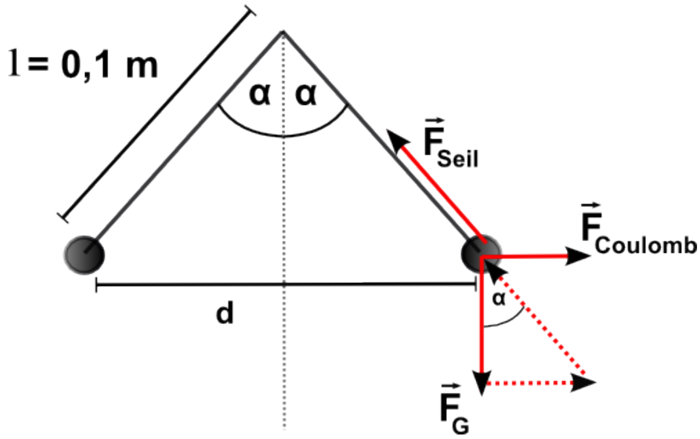
Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik)
Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 1

Aufgabe 1: Elektrostatische Abstoßung

Wir betrachten nun zunächst ein Kräftediagramm der Anordnung. Da sich die Kugeln in Ruhe befindet, müssen alle Kräfte zusammen gleich 0 ergeben (Superpositionsprinzip). Als Kräfte wirken die Gravitationskraft, die Coulombkraft und die Seilzugkraft:



Somit folgt:

$$|\vec{F}_C| = \tan\alpha \cdot |\vec{F}_G| = \tan\alpha \cdot m g$$

$$\rightarrow \ |\vec{F}_C| = 0{,}0038\,N$$

Der Abstand d zwischen den Kugeln wird gegeben durch:

$$d = 2 \cdot \sin\alpha \cdot 0{,}1\,m$$

Somit wird laut dem Coulomb'schen Gesetz die Kraft zwischen den beiden gleich geladenen Kugeln (Ladung q) folgende sein:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q^2}{d^2}$$

Nun müssen wir nur noch nach der Ladung auflösen:

$$q = \sqrt{F_C \cdot 4\pi\epsilon} \cdot d = \sqrt{0{,}0038\,N \cdot 4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\frac{As}{Vm}} \cdot 2 \cdot \sin 37{,}5° \cdot 0{,}1\,m = 7{,}9 \cdot 10^{-8}\,C$$

Aufgabe 2: Rechenübungen zum Nabla-Operator

a) $$grad\ f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \frac{30}{2+x^2+y^2+z^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{30}{2+x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{30}{2+x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{30}{2+x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

Berechne nun zunächst:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{30}{2+x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[30 \cdot (2+x^2+y^2+z^2)^{-1}\right] = \frac{-60\,x}{(2+x^2+y^2+z^2)^2}$$

Mit der y- und z-Komponente geht dies genauso. Somit folgt:

$$grad\ f = -\frac{60}{(2+x^2+y^2+z^2)^2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\frac{60}{(2+r^2)^2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b) Berechne nun zunächst den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\ x\ \vec{r}=\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\ x\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\omega\cdot\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$$

Bilde nun die Divergenz:

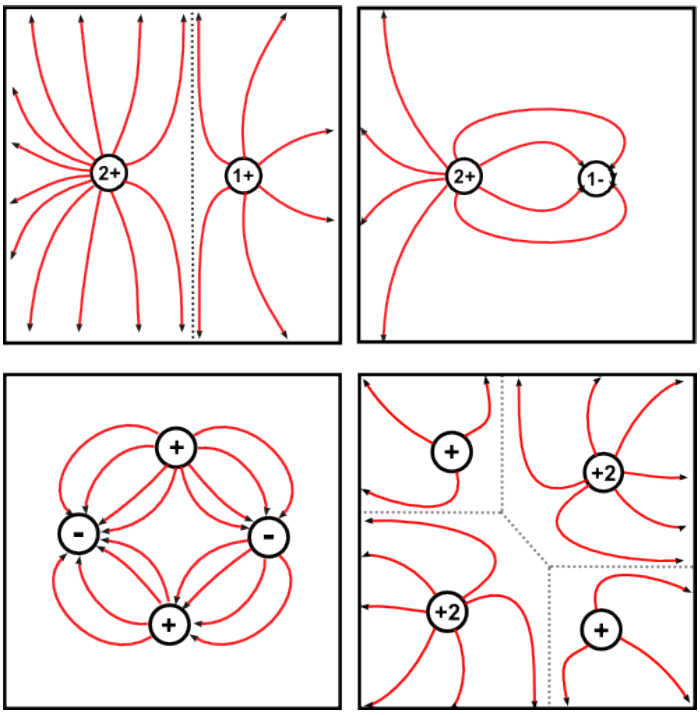
$$\text{div}\,\vec{v}=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{pmatrix}\cdot\omega\cdot\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}=\omega\cdot\left[\frac{\partial(-y)}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial 0}{\partial z}\right]=\omega\cdot[0+0+0]=0$$

