Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik)
Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 5

Aufgabe 16: Gewitterwolken (Einzeiler)

a) Wir haben nun wieder eine homogene Kugelladungsverteilung. Über den Gauß'schen Satz bekommen wir:

$$\phi=\oint_O E(r)\,dA=E(r)4\pi r^2=\frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \rightarrow\ E(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Damit folgt für die Feldstärken

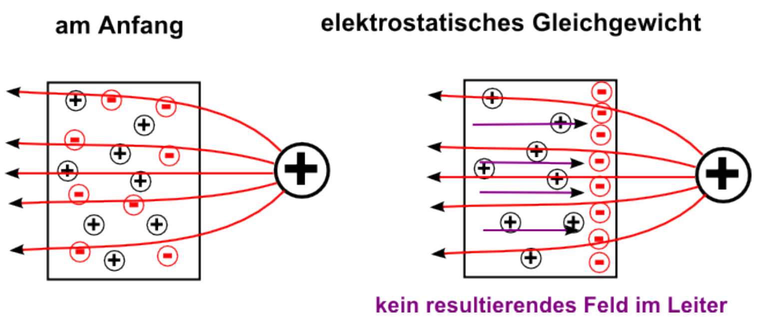
$$E_{ET}(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \qquad E_{\mathrm{GT}}(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{27q}{(3\mathrm{r})^2}=3\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

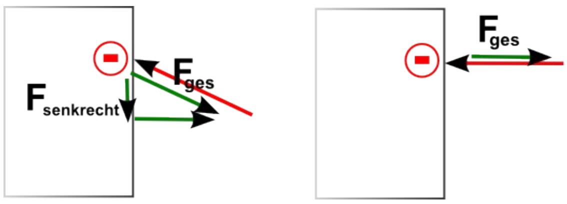
Damit ist die Feldstärke auf der Oberfläche des Großen Tropfens 3 mal so groß wie die auf dem kleinen Tropfen.

Aufgabe 17: Influenz an leitender Oberfläche: Spiegelladung

Durch die positive Probeladung nahe der Platte wird in der Platte ein Feld induziert, das dazu führt, das Elektronen nach rechts zur Plattenoberfläche wandern und dort einen negative Ladung erzeugen. Dies führt wiederum zu einem elektrischen Gegenfeld. Nun verschieben sich die Ladungen so lange, bis ein elektrostatisches Gleichgewicht eingetreten ist, also das Feld, dass durch die Ladungsverschiebung erzeugt wird das äußere Feld neutralisiert.

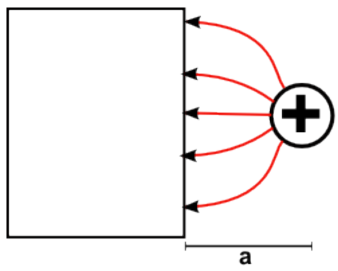
Nun müssen die Feldlinien (dies ist im Bild rechts etwas ungenau) für dieses elektrostatische Gleichgewicht senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen, da sonst eine resultierende Kraft auf die Elektronen wirken würde:

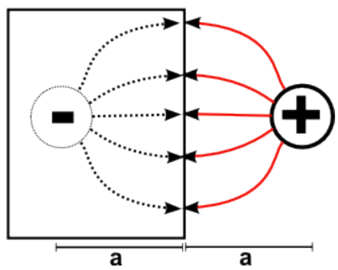




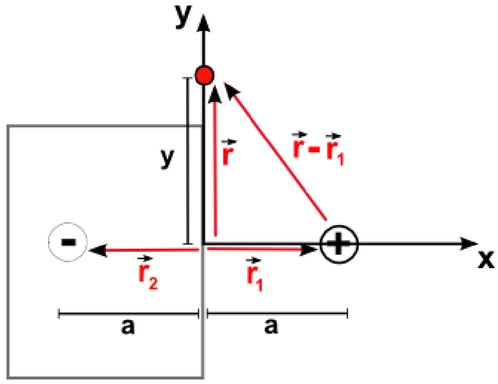
Denn wenn das Feld nicht senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen würde, so gäbe es eine senkrechte Kraft $F_{senkrecht}$ auf das Elektron, die es zwingen würde, so lange nach unten /oben zu wandern, bis sich die Feldlinien senkrecht auf ihm stehen.

Damit wissen wir, dass die Feldlinien senkrecht auf der Oberfläche und folgendermaßen angeordnet sind.
Nun kann man die Oberfläche des Metalls als die Spiegelfläche eines Dipols mit Abstand $2a$ betrachtet werden (und wie wir in der c) sehen werden entspricht die Influenzladung wirklich $-q$.)





b) Das elektrische Feld an der Metalloberfläche lässt sich für den Teil im Vakuum berechnen durch die Superposition von zwei Punktladungen:



Dazu legen wir erstmal ein Koordinatensystem wie in der Skizze ersichtlich im Mittelpunkt zwischen positiver Punktladung und imaginärer negativen Punktladung an. Nun brauchen wir die Vektoren

