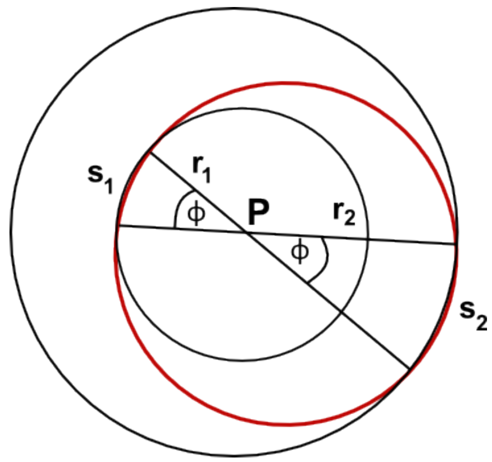
Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik)
Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 4

Aufgabe 13: Feldstärke im Innern eines Ladungsringes

a) Betrachten wir nun zunächst mal die Längen s_1 und s_2. Diese können durch eine Approximation ausgedrückt werden durch r_1, r_2, ϕ.

Es ist nun nämlich so, dass in einem Kreis mit dem Radius r und dem Winkel ϕ die Strecke s des Kreisausschnitts gegeben ist durch:



$$s=\phi\cdot r$$

Da wir hier nun keinen „wirklichen“ Kreis haben, sondern nur ungefähr, müssen wir eine kleine Annäherung durchführen, die jedoch ziemlich gut ist, wie wir in der Skizze nebenan sehen. Daraus folgt für unsere beiden Strecken s_1 und s_2:

$$s_1=\phi\cdot r_1$$

$$s_2=\phi\cdot r_2$$

Die Ladung beträgt aus der Definition der Linienladungsdichte:

$$\lambda=\frac{q}{s} \qquad \rightarrow \quad q=\lambda\cdot s$$

Damit folgt für die Ladungen der beiden Kreisausschnitte:

$$q_1=\lambda\,\phi\,r_1 \qquad\qquad q_2=\lambda\,\phi\,r_2$$

Zunächst betrachten wir nur das Feld, das die Ladung auf dem Kreissegment s_1 hervorruft. Da die Ladungen ja für jeden Kreisausschnitt (näherungsweise) in einem Kreis um den Punkt P angeordnet sind, kann man die Kraft durch eine Punktladung im Abstand r_1 ausdrücken:

$$\rightarrow\ F_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,q_1}{r_1^2} \qquad \rightarrow\ E_1=\frac{F_1}{Q}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\phi\,r_1}{r_1^2}=\frac{\lambda\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_1}$$

Genau analog funktioniert dies auch mit E_2:

$$\rightarrow\ E_2=\frac{\lambda\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_2}$$

Betrachten wir nun das Verhältnis von E_1 zu E_2:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{r_2}{r_1}>1$$

Damit erzeugt die Ladung von s_1 das stärkere Feld.

b) Für die Ladungen q_1 und q_2 gilt immer noch dasselbe wie in der Aufgabe a). Wir müssen nun nur unsere Kraft F entsprechend anpassen:

$$F=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r} \qquad \rightarrow E=\frac{F}{Q}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

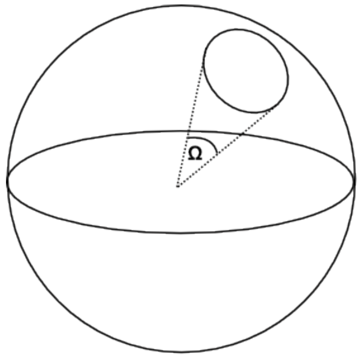
Jetzt setzen wir wieder unsere Ladungen in E ein und die entsprechenden r :

$$\rightarrow E_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1}=\frac{\lambda\phi}{4\pi\epsilon_0} \qquad \rightarrow E_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2}=\frac{\lambda\phi}{4\pi\epsilon_0}$$

Damit erzeugen beide Ladungen dieselbe Feldstärke.

