

ÜBUNGSAUFGABEN (V)

(Besprechung am Mittwoch, 20.5.15)

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Ein Kondensator trage bei einer Spannung U die Ladung Q . Berechnen Sie die Kraft ΔF auf ein beliebiges Flächenelement ΔA des Kondensators als Funktion seiner Oberflächenladungsdichte σ und der auf ΔA einwirkenden elektrischen Feldstärke E für

- einen Plattenkondensator mit Plattenabstand a ,
- einen Zylinderkondensator mit Radien $a, b > a$ sowie Länge $l \gg b$
- und einen Kugelkondensator mit Radien a und $b > a$.

Die Beziehungen und Formeln für die Größen Q , U und E können Sie der Vorlesung oder früheren Aufgaben entnehmen.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

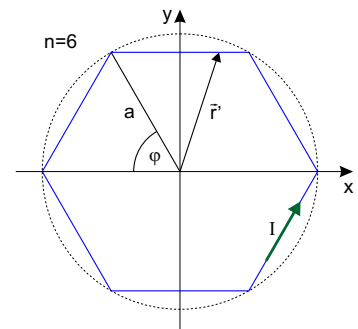
In einem unendlich langen, leitenden Hohlzylinder mit Innenradius a und Außenradius b fließt ein Strom I homogener Dichte in Richtung seiner Symmetrieachse. Berechnen Sie das von I erzeugte Magnetfeld $H(r)$ im gesamten Raum (auch innerhalb des Leiters) als Funktion des Abstands r von seiner Achse.

Tipp: Verwenden Sie das Ampèresche Durchflutungsgesetz (4. Maxwellsche Gleichung) und machen Sie Gebrauch von der Symmetrie des Leiters.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Ein dünner Draht in Form eines regelmäßigen Sechsecks liegt in der xy -Ebene. Es fließt ein konstanter Strom I durch den Draht und erzeugt die magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{r})$.

- Berechnen Sie die Flussdichte $\vec{B}(z)$ für alle Orte z auf der Symmetrieachse mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes.
- Verallgemeinern Sie die gefundene Formel für ein regelmäßiges n -Eck mit beliebigem geradzahligem n .
- Bestimmen Sie schließlich die Flussdichte für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ (kreisförmige Leiterschleufe).



Aufgabe 4: (4 Punkte)

Eine homogen geladene Scheibe vom Radius R und vernachlässigbarer Dicke rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse. Berechnen Sie die erzeugte magnetische Flussdichte B auf der Symmetrieachse als Funktion der Gesamtladung Q und des Abstands z vom Scheibenzentrum. Vergleichen Sie das Ergebnis für $z = 0$ mit dem eines Kreisstroms in einer Leiterschleufe vom Radius R .

Aufgabe 1

a) $\Delta F = \Delta Q \cdot E$ mit $\Delta Q =$ Ladung des Flächenelements
 $= \overset{\uparrow}{\sigma} \cdot \Delta A \cdot E$ (✓)
 $= \sigma \Delta A \cdot \frac{U}{a}$

links Delta $\Leftrightarrow$ rechts Delta

b) $F = \sigma \cdot \Delta A \cdot E$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi r \cdot l} \quad (*)$$

suche E in Abhängigkeit von U

$$U = \int_a^b \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi r \cdot l} dr = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi l} = \frac{U}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \text{in } (*): E = \frac{U}{r \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F = \sigma \Delta A \cdot \frac{U}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} & \text{für } \Delta A \text{ auf der äußeren Platte} \\ F = \sigma \Delta A \cdot \frac{U}{b \ln\left(\frac{b}{a}\right)} & \text{" " inneren " " } \end{cases}$$

Lin. Abh. v. $\sigma, \Delta A$ u. E

c) $F = \sigma \Delta A \cdot E$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} \quad (*)$$

$$U = \int_a^b \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \Leftrightarrow \frac{U}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0}$$

$$\text{in } (*): E = \frac{U}{r^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{Uab}{r^2(b-a)}$$

