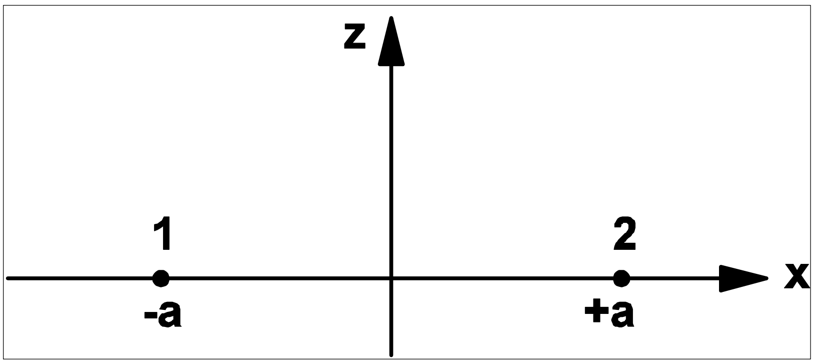
Die Kreisfrequenz ist dann

$$w = \frac{2p}{T} = \frac{\mathrm{v}_0}{r} = \frac{e \cdot B}{m}$$

Tritt das Elektron bei $\vec{r} = (0,0,0)$ in das magnetische Feld ein, so beschreibt es einen Halbkreis $\vec{r}(t) = (r \cdot (1 - \cos wt), 0, r \cdot \sin wt)$ und verlässt bei $\vec{r}(p/w) = (2r, 0, 0)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{\mathrm{v}} = (0, 0, -\mathrm{v}_0)$ den Feldlinienbereich.

2. Magnetfeld bewegter Ladungen I (4+3):

zwei lange, gerade Drähte mit Abstand $2a$ verlaufen parallel zur y -Achse in der x, y -Ebene und befinden sich im Vakuum. Sie werden von einem Strom $I = 20\,\mathrm{mA}$ durchflossen.



a) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(z) = (B_x(z), B_y(z), B_z(z))$ der Anordnung auf der Symmetrieachse (z -Achse) für den Fall, dass (i) der Strom im Leiter 1 Parallel zu dem in Leiter 2 fließt, (ii) die Ströme antiparallel fließen. Welche Magnetfeldstärke ergibt sich im Ursprung ($z = 0$) für beide Fälle?

b) Die Leiteranordnung befinde sich in einem homogenen Isolator mit der magnetischen Permeabilität $m_r = 120$. Welche Kraft pro Länge wirkt auf die Leiter, wenn $a = 1\mathrm{cm}$ beträgt, für parallelen und antiparallelen Stromfluß?

Lösung:

Ein Punkt auf der z -Achse hat den Abstand $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ zu beiden Leitern. Das Magnetfeld eines Leiters ist tangential ausgerichtet mit dem Betrag

$$\left|\vec{B}\right| = B = \frac{m_0 \cdot I}{2pr} = \frac{m_0 \cdot I}{2p} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

a) Mit $\sin f = z\big/\sqrt{a^2 + z^2}$ und $f_2 = p - f_1$ $(\sin f_2 = \sin f_1 \, , \cos f_2 = -\cos f_1)$ ergeben sich die beiden Magnetfelder zu

$$\vec{B}_1 = B_1\begin{pmatrix} -\sin f_1 \\ \cos f_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{B}_2 = B_2\begin{pmatrix} -\sin f_2 \\ \cos f_2 \end{pmatrix} = B_2\begin{pmatrix} -\sin f_1 \\ -\cos f_1 \end{pmatrix}$$

wobei $B_1 = B_2 = m_0 I\Big/\left(2p \cdot \sqrt{a^2 + z^2}\right)$ für gleiche Ströme $I_1 = I_2$ und $-B_1 = B_2$ für antiparallele Ströme $I_1 = -I_2$ gilt.

(i): $I_1 = I_2$, d.h. beide Ströme fließen in die gleiche Richtung:

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = B_1\left[\begin{pmatrix} -\sin f_1 \\ \cos f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin f_1 \\ -\cos f_1 \end{pmatrix}\right] = B_1\begin{pmatrix} -2\sin f_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{m_0 \cdot I}{p} \cdot \frac{z}{a^2 + z^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Komponenten des Feldes gilt also $B_z = 0$ und $B_x \sim 1/z$ für $z >> a$.

