

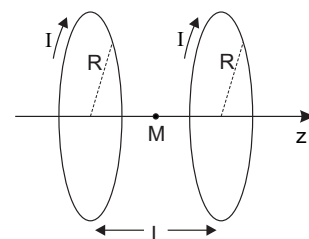
ÜBUNGSAUFGABEN (VI)

(Besprechung am Mittwoch, 27.5.15)

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Zwei identische Spulen mit Radius R sind parallel zueinander im Abstand L angeordnet. Für das Magnetfeld auf der Symmetrieachse einer einzelnen Spule gelte (Spulenmitte im Ursprung):

$$B_s(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$



- Die Ströme in den Spulen mit Betrag I sind gleichsinnig (vgl. Skizze). Berechnen Sie den Abstand L , für den das gemeinsame Magnetfeld B der Spulen im Mittelpunkt M sowie in dessen unmittelbaren Umgebung entlang z weitgehend homogen wird (Helmholtz-Spule).
- Für einige Anwendungen sind hohe Magnetfeldänderungen auf kleinem Raum von Vorteil. Dazu werden die Ströme der Spulen mit Betrag I gegenläufig gewählt. Bestimmen Sie den Abstand L , bei dem der Gradient von B entlang z im Mittelpunkt M maximal wird.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

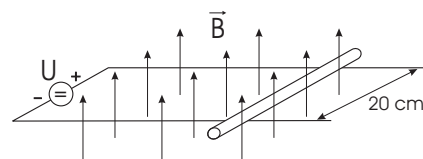
Gegeben sei ein Zylinder der Länge l mit Radius R , auf den ein dünner Draht, durchflossen von einem konstanten Strom I , mit N Windungen spiralartig aufgewickelt ist. Die Zylinderachse falle mit der z -Achse zusammen, der Zylindermittelpunkt ist bei $z = 0$. Bestimmen Sie das B -Feld in z -Richtung für den Mittelpunkt mithilfe des Gesetzes von Biot-Savart. Wählen Sie dafür zunächst eine geeignete Parametrisierung $\vec{r}'(t)$ der Spirale mit Parameter t , drücken Sie das Wegelement $d\vec{r}'$ durch $d\vec{r}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} dt$ aus und lösen Sie schließlich das resultierende Integral.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{H} = (H_x H_y H_z)$ einer in der xy -Ebene unendlich ausgedehnten, leitenden Platte vernachlässigbarer Dicke, in der eine konstante Stromdichte $I' = I/L$ mit dem Strom I pro Einheitslänge L in Richtung der positiven x -Achse fließt. Betrachten Sie dann zwei dieser Platten im parallelen Abstand d und bestimmen Sie deren gemeinsames Magnetfeld $\vec{H}$ für gleiche Stromdichten in derselben oder in entgegengesetzten Richtungen.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Ein dünner Kupferstab der Länge $L = 20 \text{ cm}$ liegt reibungsfrei auf einer schienenartigen Leiterbahn, an der eine Spannung U anliegt. Aufgrund des Kontaktes zu den Leitern fließt ein zeitlich konstanter Strom $I = 1 \text{ A}$ durch den Stab. Die gesamte Anordnung wird von einem homogenen, senkrechten Magnetfeld $B = 1 \text{ T}$ durchdrungen. Berechnen Sie Betrag und Richtung der auf den Stab wirkenden Kraft ausgehend von dem bekannten Ausdruck für die Lorentzkraft $\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}$.



Aufgabe 1

a) Sei $B_g(z) := B_s(z - \frac{L}{2}) + B_s(z + \frac{L}{2})$ ✓

das Feld der zwei Spulen

Feld in $z=0$ homogen $\Leftrightarrow B'_g(0) = 0$

und $B'_g(z) = 0$ an der Stelle $z=0$ heißt, dass das Feld in der Nähe von M homogen bleibt.

$$B'_g(z) = -\frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot 2(z - \frac{L}{2})}{((z - \frac{L}{2})^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\frac{3}{2} \cdot 2(z + \frac{L}{2})}{((z + \frac{L}{2})^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \quad \checkmark$$

$$= -\frac{3}{2} \mu_0 I R^2 \left(-\frac{(z - \frac{L}{2})}{((z - \frac{L}{2})^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(z + \frac{L}{2})}{((z + \frac{L}{2})^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

$$B''_g(z) = -\frac{3}{2} \mu_0 I R^2 \frac{2((z + \frac{L}{2})^2 + R^2)^{\frac{5}{2}} - 2z \frac{5}{2} ((z + \frac{L}{2})^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2(z + \frac{L}{2})}{((z + \frac{L}{2})^2 + R^2)^5}$$