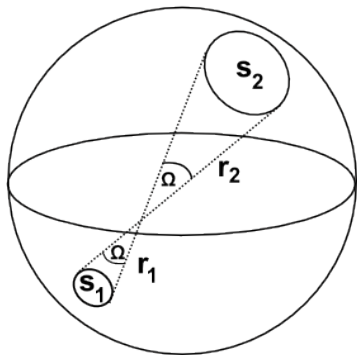
c) Betrachten wir nun statt eines Kreisausschnitts einen Kugelausschnitt. Dieser ist durch einen Öffnungswinkel Ω gegeben. Dieser hat folgende Beziehungen:

$$\frac{\Omega}{4\pi}=\frac{s}{4\pi r^2} \qquad \textbf{(I)}$$



Wobei Ω der entsprechende Raumwinkel des Kugelsegments ist, 4π der „volle“ Raumwinkel, s die Fläche des Kugelsegments und $4\pi r^2$ die gesamte Oberfläche der Kugel gibt.

Wenn wir uns nun wieder unser spezielles Problem anschauen, können wir wie schon in der a) eine sehr gute Approximation durch eine Kugel machen, sodass die Relation **(I)** gilt. Damit folgt für unsere Kugelsegmente:



$$\frac{\Omega}{4\pi}=\frac{s}{4\pi r^2} \qquad \rightarrow s=\Omega r^2$$

$$\rightarrow \quad s_1=\Omega r_1^2$$

$$\rightarrow \quad s_2=\Omega r_2^2$$

Mit der Flächenladungsdichte $\sigma=\frac{q}{s}$ folgt:

$$q_1=\sigma\cdot s_1 \qquad q_2=\sigma\cdot s_2$$

Wenn wir nun das elektrische Feld im $\frac{1}{r^2}-\text{Potential}$ betrachten:

$$E_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\cdot s_1}{r_1^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\cdot\Omega r_1^2}{r_1^2}=\frac{\sigma\Omega}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\cdot s_2}{r_2^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\cdot\Omega r_2^2}{r_2^2}=\frac{\sigma\Omega}{4\pi\epsilon_0}$$

Damit erzeugen beide Kugelausschnitte dasselbe elektrische Feld.

Wenn wir das ganze nun analog mit einem $\frac{1}{r} - \text{Potential}$ machen, bekommen wir:

$$E_1 = \frac{\sigma \Omega}{4\pi \epsilon_0} r_1 \qquad E_2 = \frac{\sigma \Omega}{4\pi \epsilon_0} r_2$$

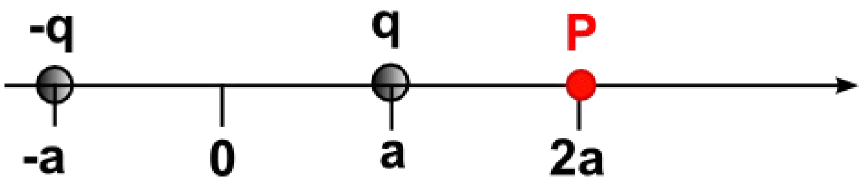
Betrachten wir nun das Verhältnis von E_1 zu E_2 :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1}{r_2} < 1$$

Damit erzeugt die Ladung von s_2 das stärkere Feld.

A 14: Superposition und Gauß'scher Satz

a) Da wir das elektrische Feld durch Superposition berechnen sollen, berechnen wir die elektrischen Felder der beiden Ladungen $q_1 = q$ und $q_2 = -q$. Da wir ein eindimensionales Problem haben, müssen wir nicht mit Vektoren arbeiten:



Es gilt:

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Damit folgt für unsere elektrischen Felder E_1 und E_2 :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{(2a - a)^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{a^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-q)}{(2a - (-a))^2} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{9a^2}$$

Über das Superpositionsprinzip folgt somit:

$$E_{Ges} = E_1 + E_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 a^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{2}{9} \frac{q}{\pi \epsilon_0 a^2}$$

b) Der Gaußsche Satz besagt folgendes:

$$\phi = lin\, E\, dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

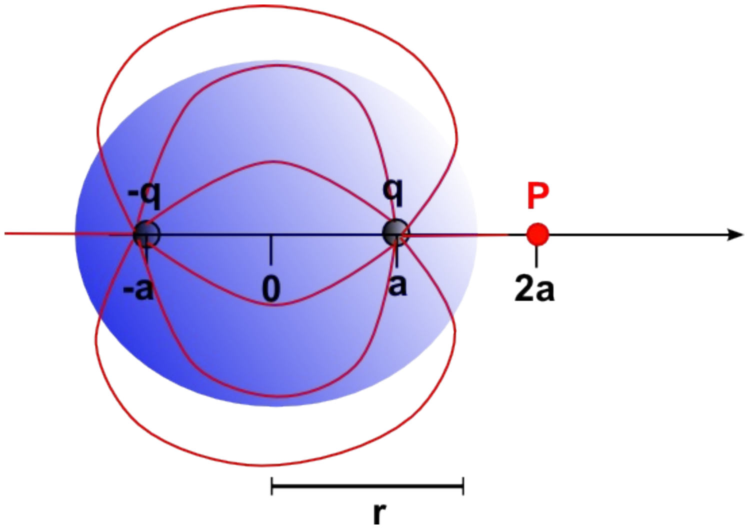
(Herleitung steht sehr gut in der Vorlesung)

Mit dem Flächenelement $dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ und $E(r)$ nicht abhängig von θ, ϕ kann man das elektrische Feld aus dem Integral rausziehen:

$$\rightarrow \quad \phi = \underbrace{E \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}_{=4\pi r^2} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{E_0}$$

Hierbei ist Q die von die von der „Gauß'schen Oberfläche“ umhüllt ist. Diese ist nun aber in diesem Fall 0, da:

$$Q=q_1+q_2=q-q=0$$



Dies erscheint auch logisch, da dies ein Dipol ist und jede Feldlinie die aus der Kugel austritt auch wieder eintritt und damit ist der Fluss:

$$\phi=\frac{Q}{\epsilon_0}=0$$

Daraus folgt jedoch auch:

$$\phi=E\cdot 4\pi r^2=0$$

Und damit, da r eine Variable mit $r\neq 0$:

$$\rightarrow \quad E=0$$

c) Wir können dieses elektrische Feld nicht über den Gauß'schen Satz berechnen, da wir keine zum Radius r symmetrische und homogene Ladungsverteilung haben, sondern einen Dipol (siehe obere Skizze). Daher ist der Fluss erstens automatisch 0 und zweitens sind gilt für die Feldlinien, die aus der Gauß'schen Oberfläche heraustreten nicht:

$\vec{E}\|\vec{dA}$ Damit kann man hier das elektrische Feld nicht durch den Gauß'schen Satz berechnen.

Der Gauß'sche Satz macht zum Beispiel Sinn, wenn man die Feldstärken beider Kugelladungen zunächst einzeln berechnet und dann über das Superpositionsprinzip die Gesamtfeldstärke berechnet. Dann kommt man wieder auf:

$$E_{Ges}=E_1+E_2=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{9}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}=\frac{2}{9}\frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2}$$

A15: Ladungsverteilungen, E-Felder und Potentiale

a) Da wir hier wieder eine symmetrische Ladungsverteilung haben, können wir wieder mit dem Gauß'schen Satz arbeiten. Hier noch mal eine kurze Herleitung:

$$\phi=\vec{E}\cdot\vec{A}=E\cdot A \qquad \text{falls } \vec{E}\|\vec{A}$$

Anmerkung: Der Vektor $\vec{A}$ bzw. $\vec{dA}$ wird senkrecht zur wirklichen Oberfläche definiert, ähnlich dem Drehimpuls, der ja auch nicht in die Richtung der „Geschwindigkeitsfläche“, sondern senkrecht darauf steht.

Somit folgt für ϕ einer zu r symmetrischen und homogenen Ladungsverteilung:

$$\phi=\int_O E(r)\,dA$$

Wobei wir in der Vorlesung gezeigt haben, dass es egal ist, über welche Oberfläche wir integrieren. Also integrieren wir über eine Kreisoberfläche. Damit folgt $dA=r^2\sin\theta\, d\theta\, d\rho$.

$$\phi=\int_O E(r)\,dA=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} E(r)r^2\sin\theta\, d\theta\, d\rho=E(r)r^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\rho=E(r)4\pi r^2$$

Wenn wir nun eine zu r symmetrische Ladungsverteilung haben, ist es ähnlich oder wie eine Punktladung und es gilt für $E(r)$ das Coulomb'sche Gesetz:

$$\rightarrow\phi=E(r)4\pi r^2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}4\pi r^2=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