(ii): $I_1 = -I_2$, d.h. antiparallele Ströme:

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_1 - \vec{B}_2 = B_1\left[\begin{pmatrix} -\sin f_1 \\ \cos f_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin f_1 \\ -\cos f_1 \end{pmatrix}\right] = B_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin f_1 \end{pmatrix} = -\frac{m_0 \cdot I}{p} \cdot \frac{a}{a^2 + z^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Komponenten des Feldes gilt also $B_z = 0$ und $B_x \sim 1/z^2$ für $z >> a$.

Am Ursprung $(x = 0 \, , z = 0)$ ergibt sich:

(i): $I_1 = I_2 \Rightarrow B_x = 0; B_z = 0 \Leftrightarrow$ Felder sind entgegengesetzt gleich

(ii): $I_1 = -I_2 \Rightarrow B_x = 0; B_z = m_0 I/(pa) = 2B_1\,(z = 0)$.

b) Wir berechnen die Lorentzkraft, die durch bewegte Ladungen innerhalb eines Längenstückes L im Leiter 1 im Magnetfeld des Leiters 2 auf den Leiter 1 wirkt:

$$\frac{F_{21}}{L} = \frac{q_1\left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_2\right)}{L} = \frac{q_1}{L}\mathrm{v}_1 \cdot B_2(r = 2a)$$

da aufgrund der Symmetrie $\vec{v}_1 \perp \vec{B}_2$ gilt. Mit $\vec{j}_1 = r_1 \vec{v}_1$ bzw.

$\mathrm{v}_1 = j_1/r_1 = I/(A \cdot 1 \cdot r_1)$ und $r_1 = q_1/(L \cdot A)$ folgt dann

$$\frac{F_{21}}{L} = \frac{q_1}{L} \cdot \frac{L \cdot A}{q_1} \cdot \frac{I_1}{A} \cdot B_2(r = 2a) = I_1 \cdot \frac{m_0 m_r I_2}{2p} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{m_0 m_r}{4pa} \cdot I_1 \cdot I_2$$

$$= 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vms}^2}{\mathrm{Cm}^2} \cdot \frac{120}{0.01\mathrm{m}} \cdot \left(20 \cdot 10^{-3}\right)^2 \mathrm{A}^2 = 4.8 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

3. Magnetfeld bewegter Ladungen II (2+2+2):

Ein unendlich langer, nichtmagnetischer zylindrischer Leiter mit Innenradius a und Außenradius b wird von einem Strom I durchflossen (Leiter- und Stromrichtung sei die z-Achse). Die Stromdichte im Leiter sei homogen. Berechnen Sie das durch den Strom I erzeugte Magnetfeld $\vec{B} = (B_r, B_q, B_z)$ als Funktion der Zylinderkoordinaten (r, q, z)

a) Innerhalb des hohlen Leiters $(r < a)$.

b) Im Leiter selbst $(a < r < b)$.

c) Außerhalb des Leiters $(r > b)$.

<u>Lösung:</u>

Die Stromdichte im Hohlleiter ist gegeben durch

$$j = \frac{I}{A} = \frac{I}{p\left(b^2 - a^2\right)}$$

Folglich kann man den Strom, der durch einen Kreis mit dem Radius r fließt, wie folgt als Anteil des Gesamtstroms I schreiben:

$$I(r) = p\left(r^2 - a^2\right) \cdot j = \frac{I\left(r^2 - a^2\right)}{b^2 - a^2}$$

Aus dem Ampère'schen Gesetz für einen Kreis S senkrecht zum Leiter mit einem Radius r (oder 4. Maxwell-Gleichung mit zeitlich konstantem elektrischen Feld) folgt