Somit ist das Vektorfeld quellenfrei.

c)

$$rot\,\vec{v}=\nabla\ x\ \vec{v}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{pmatrix}\ x\ \omega\cdot\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}=\omega\cdot\begin{pmatrix}\frac{-\partial x}{\partial y}\\\frac{\partial y}{\partial z}\\\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\end{pmatrix}=\omega\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\omega\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Feldlinien



Aufgabe 4: Elektrische Kraft und Gravitationskraft

a) Mit $m_1 = m_2 = m_e$ und $q_1 = q_2 = q_e$ folgt für die Gravitationskraft und Coulombkraft:

$$|F_G| = \left| -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \right| = G \cdot \frac{m_e^2}{r^2} \qquad |F_C| = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \right| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_e^2}{r^2}$$

Mit $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31} kg$, $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$, $\epsilon = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$ und $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$:

$$\rightarrow \frac{|F_C|}{|F_G|} = \frac{1}{4\pi\epsilon G} \cdot \frac{q_e^2}{m_e^2} = 4{,}16 \cdot 10^{42}$$

b) Da in diesem Fall der Betrag beider Kräfte gleich sein müsste, folgt:

$$|F_C| = |F_G|$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q^2}{r^2} = G \frac{m^2}{r^2} \qquad \rightarrow m = \frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon G}} = 1{,}86 \cdot 10^{-9} kg$$

Nun vergleichen wir noch unsere berechnete Masse mit der wirklichen Masse eines Elektrons:

$$\frac{m}{m_{e^-}} = 2{,}065 \cdot 10^{21}$$

Somit müsste das Elektron ungefähr das $2{,}065 \cdot 10^{21}$ - fache seines Gewichtes haben, damit sich Gravitation und elektrische Abstoßung aufheben würden.

c) Hier muss nun erneut die Gravitationskraft gleich der Coulombkraft sein:

$$|F_C| = |F_G| \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q^2}{r^2} = G \frac{m^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad q = \sqrt{4\pi\epsilon G} \cdot m = 8{,}6 \cdot 10^{-10} C$$

Nun benötigen wir die Anzahl der Elektronen, die nötig sind, um diese Ladung zu erzeugen:

$$n(e^-) = \frac{q}{q_{e^-}} = 5{,}4 \cdot 10^9$$

Nun müssen wir wissen, wie viele Bleiatome in 10 kg Blei enthalten sind. Dazu nutzen wir die molare Masse M (Pb) und die Avogadrokonstante N_A .

$$n(Pb-Atome) = \frac{m(Pb)}{M(Pb)} = \frac{10.000\, g}{207{,}2\, g/mol} = 48{,}26\, mol$$

$$\rightarrow \; Anzahl\ der\ Pb-Atome = n(Pb-Atome) \cdot N_A = 48{,}26\, mol \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1} = 2{,}9 \cdot 10^{25}$$

Somit folgt für das Verhältnis von Bleiatomen zu zusätzlichen Elektronen (bzw. Ladungen):

$$\frac{\mathit{Anzahl}\ \text{Pb-Atome}}{\mathit{Anzahl}\ \text{e}^-} = 5{,}4 \cdot 10^{15}$$

Somit kommt auf jedes $5{,}4 \cdot 10^{15} - te$ Bleiatom eine zusätzliche negative Elementarladung e.