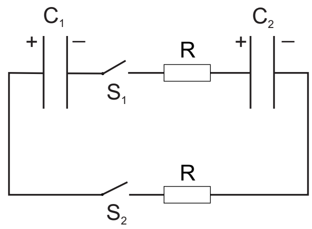
Prof. Dr. M. Wegener / Priv.-Doz. Dr. A. Naber
Übungen zur Klassischen Experimentalphysik II (Elektrodynamik), SS 2015

ÜBUNGSAUFGABEN (IX)
(Besprechung am Mittwoch, 17.6.15)

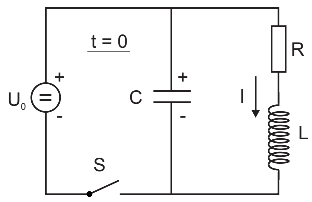
Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zwei Kondensatoren unterschiedlicher Kapazität C_1 und C_2 werden zunächst separat voneinander auf eine Spannung U_0 aufgeladen und dann durch Schließen der Schalter S_1 und S_2 entsprechend der gezeichneten Polarität in der Skizze miteinander verbunden. Berechnen Sie die sich einstellenden konstanten Ladungen Q_1 und Q_2 auf den beiden Kondensatoren nach Schließen der Schalter. Wie groß ist der Verlust an elektrostatischer Energie?



Aufgabe 2: (7 Punkte)

In der skizzierten Schaltung liegt im Gleichgewicht bei geschlossenem Schalter S an der Kapazität C die Spannung $U = U_0$ an und es fließt ein Gleichstrom von $I = U_0/R$ durch Induktivität L und Widerstand R. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geöffnet. Bestimmen Sie die Spannung U am Kondensator als Funktion der Zeit t sowie der Parameter R, C und L. Stellen Sie dazu mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel die Differentialgleichung für die Ladung $Q(t)$ auf und lösen Sie diese für die gegebenen Anfangsbedingungen $Q(0) = C\,U_0$ und $\dot{Q}(0) = -U_0/R$. Beachten Sie, dass in Abhängigkeit der Größe von R drei unterschiedliche Lösungstypen möglich sind. Erstellen Sie schließlich Funktionsplots von $U(t)$ für die Werte $U_0 = 1\,\mathrm{V}$, $C = 1\,\mu\mathrm{F}$, $L = 0.1\,\mathrm{mH}$ sowie $R = 5\,\Omega$, $20\,\Omega$ und $40\,\Omega$ im Zeitintervall von $t = 0$ bis $0.2\,\mathrm{ms}$.



Aufgabe 3: (5 Punkte)

Im Rahmen einer einfachen Elektronentheorie der Metalle wird der ohmsche Widerstand R durch Streuung der Leitungselektronen an den Atomrümpfen erklärt (Drude, 1900). Mit der Dämpfungskraft $F_D = -mv/\tau$ mit Elektronenmasse m, Geschwindigkeit v, der mittleren Zeit τ zwischen den Stößen sowie Elektronenladung q, Elektronendichte n und Winkelfrequenz ω erhält man für die Leitfähigkeit in einem elektrischen Wechselfeld $E = E_0\,\exp(i\omega t)$

$$\sigma(\omega) = \frac{nq^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} \; .$$

a) Leiten Sie diesen Ausdruck mit Hilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung her.

b) Zeigen Sie, dass der Widerstand R eines Leiters der Länge l und Querschnittsfläche A einen Imaginärteil ωL_k aufweist (Blindwiderstand) mit $L_k = ml/nq^2A$ („kinetische Induktivität“).

c) Berechnen Sie die kinetische Energie E_{kin} der Elektronen im Leiter als Funktion des Stroms I und zeigen Sie, dass $E_{\mathrm{kin}} = L_k I^2/2$.

d) Mit der Inneninduktivität L_i ist die Energie des Stroms im Leiter $E_{\mathrm{ges}} = (L_i + L_k)\,I^2/2$. Für welche Durchmesser d eines zylindrischen Leiters aus Kupfer überwiegt der Beitrag von L_k gegenüber dem von L_i ($n_{\mathrm{Cu}} = 8.5 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$)?


PHYSIK
BRITZEL
ELEKTRO- UND
INFORMATIONSTECHNIK
FACHSCHAFTS-
SOMMERFEST
MIT ~~KA~~300 kA!
MITTWOCH 10.6. 18:30
ROTER PLATZ
BEIM AKK
COCKTAILS
BIER
GRILL
BRITZEL
Tidal Flames
Acrimonic
Toney

Was meint ihr damit?

$$\Delta W = \frac{1}{2}\Delta Q \cdot U$$

$$= \frac{1}{2}(\Delta Q_1 + \Delta Q_2) \cdot U$$

Was ist U?

$$= \frac{1}{2} U_0 \left(C_2 \left(\frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1} \right) + C_1 \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right) \right) \cdot U$$

0P

$$\Delta W = W - W'$$

Differenz energie

vorher

nacher

$$\sum_{A1} = 1{,}5\,P$$

vorher: $Q_i = C_i \cdot U_0$

$$E = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) U_0^2$$

nachher $Q_i' = C_i U_i'$

$$U_1' = -U_2' = U'$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) U'^2$$

$$Q_{ges} = |Q_1 - Q_2| = |Q_1' + Q_2'|$$

$$|C_1 - C_2| U_0 = |C_1 + C_2| U'$$

$$U' = U_0 \frac{|C_1 - C_2|}{|C_1 + C_2|}$$

$$Q_i' = C_i U_0 \left| \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right| = Q_i \left| \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right|$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)(U_0^2 - U'^2)$$

$$= \frac{1}{2}(C_1 + C_2) U_0^2 \left(C_1 + C_2 - \frac{(C_1 - C_2)^2}{C_1 + C_2} \right)$$

$$= \cancel{2 (C_1 + C_2) U_0^2}$$

$$= 2 U_0^2 \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

2

$U(t) = \frac{Q}{C} + RI + L\dot{I}$ ✓

$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \dot{Q}\frac{1}{C} = 0$ ✓ „homogen"

$\frac{1}{C}c_0e^{\lambda t} + R\lambda c_0 e^{\lambda t} + Lc_0\lambda^2 e^{\lambda t} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$?