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = m_0 \cdot I_{(durchS)}$$

Außerdem steht das Magnetfeld senkrecht zum Leiter, d.h. $B_z = 0$ und aus Symmetriegründen $B_r = 0$. Für die drei zu betrachtenden Fälle ergibt sich dann

a) $\vec{B}(r) = \left(B_r, B_q, B_z\right) = (0,0,0)$ für $r < a$

b) $\vec{B}(r) = \left(0, \frac{m_0 I}{2pr} \cdot \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, 0\right)$ für $a < r < b$

c) $\vec{B}(r) = \frac{m_0 I}{2pr} \vec{e}_q$ für $r > b$

<u>4. Gesetz von Biot-Savart (4):</u>

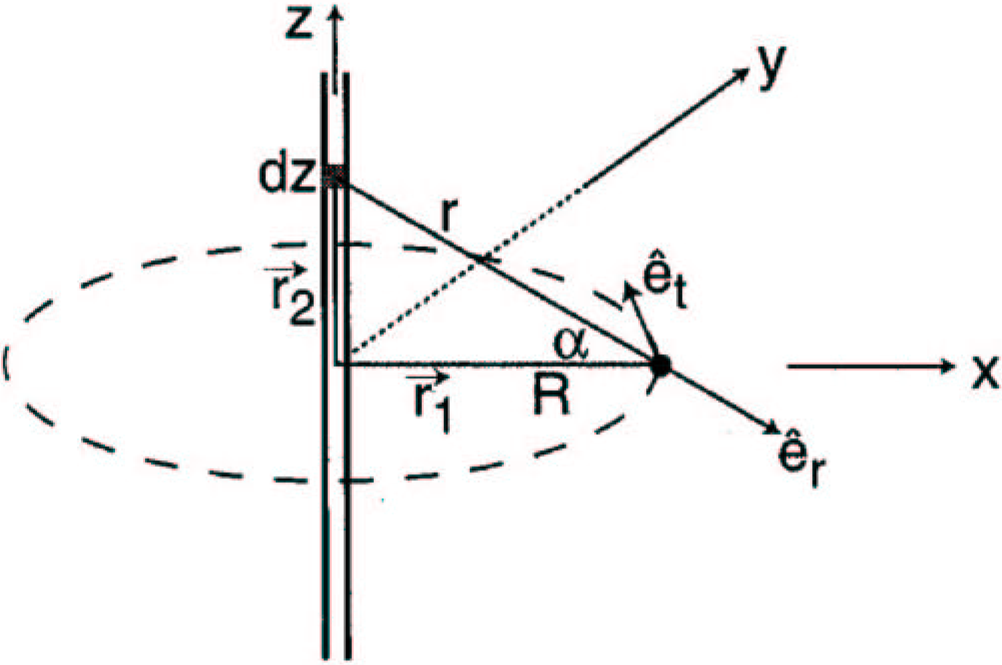
Berechnen Sie explizit mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{-m_0 \cdot I}{4p} \int \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) \times d\vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

das Magnetfeld in der Umgebung eines unendlich langen, stromführenden geraden Leiters, der in z-Richtung verläuft.

<u>Lösung:</u>

Die Berechnung des Magnetfeldes eines stromführenden geraden Leiters ist ein Rotationssymmetrisches Problem um die z-Achse, d.h. das angepasste Koordinatensysten sind Zylinderkoordinaten.



Der Vektor $\hat{e}_t$ ist der in der x, y-Ebene liegende tangentiale Vektor zum Kreis mit Radius R und zeigt in Richtung des B-Feld-Vektors.

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{-\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \frac{-\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{\hat{e}_r \times d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie gilt $\vec{B}(\vec{r}_1) = \vec{B}(|\vec{r}_1|) = \vec{B}(R)$, außerdem setzen wir $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r$ mit dem Einheitsvektor $\hat{e}_r$ in Richtung $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Daraus folgt dann

$$\vec{B}(R) = \frac{-\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{\hat{e}_r \times d\vec{r}_2}{r^2}$$

In Zylinderkoordinaten gilt $\hat{e}_t \times d\vec{r}_2 = -\hat{e}_t \cdot \cos\alpha \cdot dz$. Weiter gilt $r = R/\cos\alpha$ und $z = R \cdot \tan\alpha$, also $dz/d\alpha = R \cdot (\cos\alpha)^{-2}$. Damit ergibt sich für das Magnetfeld

$$\vec{B}(R) = \frac{-\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \hat{e}_t \cdot \int \frac{\cos\alpha \cdot dz}{r^2}$$

$$|\vec{B}(R)| = B(R) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} \cdot [\sin\alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R}$$