**Institut für Experimentelle Kernphysik, KIT**

## Übungen zur Klassischen Physik II (Elektrodynamik) SS 2016

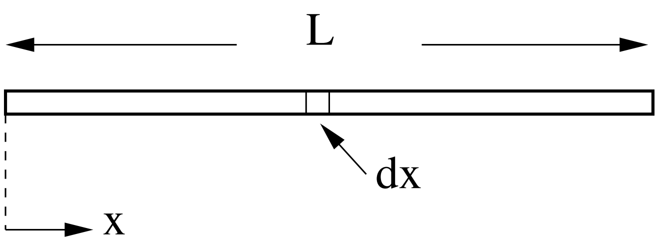
Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann **Blatt 2** Bearbeitung: 04.5.2016

---

**1.** Aktio = Reaktio

(i)

**2.** Ladungsverteilung I



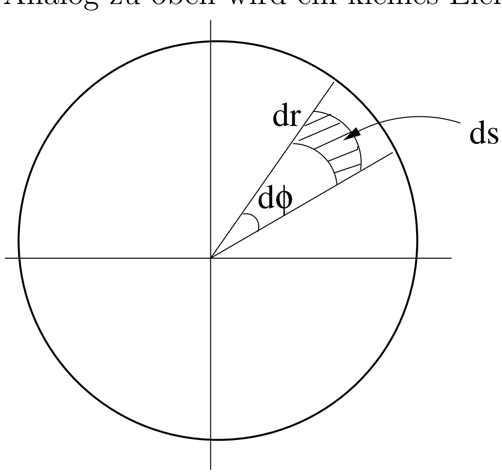

Betrachten Sie ein kleines Element $dx$. Die Ladung in diesem Element ist gegeben durch $dQ = \lambda\ dx$. Damit ergibt sich für die Gesamtladung:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^L \lambda\ dx \\
&= \int_0^L \lambda_0(1-x/L)x/L\ dx = \frac{\lambda_0}{L}\left[\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{3}\right] \\
Q &= \frac{\lambda_0 L}{6}
\end{aligned}$$

Die mittlere lineare Ladungsdichte, $\bar{\lambda} = Q/L = \lambda_0/6$

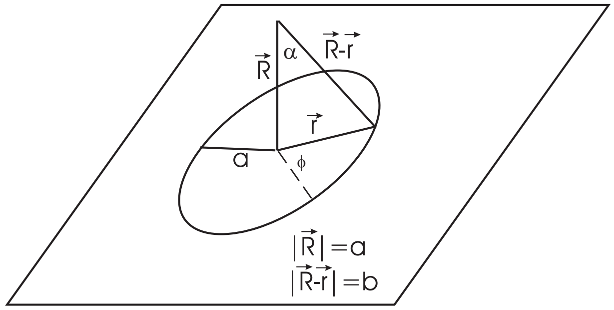
**3.** Ladungsverteilung

**(a)** Ladung
Analog zu oben wird ein kleines Element $ds$ der Scheibe betrachtet:




$$\begin{aligned}
dQ &= \sigma\ ds = \sigma\ r\ d\phi\ dr \\
(i)\ \ Q &= \frac{\sigma_0}{a}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^2 dr \\
\rightarrow Q &= \frac{2\pi\sigma_0 a^2}{3} \\
(ii)\ \ Q &= \sigma_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r e^{-r/a} dr \\
\rightarrow Q &= 2\pi\sigma_0 a^2 \left(1 - 2/e\right)
\end{aligned}$$

**(b)** Kraft




Volumen:

$$F(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \varrho(\vec{r}) d^3 r \tag{1}$$

Fläche:

$$F(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \sigma(\vec{r}) d^2 r \tag{2}$$

$\hat{b}$ Einheitsvektor in $\vec{b}$ bzw. $\vec{R} - \vec{r}$-Richtung;
Polarkoordinaten: $d^2 r = dA = \varphi \ r \ dr$
Kraft auf Probeladung $q$ im Abstand $|\vec{R} - \vec{r}| = b$

$$dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma dA}{b^2} \hat{b} \tag{3}$$

Parametrisierung nötig, um nur noch Konstanten und Integrationsvariablen zu erhalten!
Hier: Aufspaltung in horizontale Komponente $dF_h = dF \cdot \sin\alpha$ (Probeladung liegt im horizontalen Mittelpunkt, deshalb mittelt sich die horizontale Komponente weg (Symmetrie).
Vertikale Komponente: $dF_v = dF \cdot \cos\alpha$.

$$dF_v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma(r) d\varphi \ r \ dr}{b^2} \cos\alpha \tag{4}$$

