Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik)
Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 6

Aufgabe 20: Kugelkondensator

a) Über den Gauß'schen Satz folgt für die Feldstärke eines Kugelkondensators für $r_i < r < r_a$:

$$\phi = \int_O E\, dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \rightarrow\ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

$$\rightarrow\ U = -\int_{r_a}^{r_i} E\, dr = \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$\rightarrow\ Q = \frac{U\, 4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = 6{,}67 \cdot 10^{-8} C$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = 3{,}35 \cdot 10^{-11} F$$

b)
$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_i^2} = 240980 \frac{N}{C}$$

$$E_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_a^2} = 167347 \frac{N}{C}$$

c)
$$\lim_{r_a \to \infty} C = \lim_{r_a \to \infty} \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_i}} = 4\pi\epsilon_0 r_i = 5{,}56\, F$$

d) (i) Betrachte U:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$\rightarrow\ U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}\left(r_i - \frac{r_i^2}{r_a}\right) = E(r_i) \cdot \left(r_i - \frac{r_i^2}{r_a}\right) = E \cdot \left(r_i - \frac{r_i^2}{r_a}\right)$$

Berechne Maximum für U in Abhängigkeit von r_i :

$$\frac{dU}{d r_i} = E \cdot \left(1 - 2\frac{r_i}{r_a}\right) = 0 \qquad \rightarrow\ 1 - 2\frac{r_i}{r_a} = 0\ \Leftrightarrow\ r_i = \frac{1}{2} r_a = 3\, cm$$

(ii) Daraus folgt für die Spannung U :

$$\rightarrow \; U=E\cdot\left(r_i-\frac{r_i^2}{r_a}\right)=45000\,V=45\,kV$$

A 21: Die Erde als Kugelkondensator

a) aus Aufgabe 20 wissen wir:

$$C=4\pi\epsilon_0 r_i=4\pi\epsilon_0 r_{Erde}=4\pi\epsilon_0\cdot 6378000\,m=709\cdot 10^{-6}\,F$$

b)

(i) $$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \rightarrow \; Q=E\,4\pi\epsilon_0 r^2=588119\,C$$

$$\rightarrow \; U=\frac{Q}{C}=8{,}29\cdot 10^8\,V$$

(ii) Die Ladung Q bleibt gleich (folgt aus Gauß'schen Satz und konstanter Feldstärke), die Kapazität C ist nun jedoch wieder :

$$\rightarrow \; C=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_a}}=\frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{6378000}-\frac{1}{6388000}}=0{,}45\,F$$

$$\rightarrow \; U=\frac{Q}{C}\approx 1{,}3\cdot 10^6\,V$$

A 22: Plattenkondensator

a) Berechne die Feldstärke über den Gauß'schen Satz:

$$\int_O E\,dA=E\cdot A_{Kondensator}=\frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \rightarrow \; Q=\epsilon_0 E\,A$$

$$U=\int E\,ds=E\cdot d$$

$$\rightarrow \; C=\frac{Q}{U}=\frac{\epsilon_0 E\,A}{E\,d}=\epsilon_0\frac{A}{d}=5{,}31\cdot 10^{-11}\,F$$

b) $$Q=C\cdot U=5{,}31\cdot 10^{-11}\,F\cdot 12\,V=6{,}372\cdot 10^{-10}\,C$$

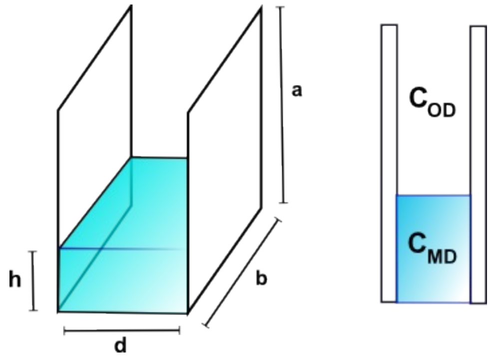
c) $$E=\frac{U}{d}=12\frac{V}{0{,}001}m=12.000\,V$$

d) $$C=\epsilon_0\frac{A}{d} \qquad \rightarrow \; A=\frac{C\cdot d}{\epsilon_0}=\frac{1\,F\cdot 0{,}001\,m}{\epsilon_0}=1{,}13\cdot 10^8\,m^2$$

A 23: Plattenkondensator mit Dielektrikum

Die Kapazität des Kondensators ohne Dielektrikum ist zu Beginn, also ohne Flüssigkeit:

$$C_{OD}=\epsilon_0\frac{A}{d}=\epsilon_0\frac{a\cdot b}{d}$$



Daraus folgt für die Energie des Kondensators:

$$E_{OD}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\epsilon_0\frac{a\cdot b}{d}U^2$$

Wenn nun unten ein Dielektrikum hochsteigt, so haben wir eine Parallelschaltung von Plattenkondensatoren, wobei:

$$dC_{OD}=\epsilon_0\frac{(a-dh)\cdot b}{d} \qquad dC_{MD}=\epsilon_0\epsilon_r\frac{dh\cdot b}{d}$$

$$\rightarrow\ dC_{GES}=dC_{OD}+dC_{MD}=\frac{\epsilon_0 b}{d}\left(a-dh+\epsilon_r dh\right)$$

$$\rightarrow\ dE_{GES}=\frac{1}{2}dC_{GES}U^2=\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 b}{d}(a-dh+\epsilon_r dh)U^2$$