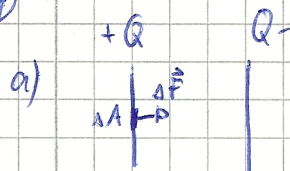
$$\int F = \sigma \Delta A \cdot \frac{Uab}{a(b-a)} \quad \text{auf der inneren Platte}$$

$$\int F = \sigma \Delta A \cdot \frac{Ua}{b(b-a)} \quad \text{auf der äußeren Platte}$$

5.0. (✓)

11.5

①

VeränderungWeg 1:

$$F = E \cdot Q$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot E$$

Weg 2:

$$F = - \frac{dW}{dh} \stackrel{dF}{=} - \frac{dW}{da}$$

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot Q^2 \cdot \frac{1}{\epsilon \epsilon_r A}$$

$$F = - \frac{1}{2} Q^2 \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta A} = - \frac{1}{2} \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A} \frac{Q}{A} = - \frac{1}{2} \cdot E \cdot \epsilon$$

b)

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Kraft auf inneren Leiter:

$$F_a = - \frac{dW}{da} = - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l a}$$

Kraft auf äußeren Zylinder:

$$F_b = - \frac{dW}{db} = + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l b}$$

Fläche d. inneren Zylinder:

$$A_a = 2\pi a l$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{2} \epsilon_a \cdot E(a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_b E(b) = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

c)

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

innen Kugel:

$$F_a = - \frac{dW}{da} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{1}{a^2}$$

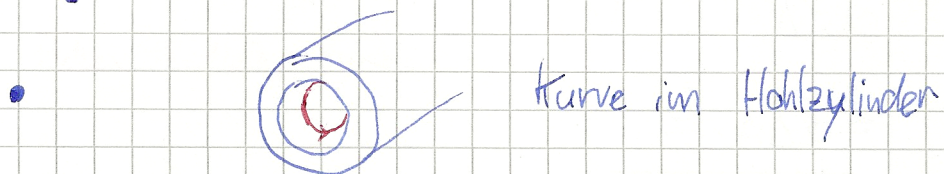
 $\Rightarrow$ pro Fläche

$$\frac{\Delta F_a}{\Delta A} = - \frac{1}{2} \epsilon_a \cdot E_a$$

(außen analog)

Aufgabe 2

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$$

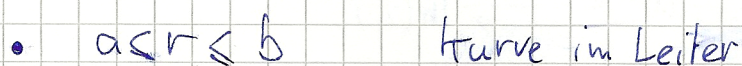


$$r < a$$

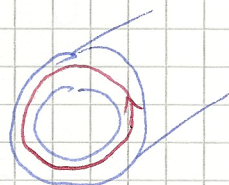
Fläche wird von keinem Strom durchflossen

$$\Rightarrow I = 0$$

$$\Rightarrow H(r) = 0$$



$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I_{\text{eingeschlossen}} (I_e)$$



$$I_e = j \cdot A$$

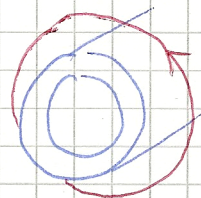
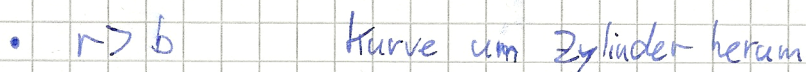
$$= j \cdot \pi (r^2 - a^2)$$

$$j = \frac{I_{\text{ges}}}{A} = \frac{I_{\text{ges}}}{\pi (b^2 - a^2)}$$

$$= \frac{I_{\text{ges}} (r^2 - a^2) \pi}{\pi (b^2 - a^2)} = \frac{I (r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^r \vec{H} dr' d\varphi = \frac{I (r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$$

$$H(r) = \frac{I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)}$$

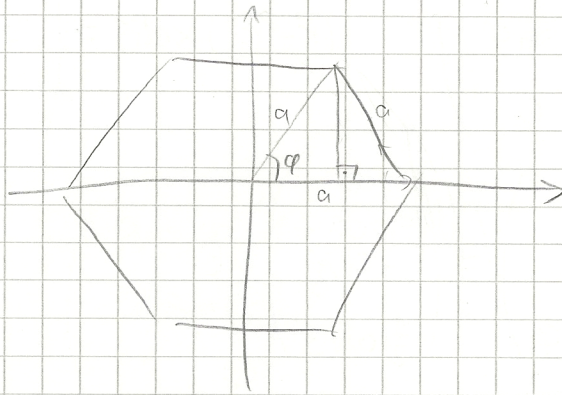


$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I_{\text{ges}} \Leftrightarrow \vec{H}(r) \oint d\vec{r} = I_{\text{ges}}$$

