Übungen zur Physik II (Elektrodynamik) **SS 05**

Lösungen zum 10. Übungsblatt **23.06.2005**

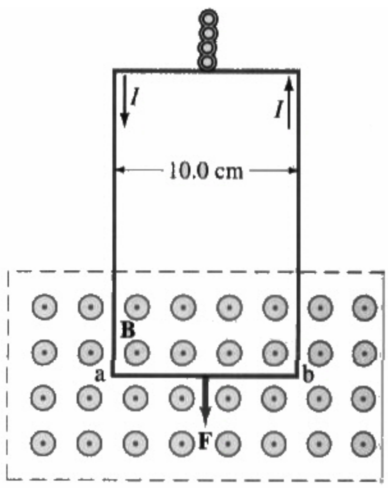
Besprechung am Mi. 29.06.2005

Aufgabe 1. Magnetische Kraft (2+4)

a) Messung des magnetischen Feldes.

Eine rechteckige Leiterschleife hängt vertikal im Zentrum eines großen Magneten, so dass das magnetische Feld senkrecht zum Draht gerichtet ist und aus der „Papierebene" herauszeigt. Das Magnetfeld B ist gleichförmig auf der Länge des horizontalen Abschnittes des Drahtes ($l = 10.0cm$). Der obere Teil der Leiterschleife ist feldfrei. Die Schleife hängt an einer Waage die eine Kraft von $F = 3.48 \times 10^{-2} N$ nach unten misst, wenn durch der Draht ein Strom von $I = 0.245 A$ fließt. Wie groß ist Magnetfeld B im Zentrum?

Lösung:



Die magnetischen Kräfte auf die zwei vertikalen Seiten der Leiterschleife sind entgegegerichtet. Da sie gleich groß sind, addieren sie sich zu Null. Die resultierende Kraft auf die Leiterschleife ist die auf die horizontale Seite *ab* mit Länge l = 0.1 m (θ = 90°)

$$B = \frac{F}{Il} = \frac{3.48 \times 10^{-2} N}{(0.245 A)(0.100 m)} = 1.42\ T$$

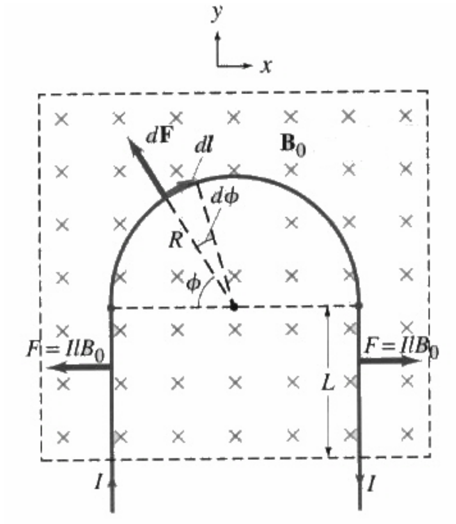
Diese Methode wird auch zur exakten Bestimmung von Magnetfeldern benutzt.

b) Halbrunder Draht im magnetischen Feld.

Der Draht, durch den ein Strom I fließt, besteht aus einem nach unten geöffneten Halbkreis mit Radius R und zwei geraden Zuleitungen. Der Draht liegt senkrecht zum homogenen magnetischen Feld B. Das magnetische Feld ist vom Betrachter weg gerichtet. Jede Zuleitung

hat die Länge l im Feld B_0.
Bestimmen Sie die resultierende Kraft auf den Draht durch magnetische Feld B_0.

Lösung:



Die Kräfte auf den zwei geraden Zuleitungen sind gleich (= IlB_0) und entgegengesetzt, deshalb heben sie sich auf. Folglich ergibt sich die resultierende Kraft aus dem halbrunden Teil. Wir teilen den Halbkreis in kurze Abschnitte $dl = R\, d\Phi$ auf und verwenden die Gleichung $d\mathbf{F} = I\, dl \times \mathbf{B}$, so finden wir

$$dF = IB_0 R d\phi$$

wobei dF die Kraft auf einen Abschnitt $dl = R\, d\Phi$ ist, und der Winkel zwischen $d\mathbf{l}$ und $\mathbf{B}_0$ immer 90° beträgt. Die x-Komponente der Kraft $d\mathbf{F}$ auf einen Abschnitt dl und die x-Komponente der Kraft auf den zur vertikalen Mittelachse symmetrisch gelegenen Abschnitt dl heben sich auf. Deswegen ergibt sich für gesamten Halbkreis keine x-Komponente der Kraft. Folglich haben wir nur die y- Komponente, und die resultierende Kraft wird die Größe

$$F = \int_0^{\pi} dF \sin\phi = IB_0 R \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi = -IB_0 R \cos\phi \Big|_0^{\pi} = 2IB_0 R.$$

Diese Kraft wirkt vertikal nach oben, der y-Achse entlang.

Augabe 2. Magnetisches Moment eines kreisenden Elektrons (2+2+2)

In einem einfachen Modell kreist ein Elektron auf einer Bahn von Radius $a = 0.528$ Å um den Atomkern. Sein mechanischer Drehimpuls ist dabei gequantelt und hat den Wert $L = \hbar$.

a. Welche mittlere Stromstärke stellt das umlaufende Elektron dar ?

Lösung:

Mit dem Trägheitsmoment $J = m \cdot a^2$ und der Kreisfrequenz $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \upsilon$ folgt für den Drehimpuls des Elektrons und die Umlauffrequenz ν des Elektrons

$$L = J \cdot \omega = m \cdot a^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \upsilon = \hbar \Rightarrow \upsilon = \frac{\hbar}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot a^2}$$

Die Stromstärke, die sich aus dem umlaufenden Elektron ergibt, ist die Elektronenladung pro Umlaufzeit, oder

$$I = e \cdot \upsilon = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot a^2} = 1.06 \cdot 10^{-3} \text{Å}$$

b. Welche Zusammenhang besteht zwischen dem Drehimpuls L und dem magnetischen Moment $p = \textit{Stromstärke x Fläche}$?

Lösung:

Das durch das kreisende Elektron erzeugte magnetische Moment ist

$$p = I \cdot F = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot a^2} \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m} = \frac{1}{2}\frac{e}{m} L = 8.8 \cdot 10^{-24} \, Am^2$$

Das Drehmoment M , z.B. einer stromdurchflossenen Leiterschleife der Fläche F ist gegeben durch $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{B}$ mit $\vec{p} = I\vec{F}$. Benutzt man noch $B = \mu_0 \cdot H$ und zieht die Induktionskonstante zum magnetischen Moment, also $M = p \times B = \mu_0 p \times H$ so ergibt sich für das kreisende Elektron ein magnetisches Moment von

$$p = \mu_0 \frac{e \cdot \hbar}{2m} = \mu_B = 1.16 \cdot 10^{-29} \, Vsm$$

das man auch als Bohr'sches Magneton bezeichnet.

c. Wie groß ist das Magnetfeld, das vom kreisenden Elektron am Ort des Kerns erzeugt wird ?

Lösung:

Das durch das kreisende Elektron erzeugte Magnetfeld am Ort des Kerns ist nach Aufgabe 1b aus Blatt 8 (Magnetfeld in der Symmetrieachse eines Ringleiters über Biot-Savart)

$$B(z=0) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{a^2}{\left(a^2 + (z=0)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2a} = 12.6T$$

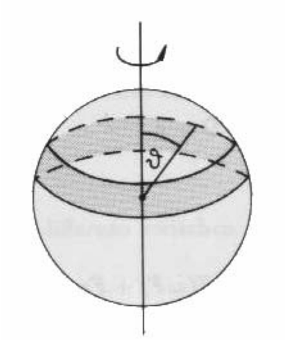
Das Planck'sche Wirkungsquant hat den Wert $h = 2\pi\cdot\hbar = 2\pi\cdot 1.05 \cdot 10^{-34}$ Joule·s, die spezifische Ladung des Elektrons ist $e/m = 1.76 \cdot 10^{11}$ C/kg.

Aufgabe 3. Die Hohlkugel (2+2+4)

Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit dem Radius R sei eine Ladung q gleichmäßig verteilt. Die Kugel rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um einen ihrer Durchmesser.

a. Bestimmen Sie die dadurch erzeugte Stromdichte $\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r})$.