Fehler

$$B''_g(0) = -3 \mu_0 I R^2 \frac{(\frac{L^2}{4} + R^2)^{\frac{5}{2}}}{(\frac{L^2}{4} + R^2)^5} \stackrel{!}{=} 0$$

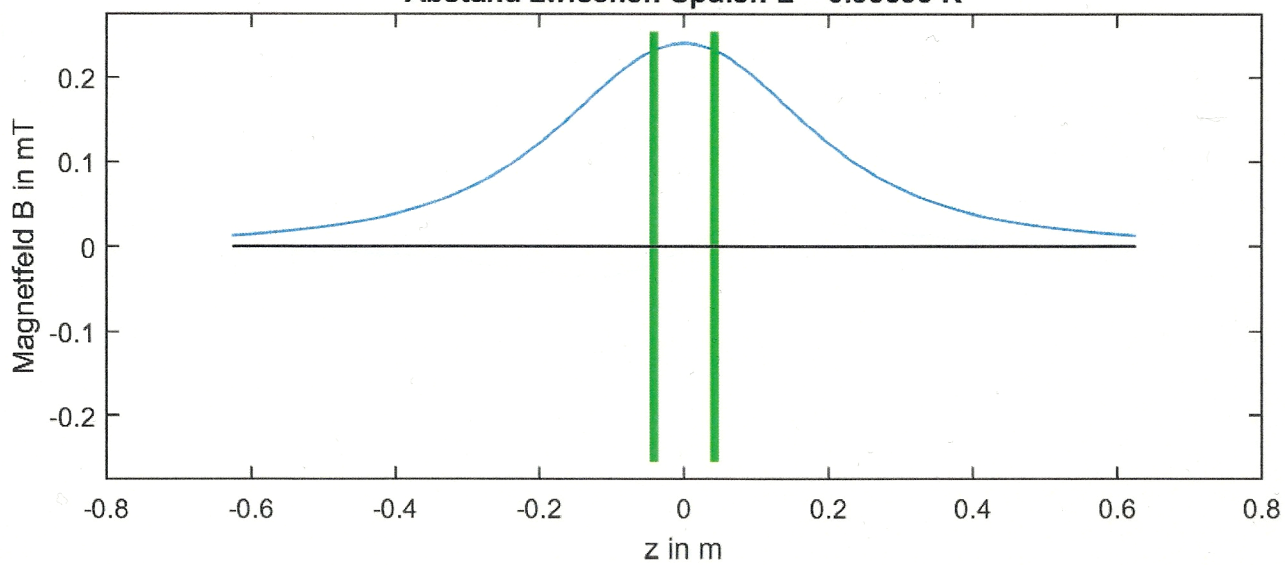
$$\Leftrightarrow -3 \mu_0 I R^2 \left(\frac{L^2}{4} + R^2 \right)^{-\frac{5}{2}} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore & \Rightarrow L^2 = R^2 \\ & L = R \end{aligned}$$

