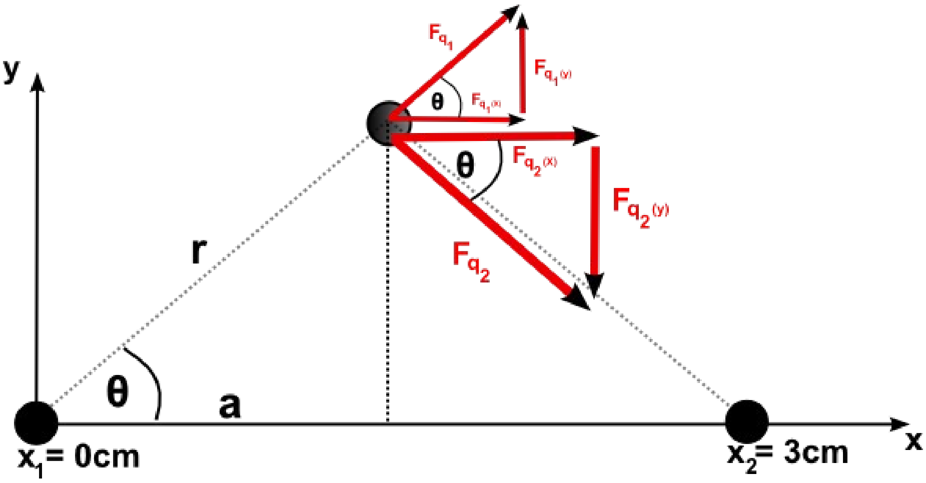
Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik)
Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 5: Punktladungen und Kräfte

a) (i) Zunächst betrachten wir uns eine Skizze des Aufbaus unseres Problems.



Nun sehen wir hieraus:

$$a=\frac{x_2-x_1}{2}=1{,}5\,cm \qquad \rightarrow y=\sqrt{r^2-a^2}=\sqrt{(2{,}5\,cm)^2-(1{,}5\,cm)^2}=\sqrt{4\,cm^2}=2\,cm$$

Damit folgt für den Vektor $\vec{r}_3=\begin{pmatrix}0{,}015\,m\\0{,}02\,m\end{pmatrix}$.

Damit folgt für die Kraft $\vec{F}_{13}$:

$$\vec{F}_{13}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_3}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|}$$

$$=\frac{q_1q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\begin{pmatrix}0{,}015\,m\\0{,}02\,m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0{,}015\,m\\0{,}02\,m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right|^3}=4{,}5\cdot10^{-9}\frac{\begin{pmatrix}1{,}5\\2\end{pmatrix}\cdot10^{-2}}{(0{,}025)^3}N=\begin{pmatrix}4{,}32\\5{,}76\end{pmatrix}\cdot10^{-6}N$$

Und für die Kraft $\vec{F}_{23}$:

$$\vec{F}_{23}=\frac{q_2q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3}=\frac{q_2q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\begin{pmatrix}0{,}015\,m\\0{,}02\,m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\text{m}\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0{,}015\,m\\0{,}02\,m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\text{m}\\0\end{pmatrix}\right|^3}=\begin{pmatrix}1{,}73\\-2{,}3\end{pmatrix}\cdot10^{-5}N$$

Für die Gesamtkraft gilt wegen des Superpositionsprinzips:

$$\vec{F}_{Ges}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{23}=\begin{pmatrix}2{,}162\\-1{,}724\end{pmatrix}\cdot 10^{-5}N$$

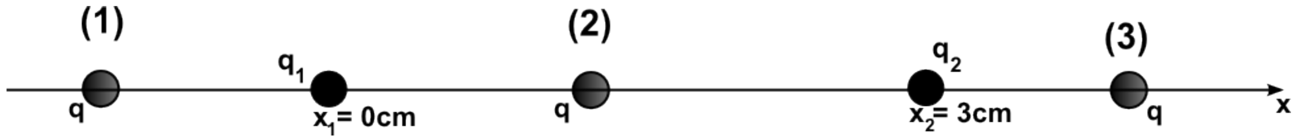
(ii) Nun haben wir andere Ladungen mit $q_1=q_2=10^{-9}C$:

$$\vec{F}_{13}=\frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3}=\begin{pmatrix}4{,}32\\5{,}76\end{pmatrix}\cdot 10^{-6}N$$

$$\vec{F}_{23}=\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3}=\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\begin{pmatrix}0{,}015m\\0{,}02m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\text{m}\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0{,}015m\\0{,}02m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\text{m}\\0\end{pmatrix}\right|^3}=\frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0}\frac{\begin{pmatrix}-0{,}015\\0{,}02m\end{pmatrix}}{(0{,}025\,m)^3}=\begin{pmatrix}-4{,}32\\5{,}76\end{pmatrix}\cdot 10^{-6}N$$

$$\rightarrow\vec{F}_{Ges}=1{,}152\cdot 10^{-5}\cdot\vec{e}_y$$

b) Wir betrachten zunächst die Skizze. Ich benutze nun $q=q_3$ und $x=x_3$:



Nun folgt aus dem Coulomb'schen Gesetz und dem Superpositionsprinzip:

$$\vec{F}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x-x_1}{|x-x_1|^3}+\frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x-x_2}{|x-x_2|^3}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3}-\frac{4q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x-3}{|x-3|^3}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|^3}-4\frac{x-3}{|x-3|^3}\right)$$

1.Fall: x<0 $\rightarrow|x|=-x$ $\rightarrow|x-3|=-(x-3)=3-x$

$$\rightarrow\vec{F}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|^3}-4\frac{x-3}{|x-3|^3}\right)=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{(-x)^3}-4\frac{x-3}{(3-x)^3}\right)=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{(x)^2}+4\frac{1}{(x-3)^2}\right)$$

$$\rightarrow\vec{F}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3\text{x}^2+6\text{x}-9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)=4{,}5\cdot 10^{-9}N\cdot cm^2\cdot\left(\frac{3\text{x}^2+6\text{x}-9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)=4{,}5\cdot 10^{-5}N\cdot m^2\cdot\left(\frac{3\text{x}^2+6\text{x}-9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)$$

2.Fall 0<x<3: $\rightarrow|x|=x$ $\rightarrow|x-3|=-(x-3)=3-x$

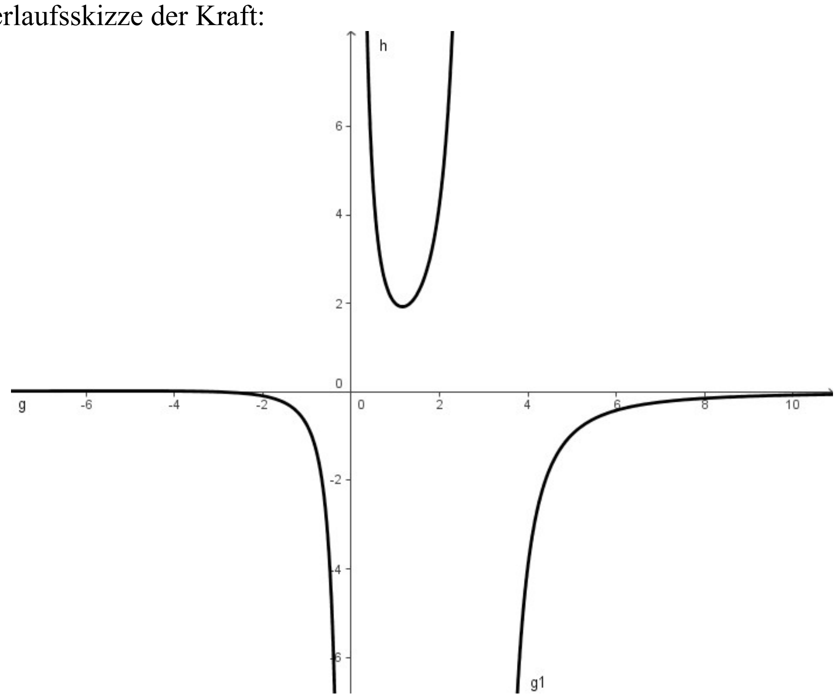
$$\rightarrow\vec{F}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|^3}-4\frac{x-3}{|x-3|^3}\right)=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{(x)^3}-4\frac{x-3}{(3-x)^3}\right)=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(x)^2}+4\frac{1}{(x-3)^2}\right)$$

$$\rightarrow\vec{F}=4{,}5\cdot 10^{-5}N\cdot m^2\cdot\left(\frac{5\text{x}^2-6\text{x}+9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)$$

3.Fall: $\rightarrow|x|=x$ $\rightarrow|x-3|=3-x$

$$\rightarrow\vec{F}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(x)^2}-\frac{4}{(x-3)^2}\right)=4{,}5\cdot 10^{-5}N\cdot m^2\cdot\left(\frac{-3\text{x}^2-6\text{x}+9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)$$

Daraus folgt als Verlaufsskizze der Kraft:



Nun müssen wir noch betrachten, ob wir irgendwo eine Nullstelle haben, sodass die resultierenden Kräfte 0 sind. Betrachten wir nun das Intervall $(-\infty,0)$:

$$\rightarrow \vec{F}=0=4{,}5\cdot 10^{-7}\frac{N}{m}\cdot\left(\frac{3x^2+6x-9}{x^4-6x^3+9x^2}\right) \qquad \rightarrow 0=3x^2+6x-9 \Leftrightarrow 0=x^2+2x-3$$

$$\rightarrow x_1/x_2=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=-1\pm 2 \qquad \rightarrow x_1=-3\in(-\infty,0)$$

$$\rightarrow x_2=1\notin(-\infty,0)$$

Aus der Skizze können wir schon einmal ausschließen, dass im Intervall (0,3) keine Nullstellen zu finden sind. Alternativ kann man auch rechnen wie schon im 1. Fall, man bekommt aber keine reele Lösung.

Für den 3. Fall folgt:

$$\rightarrow \vec{F}=0=4{,}5\cdot 10^{-7}\frac{N}{m}\cdot\left(\frac{-3x^2-6x+9}{x^4-6x^3+9x^2}\right) \qquad \rightarrow 0=-3x^2-6x+9 \Leftrightarrow 0=-x^2-2x+3$$

$$\rightarrow x_1/x_2=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=-1\pm 2 \qquad x_1=-3,\ x_2=1\notin(3,\infty)$$

Damit gibt es nur einen Punkt, an dem keine Kräft auf die Probeladung wirken, und zwar bei $x=-3$.

(ii) Nun haben wir die Ladungen $q_1=q_2$ und damit folgende resultierende Kraft:

$$\vec{F}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x-x_1}{|x-x_1|^3}+\frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x-x_2}{|x-x_2|^3}=\frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x-x_1}{|x-x_1|^3}+\frac{x-x_2}{|x-x_2|^3}\right)$$

Für die obigen Fallunterscheidungen bekommen wir nun folgende Kräfte:

1.) x<0:

$$\vec{F}=4{,}5\cdot 10^{-5}\,N\,m^2\cdot\left(\frac{-2x^2+6x-9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)$$

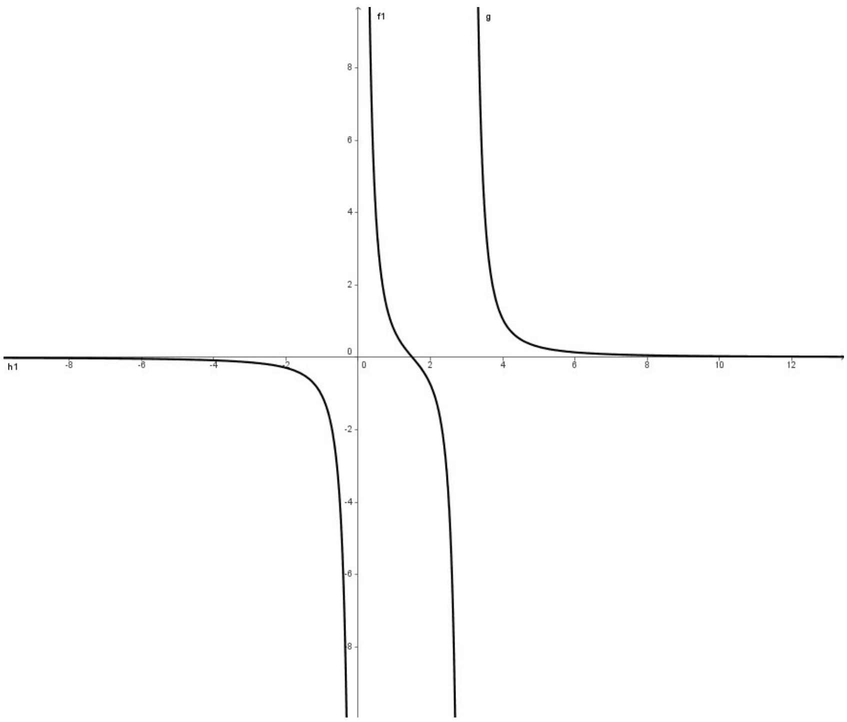
2.) 0<x<3:

$$\vec{F}=4{,}5\cdot 10^{-5}\,N\,m^2\cdot\left(\frac{-6x+9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)$$

3.) x>3:

$$\vec{F}=4{,}5\cdot 10^{-5}\,N\,m^2\cdot\left(\frac{2x^2-6x+9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)$$