Aktuelles Problem: Integrationsvariablen: $\varphi$ und $r$, mit *"zusätzlichen"* Variablen $\alpha$,$b$!!! $\rightarrow$ Eliminiere Variablen!
$b = \frac{a}{\cos\alpha}$; $\quad r = a\tan\alpha$; $\quad dr = a\frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha$; $\quad \frac{d\tan\alpha}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$dF_v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma(r)\cos^3\alpha\tan\alpha}{\cos^2\alpha} d\varphi d\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sin\alpha\sigma(r) d\varphi d\alpha \tag{5}$$

(i) $\sigma(r) = \sigma_0 r = \sigma_0 \tan\alpha$

$$dF_v = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sin\alpha\sigma_0\tan\alpha d\varphi d\alpha = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} d\varphi d\alpha = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} d\varphi d\alpha \tag{6}$$

Integrationsgrenzen: $\varphi :$ 0 bis $2\pi$; $\alpha :$ 0 bis $\pi/4$ (Radius $a$ und Höhe $a$ $\Rightarrow \alpha_{end} = 45$)

$$F = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \left( \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha \right) d\alpha = \frac{q\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \left[ \ln\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha\right) - \sin\alpha \right]_0^{\pi/4} \tag{7}$$

$$F = \frac{q\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} - ln(1) - 0\right) = \frac{q\sigma_0}{2\varepsilon_0}(ln(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}}) \tag{8}$$

**Aufgabe 2-2b) anderer Rechenweg:**

Berechne Kraft über Potential am Punkt $Q$.

$$\begin{aligned}\Phi_Q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\sigma(r)dA}{d(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}d\varphi r dr\frac{\sigma(r)}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 a}\int_0^a\frac{r^2dr}{\sqrt{r^2+z^2}}\end{aligned}$$

Die Kraft auf die Probeladung $q$ ist damit

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -q\nabla\Phi_Q = -q\begin{pmatrix}0\\0\\\partial\Phi_Q/\partial z\end{pmatrix} \\ F_z &= \frac{q\sigma_0 z}{2\epsilon_0 a}\int_0^a\frac{r^2dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} \overset{z=a}{=} \frac{q\sigma_0 a}{2\epsilon_0 a}\int_0^a\frac{r^2dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &\overset{x=r/a}{=} \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\operatorname{arsinh}x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1 = \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

**4.** Mathematisches Vorgeplänkel

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_z = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{9}$$

Gegeben sei nun $f(x,y,z) = f(r) = r^{2n}$ mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$f(x,y,z) = r^{2n} = (x^2+y^2+z^2)^n; \quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) = 2n\cdot x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{n-1} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x}f(x,y,z) = 2n\cdot(x^2+y^2+z^2)^{n-1} + 4n(n-1)x^2(x^2+y^2+z^2)^{n-2} \tag{11}$$

**(a)** *grad f* (Skalarfunktion $\Rightarrow$ Vektorfunktion)

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_z\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} f(x,y,z) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\\\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)\\\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\nabla\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \cdot x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \\ 2n \cdot y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \\ 2n \cdot z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

**(b)** *div grad f* (*div*: Vektorfunktion ⇒ Skalarfunktion)

$$\nabla \cdot [\nabla\ f(x,y,z)] = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} f(x,y,z) \tag{14}$$

$$= 6n \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} + 4n(n-1)(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{n-2} \tag{15}$$

$$= (4n^2+2n) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1} \tag{16}$$

**(c)** *rot* (*grad*) *f* (*rot*: Vektorfunktion ⇒ Vektorfunktion) (×: Kreuzprodukt)

$$\nabla \times f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} F_y(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x} F_z(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y} F_x(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{17}$$

*rot grad f*

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{20}$$

Beispiel (eine Komponente):

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(2n \cdot x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-1}) = 4xyn(n-1) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{n-2}$$

$$\nabla \times (\nabla f(x,y,z)) = 4n(n-1)(x^2+y^2+z^2)^{n-2} \begin{pmatrix} yz - zy \\ zx - xz \\ xy - yx \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

**5.** Mathematisches Vorgeplänkel II - Fingerübungen mit dem Nablaoperator

$$div\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \text{ mit } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{22}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(-y\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(x\omega) = 0 \tag{24}$$

$$rot\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}(x\omega) \\ -\frac{\partial}{\partial z}(y\omega) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(y\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} \tag{25}$$

*Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,*
*Tel.: 07247 82 6330; Labor*
*Tel.: 07247 82 4173; Büro*
*Email: Frank.Hartmann@cern.ch*
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/edyn.html