$$H(r) \cdot 2\pi r = I_{\text{ges}} \Leftrightarrow H(r) = \frac{I_{\text{ges}}}{2\pi r}$$

4

Aufgabe 3



$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^6 \vec{B}_i \quad \checkmark$$

$$\vec{r}_i'(t) = \begin{pmatrix} a - a \cos \varphi \cdot t \\ a \sin \varphi t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{by constant!} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_i) \times d\vec{r}_i = \begin{pmatrix} -a + a \cos \varphi t \\ -a \sin \varphi t \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad \text{y in y int.}$$

$$= \begin{pmatrix} -za \sin \varphi \\ za \cos \varphi \\ -(a - a \cos \varphi t) a \sin \varphi + a \sin \varphi t a \cos \varphi \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} -za \sin \varphi \\ za \cos \varphi \\ a^2 \sin \varphi \cos \varphi t - a^2 \sin \varphi + a^2 \cos \varphi \sin \varphi t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -za \sin \varphi \\ za \cos \varphi \\ a^2 \sin \varphi (2 \cos \varphi t - 1) \end{pmatrix} dt$$

damit lauft
ih von 0 zu a.

$$B_1(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{t=0}^1 \frac{(-za \sin \varphi, za \cos \varphi, a^2 \sin \varphi (2 \cos \varphi t - 1))}{\sqrt{a^2 - 2a^2 \cos \varphi t + a^2 t^2 + z^2}^{3/2}} dt$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{(-za \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} az, \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} t - \frac{a^2 \sqrt{3}}{2})}{\sqrt{a^2 - a^2 t + a^2 t^2 + z^2}^{3/2}} dt$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{(-za \sqrt{3}, az, a^2 \sqrt{3} t - a^2 \sqrt{3})}{2 \sqrt{a^2 - a^2 t + a^2 t^2 + z^2}^{3/2}} dt$$

müsste man lösen

ja - (Wolfram / Maple ist ok)

$$\vec{r}_2'(t) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi - at \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{r} - \vec{r}_2') \times d\vec{r}_2' = \begin{pmatrix} at - a \cos \varphi \\ -a \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -az \\ a^2 \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -az \\ \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} \end{pmatrix} dt$$

$$B_2(z) = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{(0, -az, \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3})}{\sqrt{a^2 t^2 - 2at \cos \varphi + a^2 + z^2}} dt$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{a} \ln(2a\sqrt{a^2 t^2 - a^2 t + a^2 + z^2} + 2a^2 t - a^2) = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{(0, -az, \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3})}{\sqrt{a^2 t^2 - a^2 t + a^2 + z^2}} dt$$

$$= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} (0, -az, \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - a^2 t + a^2 + z^2}} dt$$

$$\stackrel{(*)}{=} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} (0, -az, \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}) \ln \left(\frac{2a\sqrt{a^2 + z^2} + 2a^2 - a^2}{2a\sqrt{a^2 + z^2} - a^2} \right)$$

$$= - \frac{\mu_0 I}{4\pi} (0, -az, \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3}) \ln \left(\frac{2a\sqrt{a^2 + z^2} + a^2}{2a\sqrt{a^2 + z^2} - a^2} \right)$$

usw. für $\vec{r}_3'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}at \\ a \sin \varphi \sin \varphi t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{r}_5'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a + at \\ -a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