$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2=\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$$

die uns den die Koordinaten der positiven $(\vec{r}_1)$ und negativen $(\vec{r}_2)$ Probeladungen beschreibt. Dazu noch ein Vektor $\vec{r}$, dass die Koordinaten direkt auf der Oberfläche des Metalls beschreibt:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$$

Nun können wir mit dem Coulomb'schen Gesetz die Felder $\vec{E}_1$ (der positiven Probeladung) und $\vec{E}_2$ (der imaginären negativen Probeladung) berechnen:

$$\vec{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix}-a\\y\end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_2)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix}-a\\-y\end{pmatrix}$$

Über das Superpositionsprinzip lässt sich nun die Gesamtfeldstärke $\vec{E}$ ausrechnen:

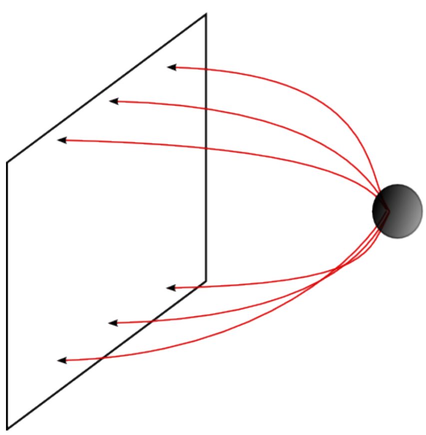
$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a^2+y^2)^{3/2}}\cdot\begin{pmatrix}-2\mathrm{a}\\0\end{pmatrix}=-\frac{a\,q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}\cdot\hat{e}_x$$

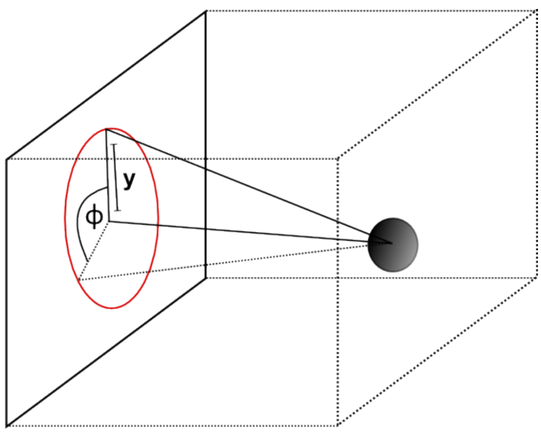
Für den Lotpunkt zwischen den Ladungen $\vec{r}=(0{,}0)^T$ bzw. $y=0$ folgt damit:

$$\vec{E}=\frac{-2\mathrm{a}}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(a^2)^{3/2}}\cdot\hat{e}_x=\frac{-2\mathrm{a}}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^3}\cdot\hat{e}_x=\frac{-2}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}\cdot\hat{e}_x$$

Die Feldstärke an der Oberfläche im Leiters selber ist 0, da wie schon oben erwähnt die Ladungen sich im Leiter so lange verschoben haben, bis sich ein äquivalentes Gegenfeld gebildet hat, dass das äußere Feld neutralisiert.

c) Betrachten wir zunächst das Feld, wie es auf der Leiteroberfläche ankommt:



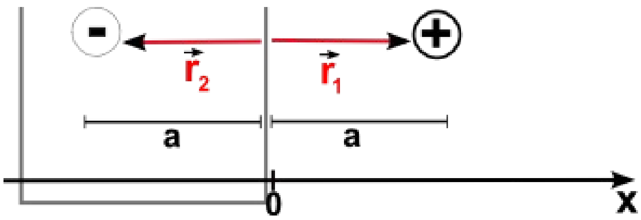


Wir sehen nun, dass die Feldtrahlen nur durch das nicht gestrichelte Würfelelement gehen. Somit müssen wir für den Gauß'schen Satz nur hierüber integrieren. Dazu wählen wir uns praktischerweise die Parameter y und ϕ. Daraus folgt mit dem Gauß'schen Satz:

$$\int_A E\,dA=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} E(y)\,y\,dy\,d\phi=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^\infty\left(-\frac{a\,q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{(a^2+y^2)^{3/2}}\,y\,dy\right)$$
$$=-\frac{a\,q\,2\pi}{2\pi\epsilon_0}\int_0^\infty\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}dy=-\frac{a\,q}{\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]_0^\infty=\frac{a\,q}{\epsilon_0}\left(0-\frac{1}{\sqrt{a^2}}\right)=\frac{-q}{\epsilon_0}=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

Daraus folgt $Q=-q$.

d) Auf die positive Punktladung q_1 wirkt nun einfach die Kraft zwischen den beiden Punktladungen q_1 und q_2 . Wir können wieder die gleichen Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wie schon im Aufgabenteil b) nutzen:



$$\rightarrow\vec{F}_{C\,(2\rightarrow1)}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\cdot(-q)}{(2\mathrm{a})^3}\cdot(2\,a\cdot\hat{e}_x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\cdot\hat{e}_x$$