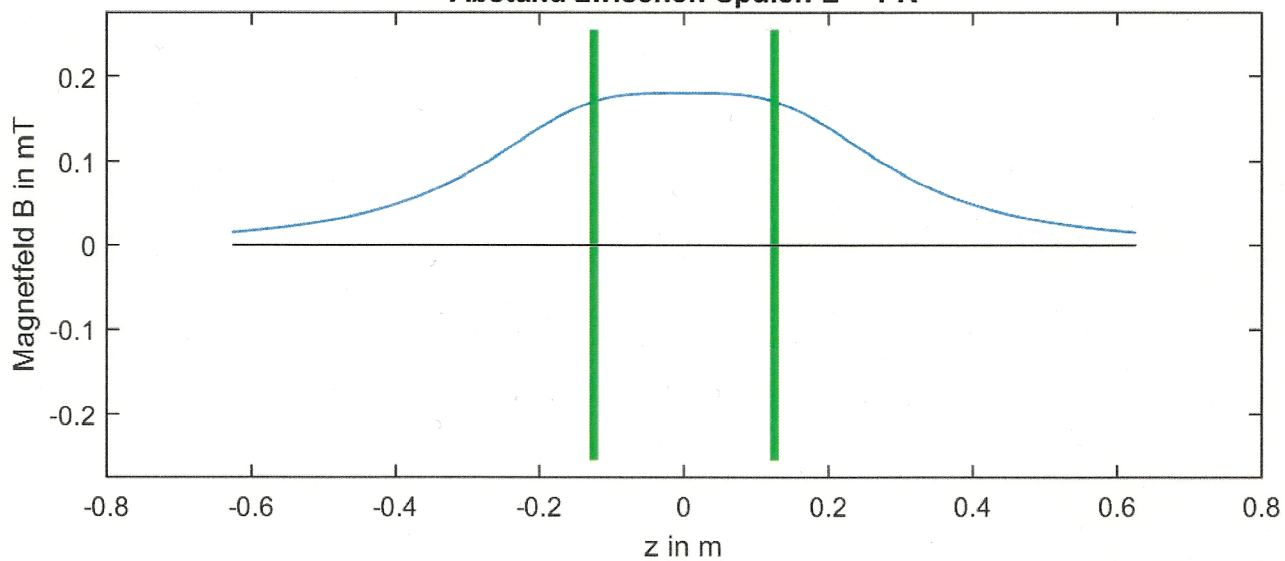
~~$B_g(z)$~~

2. Ableitung gleich $B'(0)$ rechnen
Rechnung $\Rightarrow$ dann $L = R$
= 2. Ableitung

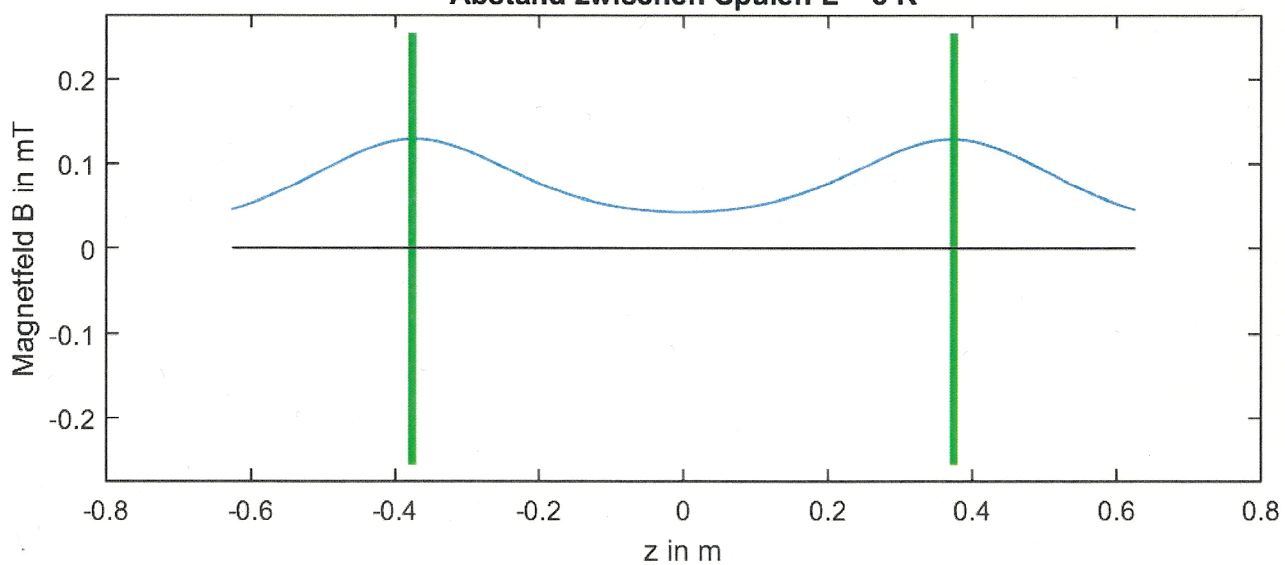
Abstand zwischen Spulen $L = 0.33333 R$



Abstand zwischen Spulen $L = 1 R$



Abstand zwischen Spulen $L = 3 R$



$$b) \quad B_R(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{1}{\left(\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$B'_R(z) = -\frac{3}{2} \mu_0 I R^2 \frac{-L}{\left(\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{5}{2}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Term mit } 2z \\ \text{fehlt (Nenner} \\ \text{unfalsch)} \end{array} \right.$$