Lösung:



Ladungsdichte: $\rho(r) = \dfrac{q}{4\pi R^2}\delta(r-R).$

Stromdichte: $j(r) = \rho(r)V(r) = \rho(r)(\vec{\omega}\times r).$

Oberfläche: $r = R\,e_r = R(\sin\vartheta\cdot\cos\varphi, \sin\vartheta\cdot\sin\varphi, \cos\vartheta)$

$\vec{\omega} = \omega e_z = \omega(0,0,1)$

$$\Rightarrow e_z \times e_r = (-\sin\vartheta\cdot\sin\varphi, \sin\vartheta\cdot\cos\varphi, 0) = \sin\vartheta\cdot(-\sin\varphi\cdot\cos\varphi, 0) = \sin\vartheta\, e_\varphi$$

Daraus folgt die Stromdichte:

$$j(r) = \frac{\mathrm{q}\,\omega}{4\,\pi R}\sin\vartheta\,\delta(r-R)\,e_\varphi.$$

b. Berechnen Sie das von $\boldsymbol{j}$ hervorgerufene magnetische Moment der Kugel.

Lösung:

Definition: $m = \dfrac{1}{2}\int(r\times j(r))d^3r$

$$(e_r \times e_\varphi) = (-\cos\vartheta\cos\varphi, -\cos\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta) = -e_\vartheta$$

$$\Rightarrow m = \frac{q\omega}{8\pi R}\int_0^\infty dr\, r^3\delta(r-R)\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-1}^{+1} d\cos\vartheta\,(-\sin\vartheta\, e_\vartheta)$$

$$= \frac{1}{4} q\omega R^2 \int_{-1}^{+1} \underbrace{d\cos\vartheta (1-\cos^2\vartheta)(0,0,1)}_{2-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{3} q\omega R^2\, e_x = \frac{1}{3} qR^2 \vec{\omega}.$$

c. Leiten Sie die Komponenten des Vektorpotentials $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ und der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ ab.

Lösung:

Definition:

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{j(r')}{|r-r'|},$$

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{4\pi R^2} \vec{\omega} \times \int d^3r' \delta(r'-R) \frac{r'}{|r-r'|}.$$

Daraus folgt:

$$A(r) = \frac{\mu_0 q}{8\pi R^2} \vec{\omega} \times \int_0^\infty dr' r'^3 \delta(r'-R) \int_{-1}^{+1} dx \frac{x(0,0,1)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} = \frac{\mu_0 qR}{8\pi} (\vec{\omega} \times \underbrace{e_x}_{=e_r}) \int_{-1}^{+1} dx \frac{x}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}},$$

$$I = \int_{-1}^{+1} dx \frac{x}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}} = -\frac{1}{rR} x\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}\Big|_{-1}^{+1} + \frac{1}{rR} \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}$$

$$= -\frac{1}{rR}(|r-R| + |r+R|) + \frac{1}{rR}(-\frac{2}{3}\frac{1}{2rR})(r^2 + R^2 - 2rRx)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{rR}(|r-R| + |r+R|) - \frac{1}{3r^2R^2}(|r-R|^3 - |r+R|^3).$$

<u>$r > R$:</u>

$$I = -\frac{1}{rR}(r - R + r + R) - \frac{1}{3r^2R^2}(r^3 - 3r^2R + 3rR^2 - R^3 - r^3 - 3r^2R - 3rR^2 - R^3)$$
$$= -\frac{2}{R} - \frac{1}{3r^2R^2}(-6r^2R - 2R^3) = +\frac{2R}{3r^2}.$$

<u>$r > R$:</u>

$$I = -\frac{2}{r} - \frac{1}{3r^2R^2}(-6rR^2 - 2r^3) = +\frac{2r}{3R^2}$$

Daraus folgt das Vektorpotential:

$$A(r) = \begin{cases} \mu_0 \dfrac{qR^2}{12\pi r^2}(\vec{\omega} \times e_r), \text{ falls } r > R, \\ \mu_0 \dfrac{qr}{12\pi R}(\vec{\omega} \times e_r), \text{ falls } r < R. \end{cases}$$

Im Außenraum gilt also:

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m \times r}{r^3}.$$

Damit folgt:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3e_r(e_r \cdot m) - m}{r^3}.$$