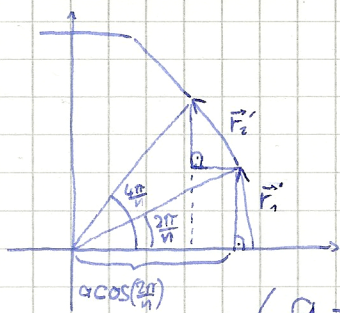
$$\vec{r}_4'(t) = \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{2}at \\ -a \sin \varphi t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_6'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}at \\ -a \sin \varphi + a \sin \varphi t \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\varphi := \frac{2\pi}{n}$

$$B_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n B_i(z, \vec{r}_i(t))$$

$$\text{mit } B_i(z, \vec{r}_i(t)) = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i') \times d\vec{r}_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3}$$

Suche Formel für $\vec{r}_i'$ für beliebiges n



$$\vec{r}_1' = \begin{pmatrix} a - at(1 - \cos(\frac{2\pi}{n})) \\ at \sin(\frac{2\pi}{n}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

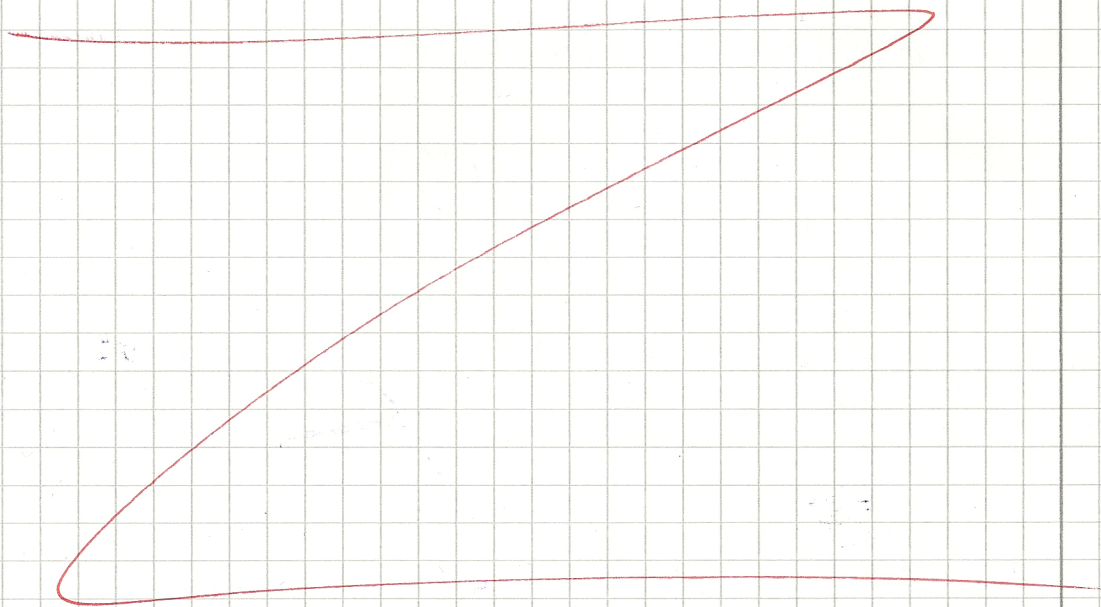
$$\vec{r}_2' = \begin{pmatrix} b \cos(\frac{2\pi}{n}) - at(\cos(\frac{2\pi}{n}) - \cos(\frac{4\pi}{n})) \\ a \sin(\frac{2\pi}{n}) + at(\sin(\frac{4\pi}{n}) - \sin(\frac{2\pi}{n})) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_3' = \begin{pmatrix} b \cos(\frac{4\pi}{n}) + at(\cos(\frac{6\pi}{n}) - \cos(\frac{4\pi}{n})) \\ a \sin(\frac{4\pi}{n}) + at(\sin(\frac{6\pi}{n}) - \sin(\frac{4\pi}{n})) \\ 0 \end{pmatrix}$$

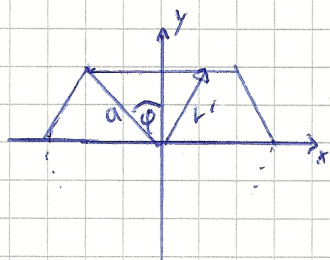
$$\text{d.h.: } \vec{r}_i' = \begin{pmatrix} a \cos(\frac{2(i-1)\pi}{n}) + at(\cos(\frac{2i\pi}{n}) - \cos(\frac{2(i-1)\pi}{n})) \\ a \sin(\frac{2(i-1)\pi}{n}) + at(\sin(\frac{2i\pi}{n}) - \sin(\frac{2(i-1)\pi}{n})) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fehler: s.o.