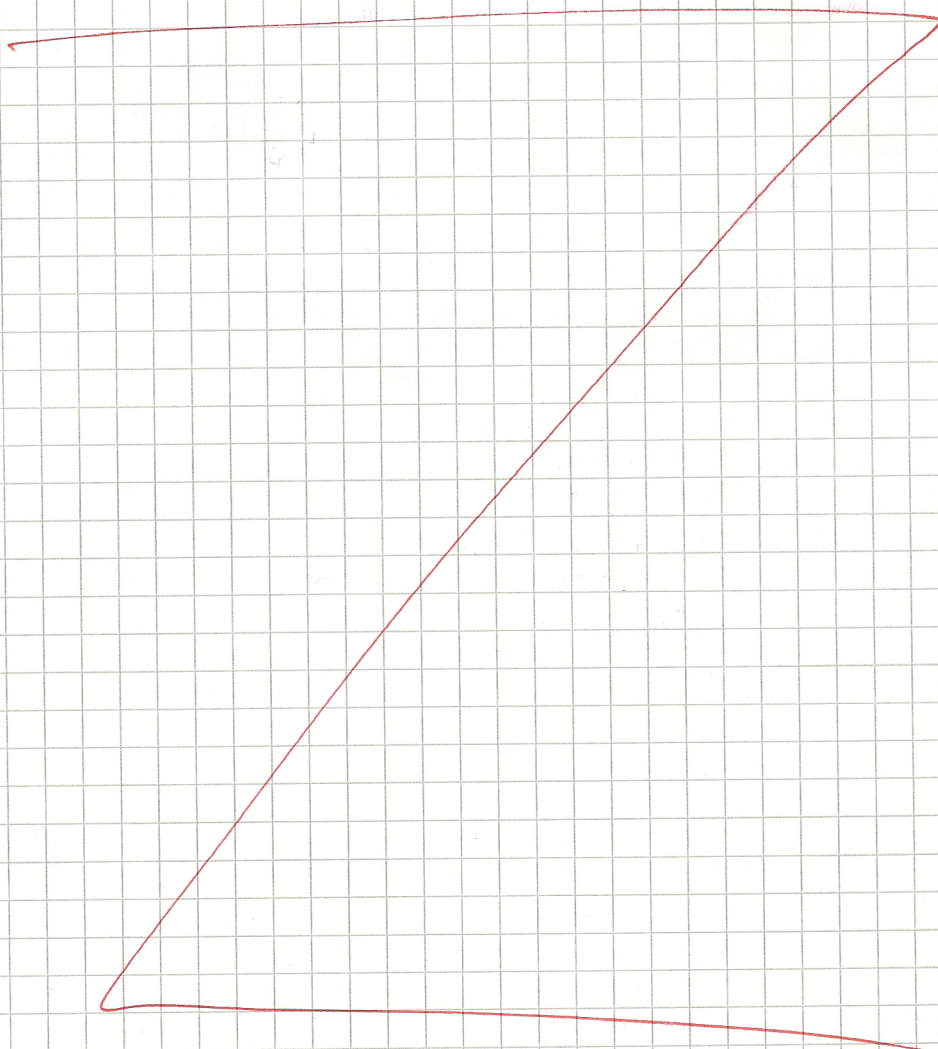
$$B''_R(z) = \frac{3}{2} \mu_0 I R^2 \frac{-\frac{5}{2} L \cdot 2\left(z + \frac{L}{2}\right)}{\left(\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

$$B''_R(0) = \frac{3}{2} \mu_0 I R^2 \frac{-\frac{5}{2} L^2}{\left(\frac{L^2}{4} + R^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

hier nicht
nötig

→ Lösung

1



Aufgabe 2

Parametrisierung nach Zylinderkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cdot \cos(\epsilon) \\ y &= R \cdot \sin(\epsilon) \\ z &= \frac{c}{2\pi N} \cdot t \end{aligned} \right\} t \in [-N\pi, N\pi]$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\epsilon) \\ R \cdot \sin(\epsilon) \\ \frac{c}{2\pi N} t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \begin{pmatrix} -R \sin(\epsilon) \\ R \cos(\epsilon) \\ \frac{c}{2\pi N} \end{pmatrix} dt \quad \checkmark$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' = \begin{pmatrix} -R \cos(\epsilon) \\ -R \sin(\epsilon) \\ z - \frac{c}{2\pi N} t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin(\epsilon) \\ R \cos(\epsilon) \\ \frac{c}{2\pi N} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -R \sin(\epsilon) \frac{c}{2\pi N} - (z - \frac{c}{2\pi N} t) \cdot R \cos(\epsilon) \\ -(z - \frac{c}{2\pi N} t) \cdot R \sin(\epsilon) + R \cos(\epsilon) \cdot \frac{c}{2\pi N} \\ -R^2 \end{pmatrix}$$