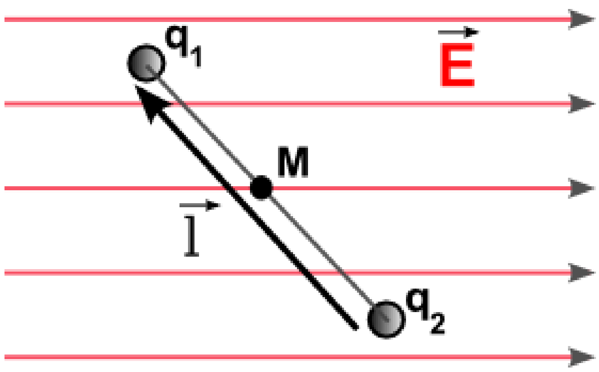
Aufgabe 18: Drehmoment eines Dipols

Das Drehmoment ist allgemein gegeben durch:

$$\vec{M}=\vec{r}\ x\ \vec{F}$$

Genau wie für Kräfte gilt auch für das Drehmoment das Superpositionsprinzip. Zunächst berechnen wir die Kräfte $\vec{F}_1$ auf q_1 und $\vec{F}_2$ auf q_2 :

$$\vec{F}_1=\vec{E}\cdot q_1 \qquad \vec{F}_2=\vec{E}\cdot q_2$$



Die Drehachse liegt logischerweise in der Mitte des Dipols. Somit beträgt der Abstand von der Drehachse zur Punktladung, wo die Kraft wirkt $|\vec{l}/2|$. Nutzen wir nun die obige Definition des Drehmoments:

$$\vec{M}=\vec{r}\ x\ \vec{F}=\vec{r}_1\ x\ \vec{F}_1+\vec{r}_2\ x\ \vec{F}_2=(\vec{l}/2)\ x\ (\vec{E}\cdot q_1)+(-\vec{l}/2)\ x\ (\vec{E}\cdot q_2)$$

Mit $q_1=q$ und $q_2=-q_1=-q$ folgt damit:

$$\vec{M}=(\vec{l}/2)\ x\ (\vec{E}\cdot q)+(-\vec{l}/2)\ x\ (\vec{E}\cdot(-q))=q\cdot(\vec{l}\ x\ \vec{E}) \qquad \textbf{(I)}$$

Man kann nun auch noch die Definition des elektrischen Dipolmoments $\vec{p}$ nutzen $\vec{p}=q\cdot\vec{l}$:

$$\vec{M}=\vec{p}\ x\ \vec{E} \qquad \textbf{(II)}$$

Gleichung **(I)** bzw. **(II)** sind nun die geforderten Vektordarstellungen des Drehmoments.

Wir nutzen nun aber die Gleichung **(I)** weiter. Wir wissen nun, dass der Dipol mit der Feldrichtung den Winkel $\phi = 45°$ einschließt. Mit solch einem Winkel können wir das Kreuzprodukt durch Skalare ausdrücken:

$$\vec{M} = q \cdot (\vec{l} \ x \ \vec{E}) = q \cdot |\vec{l}||\vec{E}| \sin(\phi) \cdot \hat{e}_r$$

Nun wollen wir den Betrag des Drehmoments berechnen. Dazu benötigen wir nur noch den Betrag der Feldstärke $\vec{E}$. Diese können wir mit Hilfe der Spannung U und des Plattenabstandes d berechnen:

$$|E| = \frac{U}{d} = \frac{5000\,V}{0{,}01\,m} = 500.000 \frac{V}{m}$$

Nun berechnen wir noch mit allen Angaben das Drehmoment:

$$|\vec{M}| = |q| \cdot |\vec{l}||\vec{E}| \sin(\phi) = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-10} m \cdot 500.000 \frac{V}{m} \cdot \sin 45° = 2{,}828 \cdot 10^{-24} Nm$$

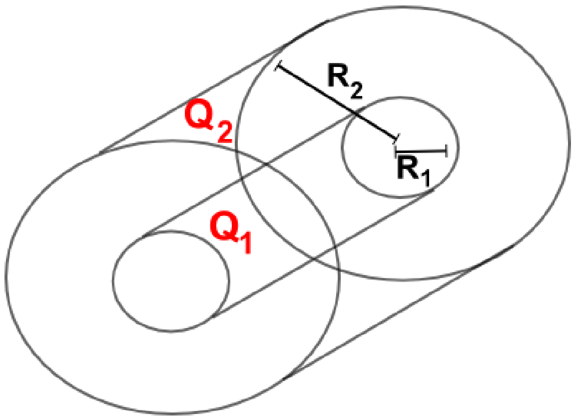
A19: Zylinderkondensator

a) Wir haben nun wieder dasselbe Problem wie bei der Aufgabe 15 c). Wir nutzen nun wieder den Gauß'schen Satz um die Feldstärke in Abhängigkeit von r für $R_1 < r < R_2$ zu berechnen:

Integrieren wir unsere Fluss nun also über die Mantelfläche eines Zylinders:

$$\phi = \int_0^L E(r) 2\pi r \, dl = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \frac{1}{r}$$



b) Berechnen wir also zunächst die Spannung U :

$$U = V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(r) \, d\vec{r} = -\left[\frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln(r)\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Nun können wir die Kapazität C berechnen:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$$