

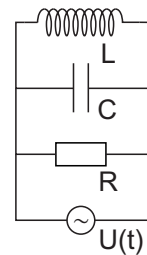
ÜBUNGSAUFGABEN (X)

(Besprechung am Mittwoch, 24.6.15)

Aufgabe 1: (5 Punkte)

In der nebenstehenden Schaltung liege eine Spannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ mit der Amplitude $U_0 = 5 \text{ V}$ und der Frequenz $f = \omega/2\pi = 10 \text{ kHz}$ an.

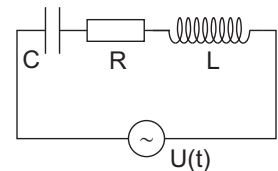
- Verwenden Sie die komplexen Widerstände Z_C , Z_L und Z_R von Kapazität, Induktivität und ohmschem Widerstand zur Berechnung der Ströme $I_C(t)$, $I_L(t)$ und $I_R(t)$ durch die entsprechenden Bauelemente. Erläutern Sie die physikalischen Ursachen der Phasenverschiebungen.
- Dimensionieren Sie L und R derart, dass alle Stromamplituden bei einer Kapazität von $C = 1 \mu\text{F}$ gleich groß werden. Tragen Sie dann in einem Diagramm Spannung und Ströme im Zeitintervall von 0 bis 0.1 ms auf. Wie groß ist der Gesamtstrom?



Aufgabe 2: (7 Punkte)

Gegeben ist der skizzierte Schaltkreis mit den Werten $L = 0.4 \text{ H}$, $C = 100 \mu\text{F}$ und $R = 100 \Omega$ für Induktivität, Kapazität und Widerstand. Die Spannung variere harmonisch, $U(t) = U_0 \cos \omega t$, mit einer Effektivspannung von $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$ bei einer Frequenz von $f = 50 \text{ Hz}$.

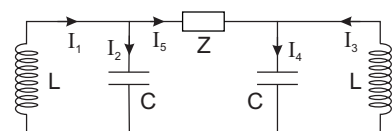
- Bestimmen Sie den Scheinwiderstand $Z_{\text{ges}} = |Z_{\text{ges}}| e^{i\varphi}$ in Abhängigkeit von L , C , R und $\omega = 2\pi f$. Diskutieren Sie den Verlauf von $|Z_{\text{ges}}|$ und φ hinsichtlich kleinen und großen Frequenzen sowie möglichen Extrema. Zeichnen Sie anschließend $|Z_{\text{ges}}|$ und φ als Funktion von ω im relevanten Frequenzbereich.
- Wie groß ist die mittlere Verlustleistung $\langle P \rangle$ der Gesamtschaltung für die gegebenen Werte?



Aufgabe 3: (5 Punkte)

Zwei gleichartige Schaltkreise mit Kapazität C und Induktivität L („Schwingkreise“) werden mittels einer Kapazität C_k mit komplexem Widerstand $Z = 1/i\omega C_k$ gekoppelt (vgl. Skizze).

- Bestimmen Sie die Frequenzen der elektrischen Eigenschwingungen in den gekoppelten Schaltkreisen.
- Statt kapazitiv werden die Schwingkreise induktiv gekoppelt mit $Z = i\omega L_k$. Wie ändern sich dadurch die resultierenden Eigenfrequenzen?



Anleitung: Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln ein Gleichungssystem für die Ströme I_i ($i = 1 \dots 5$) durch die fünf Bauelemente auf und lösen Sie dieses durch Gleichsetzen der Determinante der Koeffizientenmatrix mit Null.

1) a)

① Ohmscher Widerstand $Z_R = R$ ✓

$$I_R(t) = \frac{U(t)}{Z_R} = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) \quad \checkmark$$

② Induktivität $Z_L = i\omega L$ ✓

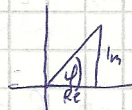
$$|Z_L| = \sqrt{(i\omega L)^2} = \omega L$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{\operatorname{Re}(Z_L)}\right)$$

da $\operatorname{Re}(Z_L) = 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{\omega L}{x}\right) = \frac{\pi}{2} = \varphi$

$$\Rightarrow Z_L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \checkmark \text{ gut!}$$

ungenügend als Diskussion
(physikalisch interpretiert)



$$I_L(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t) e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{U_0}{\omega L} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}_{\sin} \quad \checkmark$$