Nun zu unserem konkreten Problem. Wir haben $Q=4\pi R^2\sigma$. Einsetzen in unser Gauß'sches Gesetz:

$$\phi=E(r)4\pi r^2=\frac{Q}{\epsilon_0}=\frac{4\pi R^2\sigma}{\epsilon_0}\qquad\rightarrow E(r)=\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

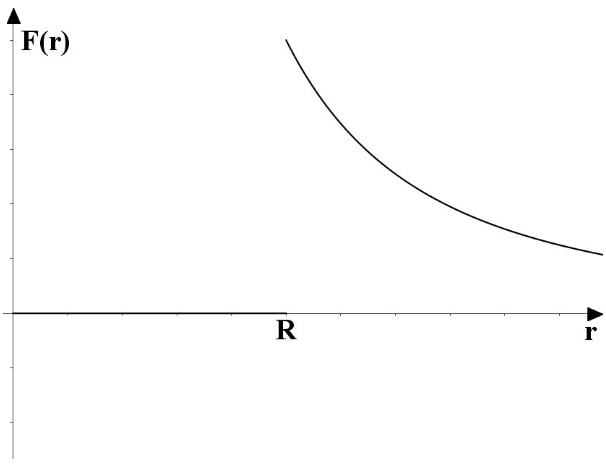
Auf dieses Ergebnis wäre man jedoch auch einfach über einsetzen von Q in das Coulomb'sche Gesetz gekommen.

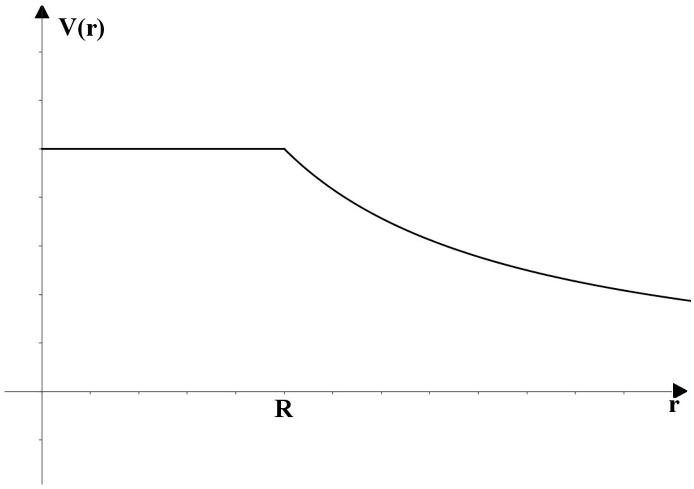
Jedenfalls folgt darauf für das Potential V :

$$V=\int_r^{\infty} E(r')\,dr'=\left[-\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}=\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Diese Felsstärken und Potentiale gelten jedoch nur für $r>R$, da für $r<R$ keine Ladung von der Gauß'schen Oberfläche umschlossen wäre und damit $\phi=E(r)=0$ und $V=\int E(r)\,dr=konst.$ wäre. Die Konstante von $V(r)$ für $r<R$ ist genau das Potential an der Stelle $V(R)$, da das Potential stetig sein muss, also $V(R)=\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0}\frac{1}{R}=\frac{R\sigma}{\epsilon_0}$.

<u>Der Verlauf von Feldstärke und Potential in der Skizze:</u>





b) Für $r \geq R$ nutzen wir einfach das Coulomb'sche Gesetz:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2} = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad \rightarrow \; V = \int_r^\infty E\,dr = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Nun könnten wir noch betrachten was passiert, wenn $r < R$ ist. Der Gauß'sche Satz besagt, das wenn Q die von der Gauß'schen (Kugel-)Oberfläche umhüllte Ladung ist, die Feldstärke gegeben ist durch:

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(I)}$$

Dies ist wie man sieht äquivalent zum Coulomb'schen Gesetz. Nun ist die Ladung $Q(r)$ innerhalb der Kugel abhängig von r, wobei gilt:

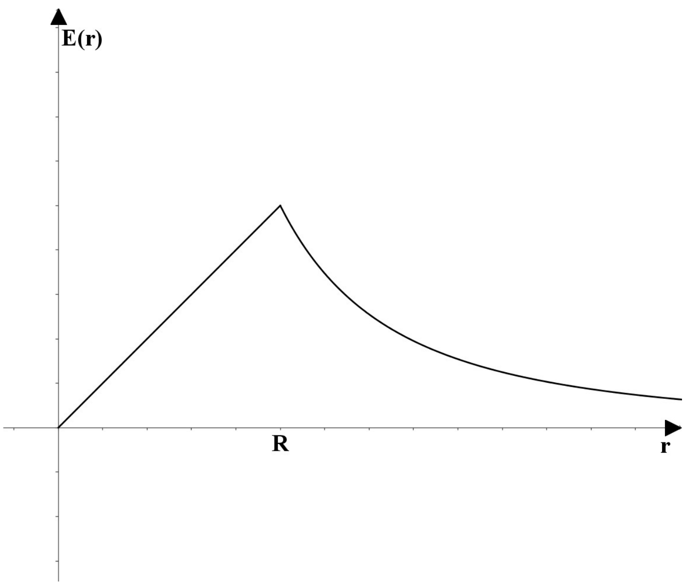
$$\frac{Q(r)}{Q(Ges)} = \frac{V(r)}{V(Ges)} \qquad \begin{array}{l} Q: Ladung \\ V: Volumen \end{array}$$

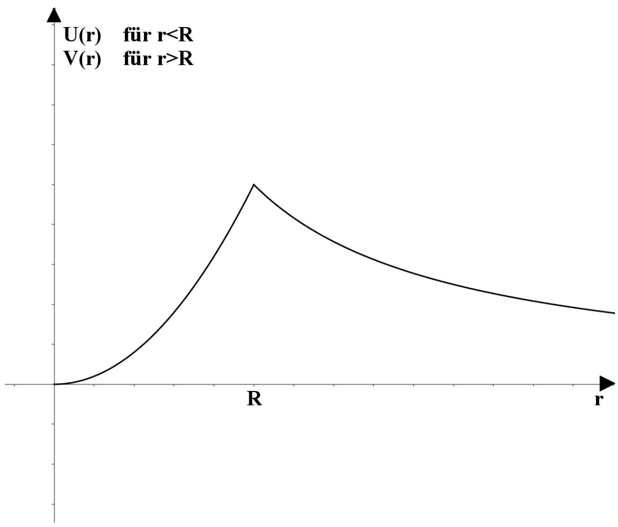
$$\Leftrightarrow \; Q(r) = \frac{V(r)\cdot Q(Ges)}{V(Ges)} = \frac{4/3\pi r^3 \cdot 4/3\pi R^3 \rho}{4/3\pi R^3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Einsetzen von $Q(r)$ in Gleichung **(I)** gibt uns:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q\frac{(r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4/3\pi r^3 \rho}{r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad .$$

Somit würde unser Potential natürlich $\sim r^2$ sein. Da das Potential nun aber divergieren würde, setzt man normalerweise ein Standardpotential (z.B. bei R und berechnet dann den Potentialunterschied, auch Spannung U .





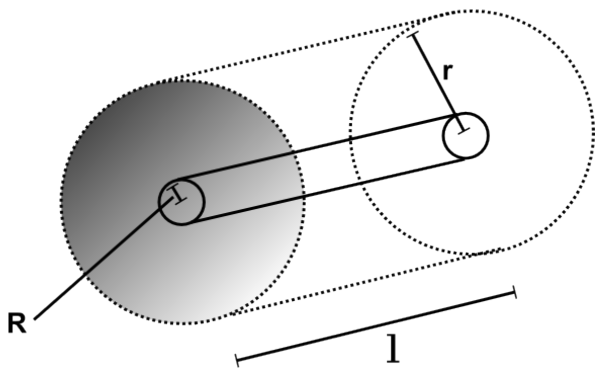
c) Für diese Aufgabe benötigen wir nun zwingend das Gauß'sche Gesetz [wie schon erwähnt hätte man die a) und b) auch mit Coulomb rechnen können], den nun handelt es sich nicht mehr um eine Punktladung.

