Übungen zur Physik II (Elektrodynamik) **SS05**

9. Übungsblatt Lösungen **16.06.2005**

Bearbeitung bis Mi. 22.06.2005

1. Unendlich langer zylindrischer Leiter (4+1)

Gegeben ist ein unendlich langer zylindrischer Leiter mit konstanter Stromdichte j.

a. Berechnen Sie das $\vec{B}$-Feld in Abhängigkeit vom Abstand r von der Zylinderachse für $r < R$ und $r > R$ mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes:

$$\oint_P \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

b. Skizzieren Sie $B(r)$.

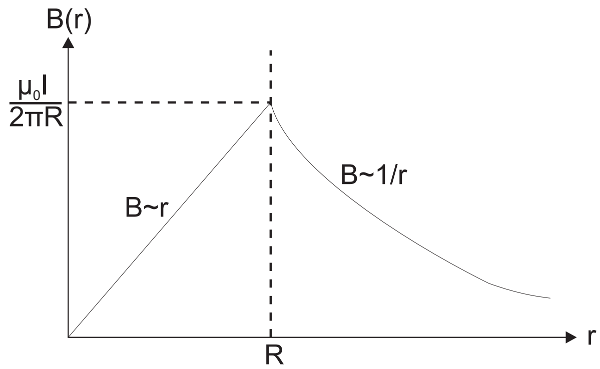
Lösung 1a: Außerhalb des Leiters $r > R$ (P_1):

$$\oint_{P_1} \vec{B} \cdot d\vec{s_1} = \mu_0 \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad B(r_1) \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad B(r_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_1}$$

Innerhalb des Leiters $r < R$ (P_2):

$$\oint_{P_2} \vec{B} \cdot d\vec{s_2} = \mu_0 \cdot I(r_2) \quad \text{mit} \quad I(r_2) = I \cdot \frac{\pi r_2^2}{\pi R^2} \quad \Leftrightarrow \quad B(r_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r_2$$

Lösung 1b:



2. Helmholtz-Spulen (2+3)

Zwei gleiche Kreisströme (Leiter mit Radius r und Strom I) werden mit gleicher Symmetrieachse (x-Achse) so aufgestellt, dass der Abstand ihrer Ebenen gleich a ist.

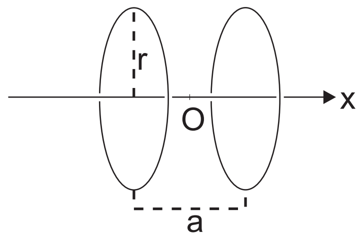
a. Berechnen Sie das Magnetfeld auf der x-Achse.
Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für Kreisströme mit Radius r auf der Symmetrieachse x gilt:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I r^2}{2\left(x^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

b. Bestimmen Sie den Abstand a der Kreisströme so, dass das Feld auf der Achse möglichst homogen wird.
Hinweis: Möglichst gute Homogenität wird erreicht, wenn sowohl die erste wie auch die zweite Ableitung des Feldes auf der Mittelachse verschwinden:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0$$

Lösung 2a:



Wählt man den Nullpunkt der x-Koordinate in der Mittelebene beider Kreisströme, dann ist

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I r^2}{2}\left(\frac{1}{[r^2+(x+a/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[r^2+(x-a/2)^2]^{3/2}}\right)$$

Lösung 2b: Durch Differenzieren nach x überzeugt man sich, dass in der Mittelebene ($x=0$), unabhängig von a, die erste Ableitung von B_x nach x verschwindet:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{3\mu_0 I r^2}{4}\left(\left[r^2+(x+a/2)^2\right]^{-5/2}\cdot(2x+a) + \left[r^2+(x-a/2)^2\right]^{-5/2}\cdot(2x-a)\right) \overset{x=0}{\equiv} 0$$

Für die zweite Ableitung gilt:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} = \frac{15\mu_0 I r^2}{8}\left[\left[r^2+(x+a/2)^2\right]^{-7/2}(2x+a)^2 + \left[r^2+(x-a/2)^2\right]^{-7/2}(2x-a)^2\right]$$
$$-\frac{3\mu_0 I r^2}{2}\left[\left[r^2+(x+a/2)^2\right]^{-5/2} + \left[r^2+(x-a/2)^2\right]^{-5/2}\right]$$

An der Stelle $x=0$ folgt dann:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}(x=0) = \frac{15\mu_0 I r^2}{8}\cdot\frac{2a^2}{(r^2+a^2/4)^{7/2}} - \frac{3\mu_0 I r^2}{2}\cdot\frac{2}{(r^2+a^2/4)^{5/2}}$$