Daraus folgt als Verlaufsskizze:



Nun kann man wieder die Nullstellen über die abc-Formel berechnen. Es existiert nur einer zwischen 0 und 3 bei:

$$\vec{F}=4{,}5\cdot 10^{-5}\,N\,m^2\cdot\left(\frac{-6x+9}{x^4-6x^3+9x^2}\right)=0$$

$$\rightarrow 0=-6x+9 \qquad \rightarrow\ x=1{,}5$$

A6: Potential eines Punktladungssystems, Potentialdifferenz (Spannung)

Weil für die Kräft der elektrischen Kraft das Superpositionsprinzip gilt, muss dieses auch für das Potential

$$V=-\int_{x_1}^{x_2} F\,dr \qquad \text{gelten.}$$

Daraus folgt, dass das Gesamtpotential die Summe aller Teilpotentiale ist:

$$V=V_{q_1}+V_{q_2}+V_{q_3}=\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1}+\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}+\frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3}$$

Punkt 1:
Aus der Skizze ist nun ersichtlich, dass $r_1=r_3=a=0{,}04\,m$ und $r_2=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{0{,}0032}\,m\approx 0{,}056\,m$:

$$\rightarrow V=\frac{100\cdot 10^{-12}\,C}{4\pi\epsilon_0 0{,}04\,m}+\frac{-200\cdot 10^{-12}\,C}{4\pi\epsilon_0\sqrt{0{,}0032}\,m}+\frac{300\cdot 10^{-12}\,C}{4\pi\epsilon_0 0{,}04\,m}=58{,}127\,V$$

Punkt 2:
Hier gilt einfach: $r_1=r_2=r_3=\sqrt{0{,}02^2+0{,}02^2}\,m=\sqrt{0{,}0008}\,m\approx 0{,}028\,m$.

$$\rightarrow V=\frac{(100-200+300)\cdot 10^{-12}\,C}{4\pi\epsilon_0\sqrt{0{,}0008}\,m}=63{,}582\,V$$

Daraus folgt als Potentialdifferenz/Spannung U:

$$U=\Delta V=63{,}582\,V-58{,}127\,V=5{,}455\,V$$

A7: Eine einfache Ladungsverteilung

Wir müssen nun ein Ladungsvolumen integrieren. Dabei gilt:

$$Q=\int dQ=\int_V \rho(x,y,z)\,dV$$

Das Volumenelement eines Würfels wird trivial mit $dV=dx\,dy\,dz$ beschrieben. Nun integrieren wir den Würfel von einer Würfelseite aus dann natürlich von 0 bis zur Kantenlänge a:

$$\begin{aligned}\rightarrow Q&=\int_0^a\int_0^a\int_0^a \rho_0\cdot(2x^2+4yz-3xz)\,dx\,dy\,dz\\&=\rho_0\int_0^a\int_0^a\left[\frac{2}{3}x^3+4xyz-\frac{3}{2}x^2z\right]_0^a dy\,dz=\rho_0\int_0^a\int_0^a\left(\frac{2}{3}a^3+4ayz-\frac{3}{2}a^2z\right)dy\,dz\\&=\rho_0\int_0^a\left[\frac{2}{3}a^3y+2ay^2z-\frac{3}{2}a^2yz\right]_0^a dz=\rho_0\int_0^a\left(\frac{2}{3}a^4+2a^3z-\frac{3}{2}a^3z\right)dz\\&=\rho_0\left[\frac{2}{3}a^4z+a^3z^2-\frac{3}{4}a^3z^2\right]_0^a=\rho_0\cdot\left(\frac{2}{3}+1-\frac{3}{4}\right)\cdot a^5=\rho_0\frac{11}{12}a^5\end{aligned}$$

A8: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Hier müssen wir nun dasselbe machen wie in A7, jedoch integrieren wir über ein Kugelvolumen. Praktischerweise ist uns das dV und die Integralsgrenzen schon angegeben sind, sodass wir uns darüber keine Gedanken mehr machen müssen (vorne im Repetitorium sind im Übrigen viele Volumenelemente, wenn man sich damit mal mehr beschäftigen will).

$$\rightarrow Q = \int_V \rho(r)\, dV = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k \cdot \frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{r^2} r^2 \sin\theta \;\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= k \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} dr \int_0^\pi \sin\theta \;\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = k \cdot \left[-\frac{a}{2} e^{-\frac{2r}{a}} \right]_0^\infty [-\cos\theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi}$$

$$= k \cdot \left[\frac{a}{2} \right] [2][2\pi] = 2\pi\, k\, a$$