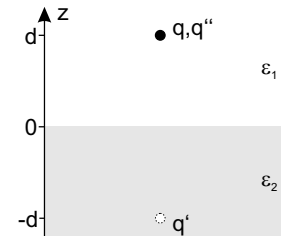


ÜBUNGSAUFGABEN (IV)

(Besprechung am Mittwoch, 13.5.15)

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Zwei isotrope Dielektrika K_1 und K_2 mit Dielektrizitätszahlen ε_1 und $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ treffen in der xy -Ebene bei $z = 0$ aufeinander (vgl. Skizze). Eine positive Punktladung q befindet sich in K_1 bei $z = d$ und $x = y = 0$ und induziert an der Grenzschicht eine negative Oberflächenladungsverteilung $\sigma(x, y)$. Es soll die auf q wirkende Anziehungskraft F mittels der *Methode der Spiegelladungen* berechnet werden.



Man nehme dazu an, dass das von σ erzeugte Feld in K_1 durch eine Spiegelladung q' bei $z = -d$ und in K_2 durch eine Spiegelladung q'' bei $z = d$ repräsentiert werden kann (beide bei $x = y = 0$). Berechnen Sie q' und q'' durch die zu erfüllenden Randbedingungen an der Grenzschicht. Die Anziehungskraft F kann dann durch die Coulombkraft zwischen q und q' bestimmt werden.

Stetigkeitsbedingungen: An der Grenzschicht der Dielektrika müssen die Komponenten der elektrischen Felder $\vec{E}$ entlang der Ebene (Tangentialkomponente E_t) übereinstimmen. Das Gleiche gilt für die Komponenten des elektrischen Flusses $\vec{D}$ senkrecht zur Ebene (Normalkomponente D_n).

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Ein Verbraucher soll von einer Gleichspannungsquelle mit einem Strom von $I = 1 \text{ A}$ über zwei jeweils 10 m lange Kupferkabel mit 2 mm Durchmesser versorgt werden.

- Welche Zeit benötigt ein freier Ladungsträger (Elektron), um von der Spannungsquelle zum Verbraucher zu gelangen?
- Welche Klemmspannung muss die Spannungsquelle bei einem Verbraucherwiderstand von $R_v = 0.5 \Omega$ liefern?
- Welche Spannung muss über einem Transatlantikkabel mit 4000 km Länge und 2 cm Durchmesser anliegen? Ziehen Sie eine Schlussfolgerung im Hinblick auf eine Gleichspannungsübertragung über große Distanzen.

Zahlenwerte: spezifische Widerstand $\rho_s = 1.8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$; Ladungsträgerdichte $n = 5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

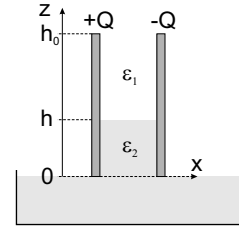
Ein Plattenkondensator der Kapazität $C = \epsilon_0 \epsilon A/d$ wird mit einer Spannungsquelle bei der Spannung U aufgeladen. Der anfängliche Plattenabstand $d = d_1$ wird dann um einen sehr kleinen Betrag Δd auf $d_2 = d_1 + \Delta d$ vergrößert. Berechnen Sie die damit verbundene Änderung ΔW der Feldenergie W des Kondensators, wenn

- die Änderung bei abgeklemmter Spannungsquelle, und
- die Änderung mit angeschlossener Spannungsquelle

geschieht. Erläutern Sie ausführlich die unterschiedlichen Ergebnisse.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

In einem Medium der Dielektrizitätszahl ϵ_1 wird ein rechteckiger Plattenkondensator mit Fläche $A = b_0 h_0$ (Breite b_0 , Höhe h_0), Plattenabstand d und Gesamtladung Q senkrecht in ein Bad mit einer nichtleitenden Flüssigkeit der Dielektrizitätszahl $\epsilon_2 > \epsilon_1$ und Massendichte ρ_{fl} gestellt (vgl. Skizze). Als Folge wird die Flüssigkeit mit der elektrischen Kraft F_e in z -Richtung in den Kondensator hineingezogen.



- Bestimmen Sie die Spannung U , das elektrische Feld E , die elektrische Flussdichte D und die Oberflächenladungsdichte σ als Funktion des Ortes z im Kondensator für eine gegebene Höhe h des Flüssigkeitsspiegels. Berechnen Sie damit die Gesamtenergie $W_e(h)$ des Kondensators.
- Die Kraft F_e werde nun ermittelt aus dem Gradienten der Feldenergie, $F_e = -\frac{dW_e}{dh}$. Bestimmen Sie so für eine gegebene Spannung U die Höhe h_g , bei der F_e im Gleichgewicht ist mit der Gewichtskraft F_g der Flüssigkeit im Kondensator.

Hinweis: Beachten Sie die Stetigkeitsbedingungen für elektrisches Feld und Flußdichte.

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{x^2 + y^2 + (z-d)^2} + \frac{q'}{x^2 + y^2 + (z+d)^2} \right) \quad \checkmark$$

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'' + q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right) \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{vgl. Aufgabenstellung} \\ \rightarrow \text{Werte für } q' \text{ anders} \\ \rightarrow \text{Kraft passt.} \end{array}$$

(✓)

$$\vec{E}_1 = -\text{grad } \varphi_1$$

$$\vec{E}_2 = -\text{grad } \varphi_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\begin{array}{c} \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \\ q \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \\ \frac{z-d}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \end{array} + q' \begin{array}{c} \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \\ \frac{z+d}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \end{array} \right)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\begin{array}{c} \frac{x}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \\ q'' \frac{y}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \\ \frac{z-d}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \end{array} \right)$$

Stetigkeitsbedingungen:

$$E_{1z} = E_{2z} \quad \leftarrow \text{also Index} \quad \checkmark \quad \text{für } z=0 \quad \checkmark$$

$$D_{1\perp} = D_{2\perp}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q \frac{x+y}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} + q' \frac{x+y}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q'' \frac{x+y}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \right)$$

$$\Rightarrow q + q' = q'' \quad (\checkmark)$$

$$\frac{\epsilon_1}{4\pi} \left(q \frac{-d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} + q' \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \right) = \frac{\epsilon_2}{4\pi} \left(q'' \frac{-d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \right)$$

$$\Rightarrow \epsilon_1 (-q + q') = \epsilon_2 (-q'')$$

$$\Rightarrow q' = \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) q \quad \checkmark$$

$$F = \frac{q q'}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{q^2 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)}{4\pi\epsilon_0 d^2} \quad \checkmark$$

→ das kann man rufen

②

$$a) I = \frac{Q}{t} = \frac{N \cdot e}{t} = \frac{n \cdot L \cdot \frac{d^2}{4} \cdot e}{t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{n \cdot L \cdot \frac{d^2}{4} \cdot e}{I}$$

$$t = \frac{5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot 10 \text{ m} \cdot \frac{(0,002 \text{ m})^2}{4} \cdot \pi \cdot e}{1 \text{ A}}$$

$e \leftrightarrow$ Elementarladung

$$t = \underline{\underline{251327,4 \text{ s}}} \quad \checkmark = 70 \text{ h}$$

$$b) R_{\text{kabel}} = R_s \cdot \frac{l}{A} \approx 0,06 \, \Omega$$

$$U = (R_v + R_{\text{kabel}}) \cdot I = (0,5 \, \Omega + 0,06 \, \Omega) \cdot 1 \text{ A} = \underline{\underline{0,61 \text{ V}}} \checkmark$$

$$c) R_{\text{kabel}} = R_s \cdot \frac{l}{A} = 1,8 \cdot 10^{-8} \, \Omega \text{ m} \cdot \frac{4 \cdot 10^6 \text{ m}}{\pi \cdot \frac{0,02^2}{4} \text{ m}^2}$$

$$= 229,2 \, \Omega \quad \checkmark$$

($R_v + 2R_s$)

$$U = R \cdot I = 229,2 \, \Omega \cdot 1 \text{ A} = \underline{\underline{229,2 \text{ V}}} (\checkmark)$$

$\rightarrow$ u.j. mit Verbraucher!

Gleichspannungsübertragung ist im Vergleich zu Wechselstromübertragung (Verlust von 1 kV/km) effektiver. Hat man in dieser Aufgabe oder nicht gesehen! =

2,5

③

a)

$$Q = \text{konst}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q^2 \quad \text{„Verteilung“}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \cdot d \cdot Q^2 \quad \checkmark$$

Die Energie wird in den Kondensator gesteckt $\rightarrow W/\text{Ladung}$ erhöht sich

b)

$$U = \text{konst}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad \text{„Hebel“}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r A U^2 \cdot \frac{1}{d} \quad \checkmark$$

Da im zweiten Fall die Spannung konst. ist, müssen die überschüssigen Ladungen von der Spannungsquelle aufgenommen werden. $\checkmark \rightarrow$ Arbeit?

2

④

a) $z < h$

$z > h$

$$U = \frac{Q \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_2 b_0 h}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{b_0 h}$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_2 b_0 h}$$

$$\sigma = \frac{Q}{b_0 h}$$

$$U = \frac{Q \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_1 b_0 (h_0 - h)}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{b_0 (h_0 - h)}$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_1 b_0 (h_0 - h)}$$

$$\sigma = \frac{Q}{b_0 (h_0 - h)}$$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{\sigma} U^2 = \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{1}{C}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 h b_0 + \epsilon_0 \epsilon_1 (h_0 - h) b_0}{d}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cdot d}{\epsilon_0 \epsilon_2 h b_0 + \epsilon_0 \epsilon_1 (h_0 - h) b_0}$$

$$b) \quad -\frac{dW}{dh} = \frac{1}{2} Q^2 d \frac{1}{(\epsilon_0 \epsilon_2 h b_0 + \epsilon_0 \epsilon_1 (h_0 - h) b_0)^2} (\epsilon_0 \epsilon_2 b_0 - \epsilon_0 \epsilon_1 b_0)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{d}{d} \epsilon_0 b_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$= \frac{1}{2} U^2 \cdot \frac{\epsilon_0 b_0}{d} (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$F_G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot d \cdot b_0 \cdot h \cdot g$$

$$F_G \stackrel{!}{=} F_e$$

$$\rho \cdot g \cdot d \cdot b_0 \cdot h = \frac{1}{2} U^2 \cdot \frac{\epsilon_0 b_0}{d} (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$\rho \cdot h = g \quad = \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0}{d^2} (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{U^2 \epsilon_0}{d^2 \rho g} (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

s. gut

5