Man erkennt, dass die zweite Ableitung für $a=r$ verschwindet, wenn also der Abstand der Kreisströme ihrem Radius entspricht:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2}(x=0, a=r) = -\frac{3\mu_0 I r^2}{2}\left[-\frac{5}{4}\frac{2r^2}{(r^2+r^2/4)^{7/2}} + \frac{2}{(r^2+r^2/4)^{5/2}}\right] = 0$$

3. Leiter in magnetischen Feldern (2+1+2)

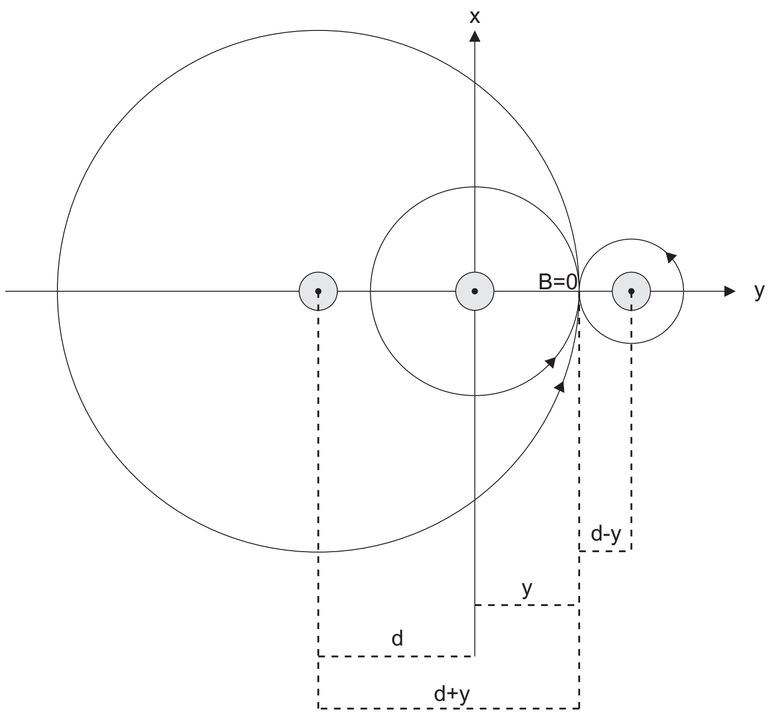
Gegeben sind 3 unendlich lange Leiter, die sich in gleichem Abstand d parallel zueinander in einer Reihe befinden ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = -d$, $y_2 = 0$, $y_3 = +d$). Der Leiterradius sei vernachlässigbar, durch alle drei Leiter fließe ein Strom I in die gleiche Richtung (z-Achse).

a. Berechnen Sie die Position der zwei Nullstellen in der $x - y$-Ebene des durch die Leiter erzeugten Magnetfeldes.

b. Skizzieren Sie die Magnetfeldlinien in der $x - y$-Ebene.

c. Der mittlere Leiter (2) werde nun um einen kleinen Weg $a << d$ ausgelenkt, während die Leiter 1 und 3 unverändert bleiben. Beschreiben Sie qualitativ die Bewegung des Leiters, wenn die Auslenkung (i) in y-Richtung bzw. (ii) in x-Richtung stattfindet.

Lösung 3a: Liegen die drei Drähte parallel (in Richtung z) auf einer Linie (entlang der y-Achse), dann müssen die Punkte mit verschwindendem magnetischen Feld ebenfalls entlang der y-Achse liegen (d.h. $x = 0$). Ansonsten ist mit Vektoraddition $\sum \vec{B}_i$ kein verschwindendes $\vec{B}$-Feld zu erreichen. Der Abstand eines solchen Punktes mit $\vec{B} = 0$ vom mittleren Leiter sei y, dann ist der Abstand zu den äußeren Leitern $d \pm y$:



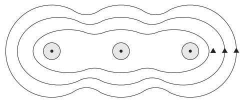
Mit Hilfe der Formel für das magnetische Feld unendlich langer Leiter (aus der Vorlesung: $B(r) = \mu_0 \cdot I/(2\pi \cdot r)$) erhält man dann die Beziehung:

$$\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi(d-y)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi y} + \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi(d+y)}$$

Es ergeben sich somit erwartungsgemäß zwei Lösungen:

$$y = \pm\frac{d}{\sqrt{3}}$$

Lösung 3b:



Lösung 3c: Für die Kraft pro Längeneinheit, die zwei stromdurchflossene Leiter (Ströme I_1 und I_2) im Abstand r aufeinander ausüben, gilt laut Vorlesung:

$$f := \frac{dF}{dl} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Dabei beschreibt das negative Vorzeichen die anziehende Kraftwirkung im Falle gleicher Stromrichtung (gleiches Vorzeichen der Ströme).