③ Kapazität $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ ✓

$$|Z_C| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega C} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re}(Z_C)}\right) \rightarrow \text{s.o.}$$

und hier gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(-\frac{1}{\omega C} \cdot \frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$I_C(t) = U_0 \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \checkmark$$

b) $I_c(t) = \underline{U_0 \omega C} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ „wegen Symmetrie ~ zu Vorderseite“

$$I_c(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

„Amplitude“ ✓

Vorsicht: unterstrichen
Synode bedenk in der
E-Technik = a

$$\frac{U_0}{\omega L} = + U_0 \omega C = \frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C} \checkmark$$

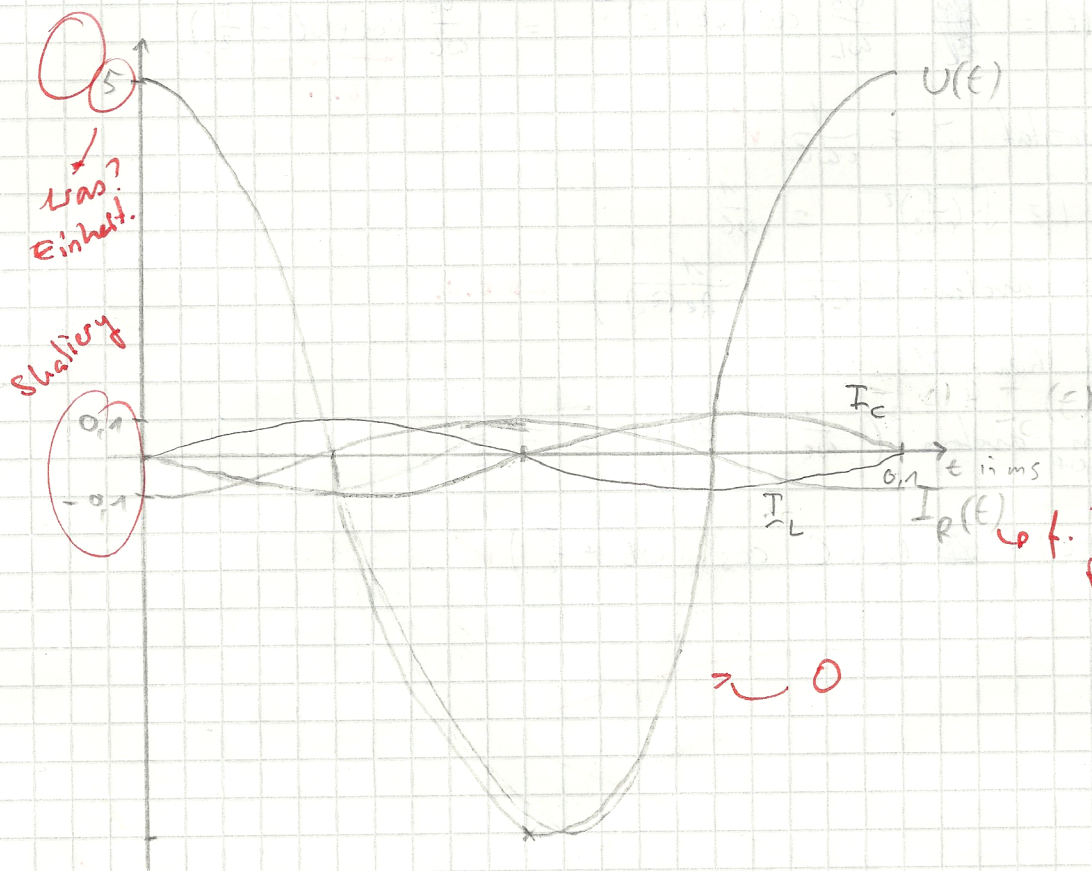
$$\Rightarrow R = \frac{1}{\omega C} \checkmark$$

= Zahlenwerte

0,1

Gesamtstrom $I_G(t) = I_R(t) + I_L(t) + I_C(t) = \text{Wert?}$

$$I_G(t) = -U_0 \omega C \cos(\omega t) + U_0 \omega C \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + U_0 \omega C \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



Was? Einheit.