Die zusätzliche Energie dE_{zus} beträgt somit:

$$dE_{zus}=dE_{GES}-E_{OD}=\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 b\,dh}{d}(\epsilon_r-1)U^2$$

Für die potentielle Energie der Flüssigkeit gilt nun:

$$dE_{pot}=m\,g\,dh=\rho\,V\,g\,dh=\rho\,b\,d\,h\,g\,dh$$

Nun stellt sich ein Gleichgewicht ein, wenn die beiden Energien gleich sind, also die zusätzliche im Kondensator gespeicherte Energie genau der Energie entspricht, durch die die Flüssigkeit angehoben wird.

$$dE_{zus}=\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 b\,dh}{d}(\epsilon_r-1)U^2=\rho\,b\,d\,h\,g\,dh=dE_{pot}$$

$$\rightarrow\ h=\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0}{\rho\,g\,d^2}(\epsilon_r-1)U^2\approx 13\,mm$$

b) Da die Spannungsquelle abgeschlossen wird, ist die Ladung auf den Platten konstant. Auch die Kapazität ändert sich nicht, da sie nur von der Höhe der Flüssigkeit, dem Abstand der Platten und der Fläche der Platten abhängt. Damit ist auch die Spannung und damit auch die Energie des Systems konstant und weiterhin damit auch die Kraft auf die Flüssigkeit und damit auch die Höhe derselben.

A24: Kapazitätsnetzwerk

a) Wir müssen im Folgenden immer betrachten, dass es von einem Punkt zu einem anderen immer 2 Wege gibt, daher haben wir immer eine Parallelschaltung. Zusätzlich haben wir den einzelnen Wegen oft auch noch Reihenschaltungen:

- AB:

$$\frac{1}{C_{ADCB}}=\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_2}=10^6\frac{1}{F} \quad \rightarrow \ C_{ADCB}=10^{-6}F$$

$$C_{AB}=C_1+C_{ADCB}=1{,}75\cdot 10^{-6}F$$

- AC:

$$\frac{1}{C_{ADC}}=\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_3}=666.666{,}67\frac{1}{F} \quad \rightarrow \ C_{ADC}=1{,}5\cdot 10^{-6}F$$

$$\frac{1}{C_{ABC}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=1.666.666{,}67\frac{1}{F} \quad \rightarrow \ C_{ABC}=6\cdot 10^{-7}F$$

$$C_{AC}=C_{ADC}+C_{ABC}=2{,}1\cdot 10^{-6}F$$

- AD:

$$\frac{1}{C_{ABCD}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3} \quad \rightarrow \ C_{ABCD}=5{,}2\cdot 10^{-7}F$$

$$C_{AD}=C_1+C_{ABCD}=2{,}92\cdot 10^{-6}F$$

- BC:

$$\frac{1}{C_{BADC}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_4}+\frac{1}{C_3} \quad \rightarrow C_{BADC}=5\cdot 10^{-7}F$$

$$C_{BC}=C_2+C_{BADC}=3{,}5\cdot 10^{-6}F$$

- BD:

$$\frac{1}{C_{BAD}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_4} \quad \rightarrow \ C_{BAD}=5{,}7\cdot 10^{-7}F$$

$$\frac{1}{C_{BCD}}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3} \quad \rightarrow \ C_{BCD}=1{,}714\cdot 10^{-6}F$$

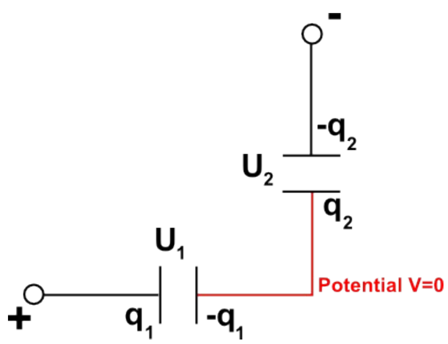
$$C_{BD}=C_{BAD}+C_{BCD}=2{,}28\cdot 10^{-6}F$$

- CD:

$$\frac{1}{C_{CBAD}}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_4} \quad \rightarrow C_{CBAD}=4{,}8\cdot 10^{-7}F$$

$$C_{CD}=C_3+C_{CBAD}=4{,}48\cdot 10^{-6}F$$

b) Strecke **ABC**: Aus der nebenstehenden Skizze können wir einiges ablesen. Zunächst ist die Ladung zwischen den beiden Kondensatoren gleich 0, da dorthin keine Ladungen von der Quelle fließen. Damit folgt:



$$-q_1+q_2=0 \qquad \rightarrow q_1 = q_2 = q$$

Desweiteren gilt:

$$U=U_1+U_2=\frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_2}=q\cdot\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$$

$$\rightarrow\ q=\frac{U}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=U\cdot C_{ABC}=6\cdot 10^{-7}\,F\cdot 20\,V=1{,}2\cdot 10^{-5}\,C$$

$$\rightarrow\ U_1=\frac{q}{C_1}=16\,V$$

Analog kann man dies nun mit der Strecke **ADC** machen:

$$q=U\cdot C_{ADC}=3\cdot 10^{-5}\,C$$

$$\rightarrow\ U_4=\frac{q}{C_4}=12{,}5\,V$$

Daraus folgt für die Potentialdifferenz zwischen den Punkten **B** und **D**:

$$\Delta U=16\,V-12{,}5\,V=3{,}5\,V$$