Ansatz? (zuerst)

Magie o. abgeschrieben?

Partikuläre Lösung: $\underbrace{L\ddot{Q}}_{=0} + \underbrace{R\dot{Q}}_{=0} + Q\frac{1}{C} = U_0 \Rightarrow Q = U_0 \cdot C$

1. Fall: $\sqrt{} > 0$

$\lambda_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$ $\lambda_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$

$\delta = \frac{R}{2L}$

$\omega = \frac{1}{LC}$

2. Fall: $\sqrt{} < 0$

$\lambda_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$ $\lambda_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$

$= \delta - i\omega$ $= \delta - i\omega$

3. Fall: $\sqrt{} = 0$

$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L}$

1. Fall = Reell: $\delta^2 > \omega$ (starke Dämpfung)

$Q(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + U_0C$

$Q(0) = c_1 + c_2 + U_0C = U_0C \Leftrightarrow c_1 = -c_2$

$\dot{Q}(t) = c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}$

$\dot{Q}(0) = -\frac{U_0}{R} = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = -c_2\lambda_1 + c_2\lambda_2 = c_2(\lambda_2 - \lambda_1)$

$\Rightarrow c_2 = -\frac{U_0}{R(\lambda_2-\lambda_1)} \Rightarrow c_1 = \frac{U_0}{R(\lambda_2-\lambda_1)}$

$Q(t) = \frac{U_0}{R(\lambda_2-\lambda_1)}e^{\lambda_1 t} - \frac{U_0}{R(\lambda_2-\lambda_1)}e^{\lambda_2 t} + U_0C$ f

2\. Fall = komplex: $\omega > \delta^2$ (schwache Dämpfung)

$$Q(t) = c_1 e^{\delta t} \cos(\omega t) + c_2 e^{\delta t} \sin(\omega t)$$

$$Q(t) = c_1 e^{(-\delta + i\sqrt{\omega - \delta^2})t} + c_2 e^{(-\delta - i\sqrt{\omega - \delta^2})t}$$

$$Q(0) = U_0 C = c_1 + U_0 C \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\dot{Q}(0) = -\frac{U_0}{R} = c_2 \omega \Rightarrow c_2 = -\frac{U_0}{R\omega}$$

$$Q(t) = -\frac{U_0}{R\omega} e^{\delta t} \sin(\omega t) + U_0 C$$

Woher? Mehr Text + mehr Rechnung!

$$U(t) = U_0 e^{-\delta t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\sigma - \frac{1}{RC}}{\omega} \sin(\omega t)\right)$$

3\. Fall = aperiodischer Grenzfall: $\delta^2 = \omega$

$$\phi = \phi_H + \phi_p$$

„homogen + partikulär"

$$= c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} t + U_0 C$$

mehr Text!

$$Q(0) = c_1 + U_0 C = U_0 C \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\dot{Q}(0) = c_2 e^{\lambda 0} + \lambda 0 c_2 e^{\lambda 0} + U_0 C = -\frac{U_0}{R} \Rightarrow c_2 = -\frac{U_0}{R}$$

$$Q(t) = -\frac{U_0}{R} e^{\lambda t} \cdot t + U_0 C \quad f$$

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \left(1 + \frac{R}{4L} \cdot t\right)$$

$$\sum_{A2} = 2P$$

3)

a) $E = E_0 e^{i\omega t}$

$F_D = m \frac{v}{\tau}$

$m \cdot \dot{v} = q \cdot E - \frac{m \cdot v}{\tau}$

$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{qE_0}{m} e^{i\omega t}$ Ansatz: $v(t) = v_0 e^{i\omega t}$

$i\omega v_0 + \frac{v_0}{\tau} = \frac{qE_0}{m} \Rightarrow v_0 = \frac{qE_0\tau}{m(1+i\omega t)}$

$j = n \cdot q \cdot v = \frac{n \cdot q^2 E \tau}{m(1+i\omega\tau)} \Leftrightarrow \cancel{\text{mit}}\ j = \sigma E \Rightarrow \sigma = \frac{nq^2\tau}{m(1+i\omega t)}$

b) $U = El$

$I = jA = \sigma \frac{U}{l} A \Rightarrow R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{ml}{nq^2 A\tau} + i\omega \underbrace{\frac{m}{nq^2} \frac{l}{A}}_{L_K}$

c) $E_{kin,e} = \frac{m_e}{2} v^2 \Rightarrow E_{kin,ges} = N \cdot E_{kin,e}$

$v = j/q \cdot n = \frac{I}{q n \cdot A}$ mit $n = \frac{N}{V} = \frac{N}{A \cdot l}$

$E_{kin,ges} = N \cdot \frac{m_e}{2} \cdot \left(\frac{j}{q \cdot n}\right)^2 = N \cdot \frac{m_e}{2} \left(\frac{I}{q n \cdot A}\right)^2 = \frac{1}{2} I^2 \cdot \underbrace{\frac{m_e l}{q^2 n A}}_{= L_K}$

d) $\frac{L_i}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} = 5 \cdot 10^{-8} \frac{Vs}{Am}$

$L_K > L_i \Rightarrow A < \frac{8\pi}{\mu_0} \frac{m}{nq^2}$

$\Rightarrow d < \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0{,}33\,\mu m$