Skaliert

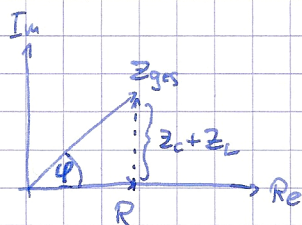
f. I_L ist in Phase mit Spannung! anders herum

~ 0

2,5

Aufgabe 2

a) $Z_R = R$ $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$ $Z_L = i\omega L$



$$|Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + (Z_C + Z_L)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)^2} \quad \checkmark$$

$z = a + i \cdot b$
 $\text{Im}(z) = b$ (ohne i!)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \arctan\left(\frac{i\omega L - \frac{i}{\omega C}}{R}\right)$$

$$Z_{ges} = \sqrt{R^2 + \left(i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)^2} e^{i \arctan\left(\frac{i\omega L - \frac{i}{\omega C}}{R}\right)}$$

kleine Frequenzen: $\omega \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ $\checkmark$, $|Z_{ges}| \rightarrow +\infty$ $\checkmark$

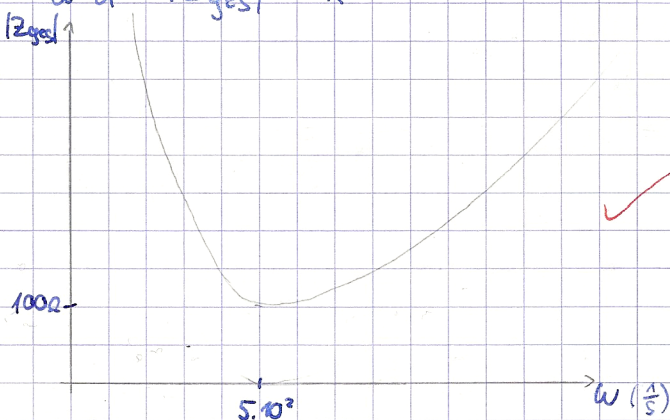
große Frequenzen: $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\checkmark$, $|Z_{ges}| \rightarrow +\infty$ $\checkmark$

möglicher Extrempunkt, wenn $\left(i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)^2 = 0$,

d.h. $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ $\checkmark$

dann ist $\varphi = 0$ und $|Z_{ges}| = R$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{LC}} &= \frac{5 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{400 \cdot 10^{-9}}} \\ &= \frac{1}{20 \cdot 10^{-\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$



[Graph für φ ist unten]

$$b) \quad \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad \checkmark \quad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) \quad \checkmark$$

An der Kapazität und an der Induktivität: kein Leistungsabfall

→ ja, aber sorgt dafür, dass Strom und Spannung phasenverschoben sind. Das führt zu geringerer Leistung in R!

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U(t)}{R}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \frac{\cos^2(\omega t)}{R} dt$$

$$= \frac{1}{T} \frac{U_0^2}{R} \left[\frac{1}{2} (\cos(\omega t) \sin(\omega t + t)) \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \boxed{\frac{U_{eff}^2}{R}} \quad \checkmark$$

a) (Rest)

$\varphi(\text{rad})$

$\frac{\pi}{2}$

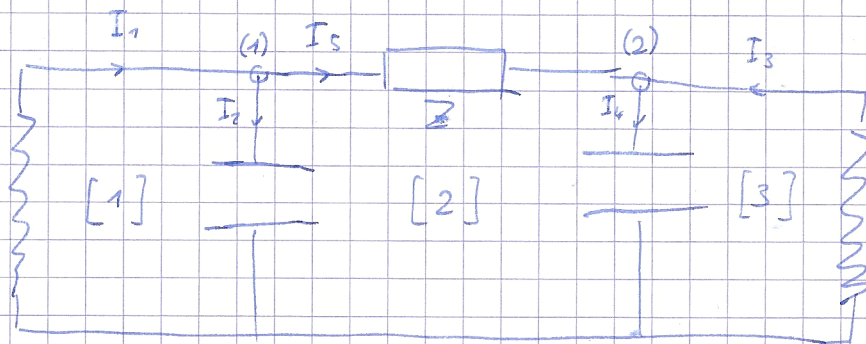
$-\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{\omega C}$

$\omega(\frac{1}{LC})$

5

Aufgabe 3



Knotenregel: (1): $I_1 = I_2 + I_5 \Rightarrow$

$$I_1 - I_2 - I_5 = 0$$

(2): $I_4 = I_5 + I_3 \Rightarrow$

$$I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

Maschenregel: [1]: $-L \cdot \dot{I}_1 = \frac{Q_2}{C}$

[2]: $\frac{Q_5}{Z} + \frac{Q_4}{C} = \frac{Q_2}{C}$

[3]: $-L \cdot \dot{I}_3 = \frac{Q_4}{C}$

Mit dem Ansatz $I = I_0 e^{i\omega t}$

findet man: $\bullet \dot{I} = i\omega I_0 e^{i\omega t} = i\omega I$

$\bullet Q = \int I dt = \frac{I_0}{i\omega} e^{i\omega t} = \frac{I}{i\omega}$

[1]: $\frac{I_2}{i\omega C} + L i\omega I_1 = 0$ ✓ [2]: $\frac{i\omega I_5 C}{i\omega} + \frac{I_4}{i\omega C} - \frac{I_2}{i\omega C} = 0$ ✓

