Übungen zur Kursvorlesung Physik II (Elektrodynamik)
Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 7

Aufgabe 25: Stromfluss in Metallen

a) Es gilt:

$$\rho = R\frac{A}{d} \qquad \rightarrow R = \rho\frac{d}{A}$$

$$\rightarrow \; U = R \cdot I = \rho\frac{d}{A} \cdot I = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\, m\frac{3\,m}{10^{-6}\,m^2} \cdot 1\,A = 0{,}051\,V$$

Nun gilt für das Gradientenfeld in der Metallröhre:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{0{,}051\,V}{3}\,m = 0{,}017\frac{V}{m}$$

b) Herleitung der Driftgeschwindigkeit v_D :

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad \text{mit} \quad dq = \frac{n}{V}\,e\;A\,dl \qquad \hat{=}\frac{Ladung}{V}\,dV$$

$$= \frac{n}{V}\,e\,A\,v_D\,dt$$

$$\rightarrow \; I = \frac{dq}{dt} = \frac{n\,e\,A\,v_D\,dt}{V\,dt} = \frac{n\,e\,A\,v_D}{V}$$

$$\rightarrow \; v_D = \frac{I\,V}{n\,e\,A} = \frac{I\,A\,l}{n\,e\,A} = \frac{I\,l}{n\,e} \qquad \textbf{(I)}$$

Jetzt brauchen wir noch die Teilchenzahl n . Diese bekommen wir durch die Relation:

$$M = \frac{m}{n} \qquad \rightarrow \; n[mol] = \frac{m}{M} = \frac{\rho\,V}{M} = \frac{\rho\,A\,l}{M}$$

Nun wollen wir allerdings die Teilchenzahl nicht in Mol , sondern die richtige Zahl, dazu müssen wir n mit der Avogadrozahl N_A multiplizieren:

$$n[e^-] = \frac{\rho\,A\,l\,N_A}{M}$$

Einsetzen von n in Gleichung **(I)** führt uns zu:

$$\rightarrow \; v_D = \frac{I\,l}{n\,e} = \frac{I\,l\,M}{\rho\,A\,l\,N_A\,e} = \frac{I\,M}{\rho\,A\,N_A\,e}$$

Nun müssen wir noch die Einheiten der Dichte ρ , der Fläche A und der Molmasse M anpassen (weil es die Chemiker anscheinend nicht raffen das SI-System zu nutzen):

$$\rho = 8{,}93 \frac{g}{cm^3} = 8{,}93 \frac{10^{-3} kg}{10^{-6} m^3} = 8930 \frac{kg}{m^3}$$

$$M = 63{,}5 \frac{g}{Mol} = 63{,}5 \frac{10^{-3} kg}{Mol} = 0{,}0635 \frac{kg}{Mol}$$

$$A = 1\, mm^2 = 10^{-6} m^2$$

$$\rightarrow \; v_D = \frac{I\, M}{\rho\, A\, N_A e} = 7{,}38 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$$

c) Da wir wissen, was die mittlere Geschwindigkeit v_D ist, können wir nun die durchschnittliche Zeit τ (entspricht der Streuzeit) berechnen, in der es durch das $\vec{E} - \text{Feld}$ auf diese Geschwindigkeit beschleunigt wurde:

$$v_D = a \cdot \tau \qquad \rightarrow \; a = \frac{v_D}{a}$$

mit $a = \frac{F_{el}}{m} = \frac{q \cdot E}{m}$ folgt:

$$\tau = \frac{v_D}{a} = \frac{m \cdot v_D}{q \cdot E} = 2{,}5 \cdot 10^{-14} s$$

d) Für die Beweglichkeit der Elektronen im Kupfer gilt:

$$v_D = \mu \cdot E \;\Leftrightarrow\; \mu = \frac{v_D}{E} = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{Vs}$$