Wie wir ja in der Vorlesung gezeigt haben, gilt der Gauß'sche Satz (falls wir wie hier eine zum Abstand r symmetrische Ladungsverteilung haben) für jede beliebige Oberfläche:

$$\phi=\int_O E(r)\,dA$$

Da wir hier einen Stab, also einen Zylinder haben, empfiehlt es sich, hier über einen Zylinder zu integrieren. Für einen Zylinder gilt folgendes Flächenelement:

$$dA=2\pi r\,dl$$



Damit folgt:

$$\phi=\int_O E(r)\,dA=\int_0^l E(r)2\pi r\,dl=2E(r)\pi r l=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow\ E(r)=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}\qquad \textbf{(I)}$$

Die Linienladungsdichte ist $\lambda=\pi R^2\rho$. Damit entspricht die Ladung Q :

$$Q=\lambda\cdot l=\pi R^2\rho\cdot l$$

Einsetzen in den Fluss (Gleichung **(I)**):

$$\rightarrow\ E(r)=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}=\frac{R^2\rho}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Für das Potential folgt dann:

$$V=\int_r^\infty E(r')\,dr'=\left[\frac{R^2\rho}{2\epsilon_0}\ln(r)\right]_r^\infty\ \rightarrow\ divergent$$

Nun wir das Potential anders definiert. Wir nehmen uns ein „Standardpotential“ an der Stelle $r=R$ und geben das Potential bezüglich dieses Punktes als Potentialdifferenz (Spannung U) an:

$$U\overset{\text{def}}{=}V(R)-V(r)=\frac{R^2\rho}{2\epsilon}\cdot\left[\int_R^\infty\frac{1}{r}-\int_r^\infty\frac{1}{r}\right]=\frac{R^2\rho}{2\epsilon}[\ln r-\ln R]=\frac{R^2\rho}{2\epsilon}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Für $r<R$ müssen wir nun wieder schauen, wie man die von der Gauß'schen Fläche umschlossene Ladung in Abhängigkeit von r beschreiben kann. Es gilt nun wieder:

$$\frac{Q(r)}{Q(Ges)}=\frac{V(r)}{V(Ges)}\qquad \begin{array}{l} Q: Ladung\\ V: Volumen\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\ Q(r)=\frac{V(r)\cdot Q(Ges)}{V(Ges)}=\frac{\pi r^2 l\cdot\pi R^2\rho l}{\pi R^2 l}=\pi r^2 l\rho$$

Erneutes einsetzen in unsere Gleichung **(I)**:

$$\rightarrow \; E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} = \frac{\pi r^2 l \rho}{2\pi\epsilon_0 r l} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r$$

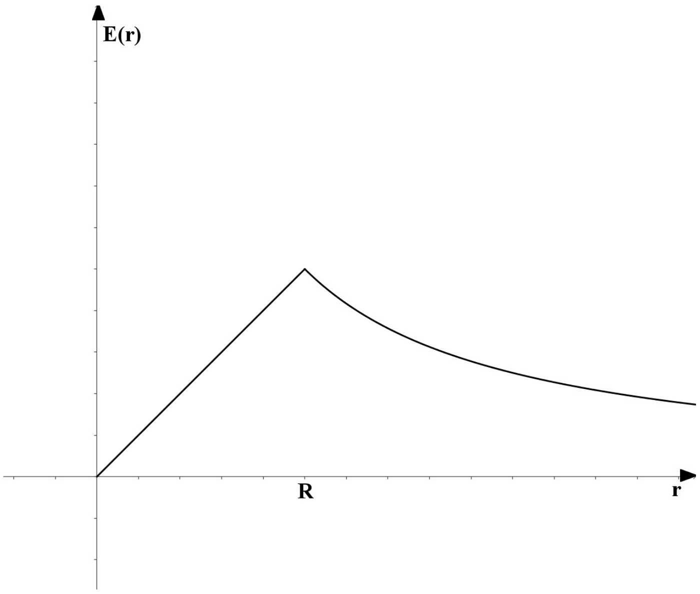
Für das Potential gilt dann:

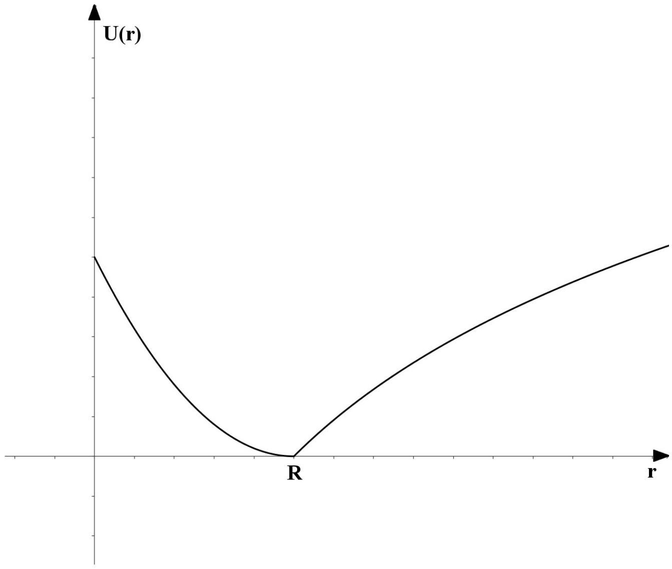
$$V(r) = \int_r^\infty \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r \;\rightarrow\; divergent$$

