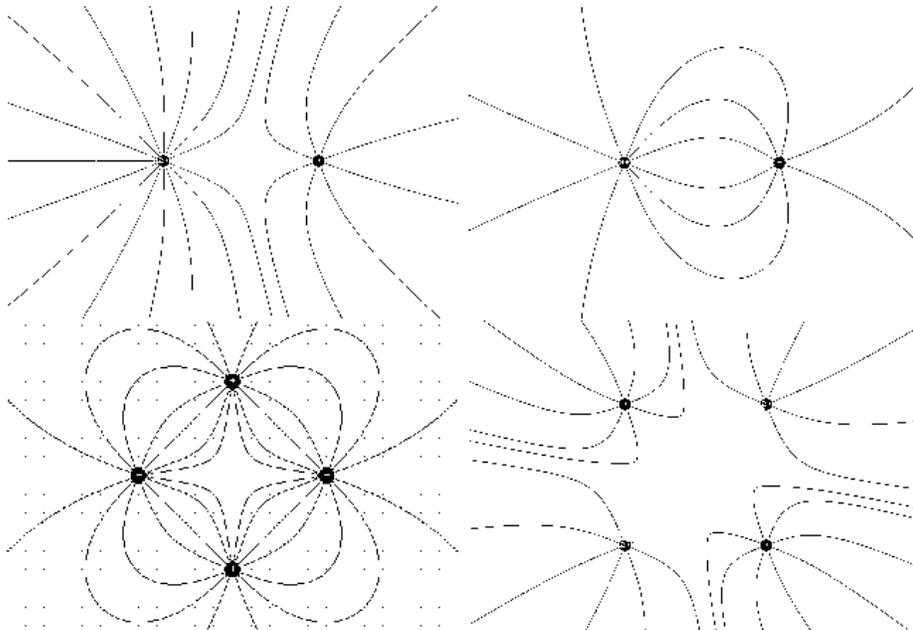
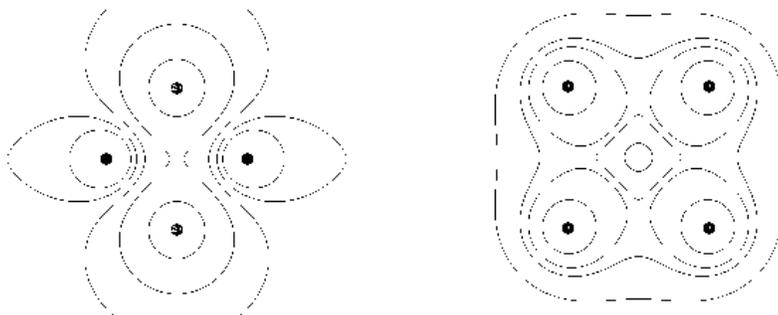


1. Felder und Potentiale

(a) Zeichnen sie die E-Felder ein.



(b) Zeichnen sie die Äquipotentiale ein.



2. Ladung

Wieviele Elektronen sind in 1 Coulomb (C) enthalten?

Welche Ladung Q und Masse m hat $n=1$ Mol Elektronen.

Antwort: a) $6,24 \cdot 10^{18}$; b) $\frac{Q}{n} = \frac{N_A}{e} = F = 96485 \frac{C}{mol}$ (Faraday – Konstante), somit $Q \approx 10^5 C$, $m \approx 0,55 mg$.

3. elektrische Kraft und Gravitation

- (a) Die Gravitation $F_{\text{Grav.}}$ und die elektrische Kraft $F_{\text{elektr.}}$ sind radiale Kräfte und es gilt für die Kraft zwischen zwei Elektronen:

$$F_{\text{Grav.}} = \gamma \frac{m_e^2}{r^2} \quad ; \quad F_{\text{elektr.}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Mit den Konstanten $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} C/(Vm)$ und $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}/\text{kg}$ folgt dann

$$\left| \frac{F_{\text{elektr.}}}{F_{\text{Grav.}}} \right| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma m_e^2} = 4.167 \cdot 10^{42}$$

- (b) Damit beide Kräfte betragsmässig gleich groß sind, müsste die quadratische Masse m_e^2 um genau den Faktor $4.167 \cdot 10^{42}$ größer sein. Daraus folgt, dass das Elektron eine Masse von

$$m'_e = \sqrt{4.167 \cdot 10^{42}} m_e = 2.04 \cdot 10^{21} m_e = 1.86 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

besitzen müsste.

- (c) Bleiklumpen

$$|F_G| = |F_C| \iff \frac{G \cdot m^2}{r^2} = \frac{q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow q = \pm m \sqrt{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot G} = 8.62 \cdot 10^{-10} C \quad (2)$$

Das sind $N_e = \frac{q}{e} = 5.378 \cdot 10^9$ Elementarladungen. Anzahl Pb-Atome in 10kg:
 $N_{PB} = \frac{m \cdot N_A}{M_{Pb}} = \frac{m \cdot N_A}{M_{Pb}} = 2.91 \cdot 10^{25}$ mit m_P Masse eines Pb-Atome und
 $M_{Pb} = \frac{0.2072 \text{ kg}}{\text{mol}}$ molare Masse von Pb.

Anzahl benötigter Ladungen vgl. mit Anzahl Pn-Atomen pro Kugel $\frac{N_e}{N_{PB}} = 1.85 \cdot 10^{-16}$

4. Punktladungen und Kräfte

Die Ladungen q_1 und q_2 befinden sich auf der x -Achse, die Ladung q_3 hat den gleichen Abstand r zu beiden Ladungen auf der x -Achse, die Koordinaten von q_3 in der x - y -Ebene sind folglich $x_3 = 0.5(x_2 + x_1)$ und $y_3 = \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2}$.