1



$$\textcircled{3} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)a = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$$

$$x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

$$\vec{r}' = \left(x, \frac{1}{2}\sqrt{3}a, 0\right) \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

$$d\vec{r}' = \frac{d\vec{r}'}{dx} dx = (1, 0, 0) dx$$

Betrachte Spezialfall: Feld auf z-Achse

$$x = y = 0 \Rightarrow \vec{r} = (0, 0, z)$$

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' &= \left(-x, -\frac{a}{2}\sqrt{3}, z\right) \times (1, 0, 0) dx \\ &= \left(0, z, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\left(\frac{z}{2}\right) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 6 \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\left(0, z, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)}{\left(x^2 + \frac{3}{4}a^2 + z^2\right)^{3/2}} dx \\ &= -\frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{3}{4} a \sqrt{3} \left[\frac{2 \cdot \sqrt{z^2 x}}{\left(\frac{3}{4}a^2 + z^2\right) \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + 2(x^2 + y^2)}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

$$b) \quad \varphi = \frac{2\pi}{n} \quad y = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)a \quad x \in \left[-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)a, \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)a\right]$$

$$\vec{r}' = \left(x, \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)a, 0\right)$$

$$x \in \left[-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)a, \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)a\right]$$

$$d\vec{r}' = \frac{d\vec{r}'}{dx} dx = (1, 0, 0) dx$$

~ analog zu oben

$$B_x = B_y = 0$$

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} n \frac{a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(z^2 + a^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$c) \quad h \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \rightarrow 0$$

$$\cos\left(\frac{z\pi}{h}\right) \rightarrow 1$$

$$\sin(\alpha) \approx \alpha$$

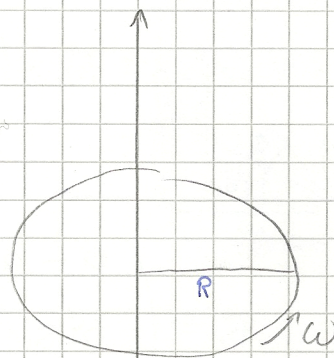
$$\alpha \ll 1$$

$$B_{\infty,2}(z) = \frac{-\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Aufgabe 4

Aus Symmetriegründen

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) &= \rho \cdot \vec{v} = \frac{Q}{\pi R^2} \cdot (-\omega r) \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{Q}{\pi R^2} (-\omega r) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma (-\omega r) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Biot-Savart:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad dV' \hat{=} dA' \\ &\quad \text{(sehr dünne Scheibe)} \\ &= r dr d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} r dr d\varphi$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + z^2}^3 = \sqrt{r^2 + z^2}^3$$

$$\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}') = \sigma \omega \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \sigma \omega \begin{pmatrix} z r \cos \varphi \\ z r \sin \varphi \\ r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \sigma \omega \begin{pmatrix} z r \cos \varphi \\ z r \sin \varphi \\ r^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sigma \omega \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(z r \cos \varphi, z r \sin \varphi, r^2)}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} r dr d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sigma \omega \cdot 2\pi \int_0^R \frac{r^3 \vec{e}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{r^2 + 2z^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{2z^2}{z} \right)$$

$$= \mu_0 \sigma \omega \left(\frac{R^2}{2\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - z \right)$$

Setze $z=0$

hier Vektor

$$\vec{B} = \mu_0 \sigma \omega \cdot \frac{1}{2} R \quad (\checkmark)$$

Vektor

Leiterschleife, $I(r) = \rho A v \rightarrow$ (da dreht sich eigentlich nichts...)

$$= Q(-\omega r)$$

$$I_{\text{ges}} = -Q\omega \int_0^R r dr = -\frac{Q\omega R^2}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r})_{z=0} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} = -\frac{\mu \cdot I}{2R} \quad (\checkmark)$$

4,5