Also definieren wir wieder den Potentialunterschied $U(r)$:

$$U(r) = V(R) - V(r) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot (r^2 - R^2)$$

Damit folgt für die Verlaufsskizzen $E(r)$ und $U(r)$:



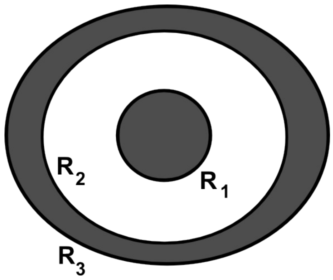


d) Hier haben wir zunächst wieder ein Kabel wie bei der c), nur dass es von einem dünnen geladenen Hohlzylinder umgeben ist. In diesem geladenen Hohlzylinder hat dieser keinen Einfluss, da es sich um eine symmetrische Ladungsverteilung handelt und die äußere Ladung darauf keinen Einfluss nimmt (Gauß'scher Satz). Daher verläuft die Feldstärke und die Spannung wie in der Aufgabe c).

Nun betrachten wir was passiert, wenn r im Bereich des äußeren Hohlzylinders ist, also $R_2 < r < R_3$. Die Ladung Q_2 des umschlossenen Außenzylinders ist wieder gegeben durch:

$$\frac{Q_2(r)}{Q(Ges)} = \frac{V(r)}{V(Ges)} \qquad \begin{matrix} Q: Ladung \\ V: Volumen \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \; Q(r)_2 = \frac{V(r) \cdot Q(Ges)}{V(Ges)}$$



Wobei das Volumen eines Hohlzylinders mit inneren Radius R_2 und äußeren Radius r gegeben ist durch:

$$V(r)=\pi l\cdot(r^2-R_2^2) \rightarrow V(Ges)=\pi l\cdot(R_3^2-R_2^2) \rightarrow Q(Ges)=-\pi l\cdot(R_3^2-R_2^2)\cdot\lambda$$

Einsetzen bringt uns:

$$Q_2(r)=-\pi l\lambda(r^2-R_2^2)$$

Damit folgt für die Gesamtladung im inneren der „Gauß'schen Zylinderoberfläche“ in Abhängigkeit vom Radius r :

$$Q(r)=Q_1(r)+Q_2(r)=\pi l\lambda R_1^2-\pi l\lambda(r^2-R_2^2)=\pi l\lambda\cdot(R_1^2+R_2^2)-\pi l\lambda\cdot r^2$$

Mit dem Gauß'schen Satz (für Zylinderoberfläche hergeleitet in c))folgt damit:

$$\rightarrow E(r)=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}=\underbrace{\frac{\pi l\lambda\cdot(R_1^2+R_2^2)}{2\pi\epsilon_0 r l}}_{K}-\frac{\pi l\lambda\cdot r^2}{2\pi\epsilon_0 r l}=K-\frac{\lambda}{2\epsilon_0}r \sim -r$$

Nun berechnen wir wieder die Spannung (in Relation zu R_1 also dem inneren Radius, da wir ein stetiges Potential haben wollen und damit einen allgemeinen Bezugspunkt. Wir haben schon in der c) den Radius des inneren Zylinders als Standardpotential genutzt):

$$\rightarrow U(r)=\int_r^{R_1} E(r)=K\cdot(R_1-r)\frac{\lambda}{4\epsilon_0}(R_1^2-r^2)$$

Wobei die Ladung für $r\geq R_3$ 0 ist, da nun beide Ladungen, die entgegengesetzt gleich sind umschlossen sind. Damit ist die wirkende Kraft für $r\geq R_3$ gleich 0 und das Potential konstant.