Für die Geschwindigkeit v_D bei der Beweglichkeit $\mu = 10^7 \frac{cm^2}{Vs} = 10^3 \frac{m^2}{Vs}$ gilt:

$$v_D = \mu \cdot E = 10^4 \frac{m^2}{Vs} \cdot 0{,}017 \frac{V}{m} = 17 \frac{m}{s}$$

Damit folgt für die mittlere Streuzeit:

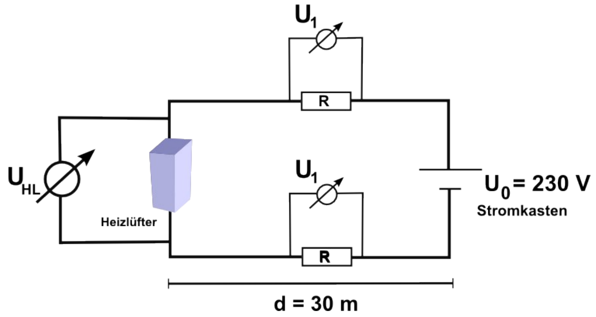
$$\tau = \frac{m \cdot v_D}{q \cdot E} = 5{,}7 \cdot 10^{-9} s$$

A26: Wiederstandsnetzwerk

A 27: Heizlüfter

In der Skizze ist das Netzwerk, welches vom Stromkasten (der Quelle) zum Heizlüfter führt. Es ist ersichtlich, dass die gesuchte Spannung am Heizlüfter U_{HL} gegeben ist durch:

$$U_{HL}=U_0-2U_1$$



Nun müssen wir also die Spannung berechnen, die durch die Widerstände im Kabel „verloren“ geht. Es gilt:

$$\rho=R\frac{A}{d}$$

$$\rightarrow \; R=\rho\frac{d}{A}=\rho\frac{d}{\pi r^2} \qquad \text{mit} \quad r=\frac{d}{2}=0{,}001\,m$$

Einsetzen dieser Relation in:

$$U_1=R\cdot I=\rho\frac{d}{\pi r^2}\cdot I=2{,}55\,V$$

Damit folgt für U_{HL} :

$$U_{HL}=U_0-2\,U_1=230\,V-2\cdot 2{,}55\,V=224{,}9\,V$$

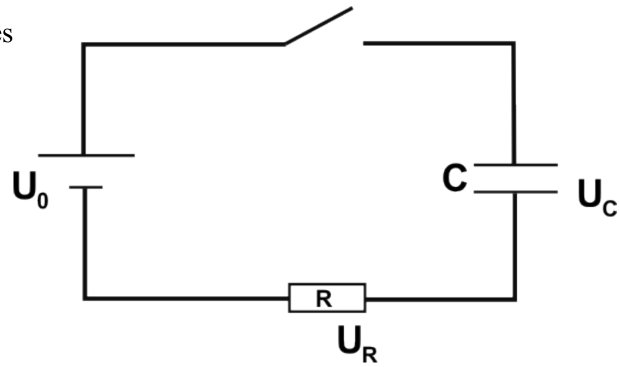
b) $$U_1=R\cdot I=\rho\frac{d}{\pi r^2}\cdot I/2=1{,}275\,V \qquad \rightarrow \; U_{HL}=227{,}45\,V$$

c)

A 28: Aufladen eines Plattenkondensators

a) Herleitung des Ladungsstroms I :

Es gilt trivialerweise nach dem Kippen des Schalters:



$$U_0 = U_R + U_C$$

Mit: $U_R = R \cdot I$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

folgt:

$$U_0 = U_R + U_C = R \cdot I + \frac{Q}{C}$$

Ableiten nach der Zeit führt uns zu:

$$\frac{d}{dt} U_0 = 0 = R \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C}$$

Dies ist eine homogene lineare DGL 1. Ordnung und daher einfach mit dem Ansatz $I = e^{\omega t}$ zu lösen:

$$R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} = 0$$

$$R \omega e^{\omega t} + \frac{e^{\omega t}}{C} = 0 \qquad \rightarrow \quad \omega = \frac{-1}{C R}$$