(i) Wird der mittlere Leiter in y-Richtung ausgelenkt, so ist die resultierende Kraft pro Länge gegeben durch

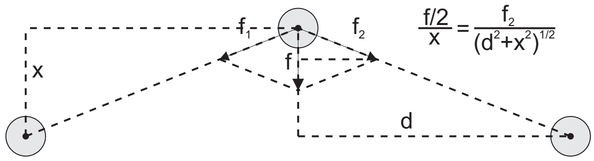
$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d-y)} - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d+y)}$$

Wegen $y << d$ folgt in guter Näherung:

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d-y)} - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(d+y)} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \cdot \frac{2y}{d^2 - y^2} \approx \frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2} \cdot y.$$

Das bedeutet, dass die Kraft proportional zur Auslenkung ist. Da sie der Auslenkung gleichgerichtet ist (gleiches Vorzeichen), stellen sich jedoch keine harmonischen Schwingungen ein.

(ii) Bei Auslenkung in x-Richtung erhält man formal dasselbe mit umgekehrtem Vorzeichen:



Hier gilt für beide Kräfte

$$f_1 = f_2 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\sqrt{d^2 + x^2}}$$

und für die resultierende Kraft:

$$f = -\frac{2x f_2}{\sqrt{d^2 + x^2}} = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi} \cdot \frac{x}{d^2 + x^2} \approx -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2} \cdot x$$

In diesem Fall stellen sich harmonische Schwingungen ein, da Auslenkung x und Kraft f antiparallel sind. Mit $F = -k \cdot x$ und $\omega = \sqrt{k/m}$ (m: Gesamtmasse des Leiters) kann man für die Periodendauer der Schwingung angeben:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\lambda}{\mu_0}} \cdot \frac{d}{I}$$

Hierbei ist $\lambda = m/L$ die lineare Massendichte des Drahtes.

4. Ballistischer Strombügel (3+2)

Ein Π-förmiger Drahtbügel mit Masse $m = 5$ g und einer Gesamtlänge von $L = 15$ cm taucht mit den abwärts zeigenden 6 cm langen Schenkeln in zwei bis oben gefüllte Quecksilbernäpfe ein. Senkrecht zur Fläche des Bügels herrscht ein Magnetfeld von $B = 1$ T.

a. Wie hoch fliegt der Bügel, wenn plötzlich ein Strom von $I = 100$ A eingeschaltet wird? Vernachlässigen Sie Reibung im Quecksilber und in der Luft sowie die Induktion im Draht.

b. Bestimmen Sie aus der Flughöhe die durchgeflossene Elektrizitätsmenge.

Lösung 4a: Für einen stromdurchflossenen Leiter der Länge L in einem zu ihm senkrecht stehenden Magnetfeld ist die Lorentzkraft $F_L = ILB$. Die geleistete Arbeit ist das Wegintegral von F_L entlang des Weges a. Diese Arbeit steckt nachher in der potentiellen Energie $E = mgh$:

$$\int \vec{F}_L d\vec{s} = F_L a = ILBa = mgh$$

Hieraus ergibt sich die maximale Flughöhe zu

$$h = \frac{ILBa}{mg} = 3,67 \text{ m} \tag{1}$$

Lösung 4b: Während des Weges a fließt Ladung durch den Strombügel. Mit $a = 1/2 a_b t^2$ (Beschleunigung $a_b = F_L/m$) erhält man die hierfür benötigte Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2ma}{ILB}}. \tag{2}$$

In dieser Zeit fließt die Ladung $Q = I \cdot t$. (1) und (2) eingesetzt, ergibt schließlich:

$$Q = \frac{m}{LB}\sqrt{2gh} = \sqrt{2} \text{ Coulomb}$$

Alternativer Lösungsweg mit Impulssatz und Energieerhaltung $mgh = 1/2mv^2$:

$$mv = F_L \cdot \Delta t = ILB \cdot \Delta t = LBQ$$
$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{L^2B^2Q^2}{2m^2g}$$
$$\Rightarrow Q = \frac{m}{LB}\sqrt{2gh}$$