Für die z-komp. gilt mit Biot-Savart:

$$B(z) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-N\pi}^{N\pi} \frac{-R^2}{(R^2 + (z - \frac{c}{2\pi N} t))^2} dt \quad \checkmark$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \left(-\frac{2\pi N (z - \frac{c}{2})}{R^2 \sqrt{(z - \frac{c}{2})^2 + R^2}} + \frac{2\pi N (z + \frac{c}{2})}{R^2 \sqrt{(z + \frac{c}{2})^2 + R^2}} \right) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow B(z=0) = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \cdot \frac{2\pi N \frac{c}{2} + 2\pi N \frac{c}{2}}{R^2 \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + R^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I N}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{c}{2})^2 + R^2}} \quad \checkmark$$

4

Aufgabe 3

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I_e \quad \checkmark$$

$$\int_A \vec{H} d\vec{r} + \int_B \vec{H} d\vec{r} = I_e$$

Was ist A, was ist B?

- Da B über Länge L läuft gilt $I = I_e$ (wegen $I' = \frac{I}{e}$)
- $\int_A \vec{H} d\vec{r} \rightarrow 0$, da A sehr klein ($A \rightarrow 0$)

$$\int_B \vec{H} d\vec{r} = I \Leftrightarrow H \cdot L = I \Leftrightarrow H = \frac{I}{L}$$

$$H = \frac{I'}{2}$$

Feld in pos. z-Richtung: $\vec{H}^+ =$

$$\vec{H}^- =$$

was ist
hier?

Bei 2 Platten im Abstand d
1. gleiche Stromrichtung

(i) zwischen Platten

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \vec{H}_A^+ + \vec{H}_B^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{I}{d} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{I}{d} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ kein $\vec{H}$ -Feld

(ii) ober-/unterhalb der Platten

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \vec{H}_A^+ + \vec{H}_B^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{I}{d} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{I}{d} \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{I}{d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ durch Überlappung verdoppelt

2. entgegengesetzte Stromrichtung

(i) zw. Platten

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \vec{H}_A^+ + \vec{H}_B^+ = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{I}{d} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ verdoppelt

(ii) ober-/unterhalb ^{der} Platten

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \vec{H}_A^+ + \vec{H}_B^+ = 0$$

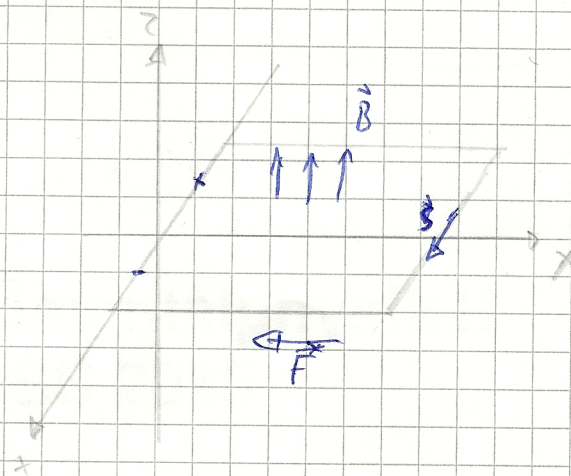
$\rightarrow$ kein $\vec{H}$ -Feld

3

Aufgabe 4

$$\vec{F} = \vec{Q} \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \checkmark$$

$$\vec{s} = s_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1T$$



$$\vec{Q} = \vec{I} \cdot e$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{I} \cdot e \cdot \vec{v} \times \vec{B} \\ &= \vec{I} \cdot \vec{s} \times \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{I} \cdot s_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot B \\ &= I \cdot s \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = 1A \cdot 0,2m \cdot 1T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0,2N \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \checkmark$$

3