Damit folgt für den Strom:

$$I = c \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Setzen wir nun unsere Anfangsbedingungen ein, also $Q(0) = 0$:

$$U_0 = R \cdot I(0) + \frac{Q(0)}{C} = R \cdot I(0) \qquad \rightarrow I(0) = \frac{U_0}{R} = I_0$$

$$\rightarrow I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Damit folgt für die Spannung $U_C(t)$:

$$U_0 = U_R + U_C$$

$$\rightarrow U_C(t) = U_0 - U_R = U_0 - I \frac{(t)}{R} = U_0 - \underbrace{\frac{I_0}{R}}_{= U_0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

b) Wann ist $I(t)=\frac{1}{2}I_0$:

$$I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{1}{2}I_0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{t}{RC}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2 \Leftrightarrow t=\ln 2\cdot R\cdot C=6{,}93\,s$$

c) Die elektrische Energie durch Aufladen eines Kondensators ist gegeben durch:

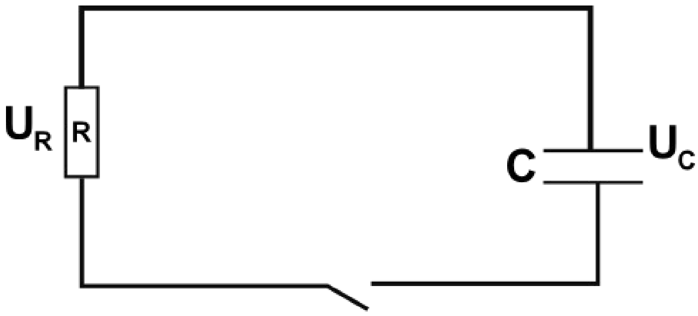
$$W=\int dW=\int U\,dq=\int U\frac{dq}{dt}dt=\int U\cdot I\,dt$$

Mit $I(t)$ und $U_C(t)$ des Kondensators beim Aufladen folgt:

$$W=\int_0^\infty U\cdot I\,dt=\int_0^\infty U_0\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\cdot I_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\,dt$$
$$=\int_0^\infty U_0\cdot I_0\cdot\left(e^{-\frac{t}{RC}}-e^{-\frac{2t}{RC}}\right)=\frac{U_0^2}{R}\left[-RC\,e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{U_0^2}{R}\cdot\left(RC-\frac{RC}{2}\right)=\frac{U_0^2}{R}\cdot\frac{RC}{2}=\frac{1}{2}CU^2$$

Nun brauchen wir zunächst die Stromstärke $I(t)$ beim Entladen des Kondensators:

Es gilt nun, wenn man den Schalter schließt:



$$U_C=U_R$$

$$\frac{Q}{C}=-I\cdot R$$ (weil der Strom „rückwärts“ fließt)

$$\frac{I}{C}=-\dot{I}\cdot R$$

Mit dem Ansatz $I=e^{\omega t}$ kommen wir nun wieder auf:

$$\omega=\frac{-1}{RC}$$

Mit der Anfangsbedingung $U_C(0)=U_0$ kommen wir auf:

$$U_C(0)=U_0=-I(0)\cdot R$$

$$\rightarrow I(0)=\frac{-U_0}{R}=I_0$$

$$\rightarrow I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Damit folgt:

$$U_R=-I(t)\cdot R=-I_0\cdot R\cdot e^{-\frac{t}{RC}}=U_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Die Energie beim Entladen durch den Kondensator ist nun also:

$$W=\int_0^\infty U\cdot I\,dt=\int_0^\infty U_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot I_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\,dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{U_0^2}{R}\cdot e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt=\frac{U_0^2}{R}\left[\frac{-RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty=\frac{U_0^2}{R}\cdot\frac{RC}{2}=\frac{1}{2}C\,U_0^2$$

Damit entspricht die Energie, die im Widerstand durch Reibung verloren geht genau der vorher im Kondensator gespeicherten Energie.