[3]: $\frac{I_4}{i\omega C} + L i\omega I_3 = 0$ ✓

$\Rightarrow$ [1]: $I_2 - CL\omega^2 I_1 = 0$ [2]: $-I_2 + I_4 + I_5 i\omega C = 0$

[3]: $I_4 - CL\omega^2 I_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ CL\omega^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{C}{\omega} \\ 0 & 0 & CL\omega^2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{C}{CL} \\ 0 & CL\omega^2 - 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + CL\omega^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{C}{CL} \\ 0 & CL\omega^2 - 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{C}{CL} \\ CL\omega^2 - 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - CL\omega^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{C}{CL} \\ CL\omega^2 - 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - CL\omega^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ CL\omega^2 - 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Sarrus

$$= -CL\omega^2 \frac{C}{CL} - CL\omega^2 + \frac{C}{CL}$$

$$- CL\omega^2 \left(-CL\omega^2 \frac{C}{CL} - CL\omega^2 + \frac{C}{CL} \right)$$

$$- CL\omega^2 (1 - CL\omega^2)$$

$$= -C^2 L \omega^2 \frac{1}{CL} - CL\omega^2 + \frac{C}{CL} + C^3 L^2 \omega^2 \frac{1}{CL} + C^2 L^2 \omega^4 - C^2 L \omega^2 \frac{1}{CL}$$

$$- CL\omega^2 + C^2 L^2 \omega^4$$

$$= \omega^2 \left(-C^2 L \frac{1}{CL} - CL + C^3 L^2 \frac{1}{CL} - C^2 L \frac{1}{CL} - CL \right) + \omega^4 (C^2 L^2 + C^2 L^2) + \frac{C}{CL}$$

$\lambda = \omega^2$

$$= \lambda^2 2C^2 L^2 + \lambda \left(C^3 L^2 \frac{1}{CL} - 2C^2 L \frac{1}{CL} - 2CL \right) + \frac{C}{CL}$$

$$= (\lambda C)^2 2L^2 + \lambda C \left(C^2 L^2 \frac{1}{CL} - 2CL \frac{1}{CL} - 2L \right) + \frac{C}{CL}$$

$C = aCL$

$$= 2\lambda^2 C^2 L^2 + \lambda (a C^2 L^2 - 2aL - 2L) + a$$

Lösungen für $\omega \hat{=}$ Eigenwerte

$$\omega_+ = \pm \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \checkmark$$

$$\omega_- = \pm \sqrt{\frac{a}{(2+a)LC}} \quad \checkmark$$

b) Gleichungen (1), (2), (3) gelten

$$[2]': \quad \frac{Q_5}{Z} + \frac{Q_4}{C} - \frac{Q_2}{C} = 0$$

$$-\frac{I_5}{\omega L_k} + \frac{I_4}{i\omega C} - \frac{I_2}{i\omega C} = 0$$

$$\boxed{-\frac{iI_5}{\omega L_k} + I_4 - I_2 = 0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ CL\omega^2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -\frac{i}{\omega L_k} \\ 0 & 0 & CL\omega^2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{i\omega L_k} \\ 0 & CL\omega^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + CL\omega^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{i\omega L_k} \\ 0 & CL\omega^2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{i\omega L_k} \\ CL\omega^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{i\omega L_k} \\ CL\omega^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & CL\omega^2 & -1 \end{vmatrix} \cdot CL\omega^2$$

Sarrus

$$= -CL\omega^2 - CL\omega^2 + \frac{1}{i\omega L_k}$$

$$-CL\omega^2 \left(-CL\omega^2 - CL\omega^2 - \frac{1}{i\omega L_k} \right)$$

$$+ CL\omega^2 (CL\omega^2 + 1)$$

$$= -2CL\omega^2 + \frac{1}{i\omega L_k} + C^2 L^2 \omega^4 + C^2 L^2 \omega^4 + \frac{CL\omega^2}{i\omega L_k} + C^2 \omega^4 + CL\omega^2$$

$$0 = 3C^2 L^2 \omega^4 - CL\omega^2 + \frac{1}{i\omega L_k} + \frac{CL\omega}{iL_k}$$

$$L_k := b \cdot L$$

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{b+2}{bLC}}$$


$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{LC}}$$