(a) Für den Vektor \vec{r}_{13} ergibt sich dann

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_2+x_1}{2} \\ \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für den Einheitsvektor

$$\hat{r}_{13} = \frac{\vec{r}_{13}}{|\vec{r}_{13}|} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

und für die Kraft auf q_3

$$\vec{F}_{13} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r^2} \cdot \hat{r}_{13} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

Analog ergibt sich

$$\vec{F}_{23} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r^2} \cdot \hat{r}_{23} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2} \\ -\sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2} \end{pmatrix}$$

Insgesamt wirkt auf q_3 somit die Kraft

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_3}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_2-x_1}{2}(q_1 - q_2) \\ \sqrt{r^2 - 0.25(x_2 - x_1)^2}(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

Mit den angegebenen Werten für die Ladung q_1 sowie die Koordinaten x_1 und x_2 und $q_2 = -4q_1$ ergibt sich hieraus

$$\vec{F} = 2.88 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 7.5 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{F}| = 2.88 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{56.25 + 36} = 2.77 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

(b) Für den Fall $q_2 = q_1$ ergibt sich direkt aus der allgemeinen Beschreibung von \vec{F} in Teilaufgabe (a):

$$\vec{F} = 2.88 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad |\vec{F}| = 1.15 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

- (c) Mit $x_3 = x$ und $x_1 = 0$ ergibt sich für die auf der x -Achse liegende Ladung q_3 die Kraft (in der x -Achse, deshalb betrachten wir im folgenden die Kraft als Skalar), wobei wir $q_2 = N \cdot q_1$ gesetzt haben:

$$F = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\delta_1}{x^2} + \frac{\delta_2 \cdot N}{(x - x_2)^2} \right)$$

mit $\delta_1 = \text{sign}(x)$, $\delta_2 = 1$ für $x > x_2$ und $\delta_2 = -1$ für $x < x_2$ und $N > 0$ sowie $\delta_2 = -1$ für $x > x_2$ und $\delta_2 = 1$ für $x < x_2$ und $N < 0$. Für die Nullstellen muss gelten

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta_1}{x^2} + \frac{\delta_2 \cdot N}{(x - x_2)^2}$$

Für den ersten Fall gilt $q_1 = q_2 = 2q_3$ und somit folgt:

$$\begin{aligned} x < 0 & : \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{keine Lsg.} \\ x > x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{keine Lsg.} \\ 0 < x < x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = x_2/2 \end{aligned}$$

Für den zweiten Fall gilt $q_1 = 2q_3$ und $N = -4$ und somit folgt:

$$\begin{aligned} x < 0 & : \frac{-1}{x^2} + \frac{4}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = (-1/3 \pm 2/3)x_2 \\ 0 < x < x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{4}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{keine Lsg.} \\ x > x_2 & : \frac{1}{x^2} + \frac{-4}{(x - x_2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = (-1/3 \pm 2/3)x_2 \end{aligned}$$

Für $x < 0$ gibt es also nur eine Lösung, und zwar $x = -x_2$, für $x > x_2$ gilt für die möglichen Lösungen $x_{1/2} < x_2$, also gibt es hier keine weiteren Nullstellen. Diese Lösungen können natürlich auch aus Symmetrieüberlegungen und der Skizze der Kraft als Funktion des Ortes x erhalten werden.

5. Potential eines Punktladungssystems, Potentialdifferenz (Spannung)

Das Potential einer einzelnen Punktladung Q im Abstand r von ihr berechnet sich zu $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Das von mehreren Ladungen erzeugte resultierende Potential an einem beliebigen Ort P ergibt sich durch Addition der Einzelpotentiale φ_i , die von den Ladungen Q_i mit den Abständen r_i von P unabhängig voneinander erzeugt werden. In Bezug auf den Eckpunkt P_1 ist also

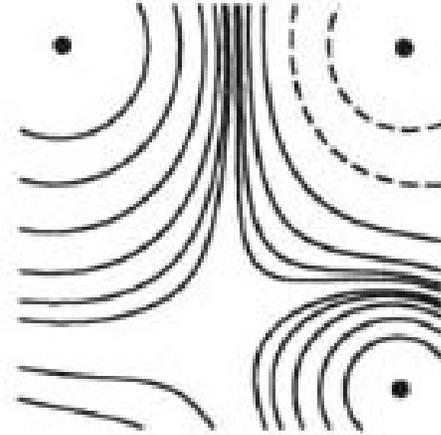
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{r_{1i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{a\sqrt{2}} + \frac{Q_3}{a} \right) \quad (3)$$

Die Ladungen Q_i sind vorzeichenbehaftet einzusetzen. Mit $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 \text{ m/C}$ und den übrigen Werten erhält man $\varphi_1 = 58,1 \text{ V}$. Für P_2 als Aufpunkt, der zu allen 3

Ladungen den Abstand $a\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ hat folgt.

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{r_{1i}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_o} (Q_1 + Q_2 + Q_3) = 63,6V \quad (4)$$

Die Spannung U zwischen P_1 und P_2 ist gleich der Potentialdifferenz $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 5.5V$. Das Bild zeigt für das hier betrachtete Punktladungssystem die Linien



konstanten Potentials (Äquipotentiallinien).

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT

Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer

Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu

Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm