Institut für Experimentelle Kernphysik, KIT

Übungen zur Klassischen Physik II (Elektrodynamik) SS 2016

Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann **Blatt 3** Bearbeitung: 11.5.2016

---

1. 3D Integration

(a) Einfache Ladungsverteilung

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_V \rho \mathrm{d}V \ ; \quad \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ ; \quad \rho(x,y,z) = \rho_0 \cdot (2x^2 + 4yz - 3xz) \\
Q &= \rho_0 \cdot \int_0^a\int_0^a\int_0^a 2x^2 + 4yz - 3xz \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \rho_0 \cdot \int_0^a\int_0^a \left[2x^2z + 2yz^2 - \frac{3}{2}xz^2\right]_0^a \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho_0 \cdot \int_0^a\int_0^a 2x^2a + 2ya^2 - \frac{3}{2}xa^2 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \rho_0 \cdot \int_0^a \left[2ax^2y + a^2y^2 - \frac{3}{2}a^2xy\right]_0^a \mathrm{d}x = \rho_0 \cdot \int_0^a 2a^2x^2 + a^4 - \frac{3}{2}a^3x \ \mathrm{d}x \\
&= \rho_0 \cdot \left[\frac{2}{3}a^2x^3 + a^4x - \frac{3}{4}a^3x^2\right]_0^a \\
&= \frac{11}{12} \cdot \rho_0 \cdot a^5
\end{aligned}
$$

(b) Kugelsymmetrische Ladungsverteilung
Gesucht ist die Gesamtladung Q. Bekannt ist:

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_V \rho \mathrm{d}V \ ; \quad \mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \ ; \quad \rho(r) = k \cdot \frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{r^2} \\
&= k \cdot \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{r^2} r^2 \sin\theta \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= k \cdot \int_0^\infty\int_0^\pi \left[e^{-\frac{2r}{a}}\phi\sin\theta\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi k \cdot \int_0^\infty\int_0^\pi e^{-\frac{2r}{a}} \sin\theta \ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi k \cdot \int_0^\infty \left[e^{-\frac{2r}{a}}(-\cos\theta)\right]_0^\pi \mathrm{d}r = 4\pi k \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a}} \ \mathrm{d}r \\
&= 4\pi k \left[-\frac{a}{2}e^{-\frac{2r}{a}}\right]_0^\infty \\
&= 2\pi k a
\end{aligned}
$$

2. Potential und Feldstärke

Ein elektrostatisches Feld wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$E_x = 6xy; \quad E_y = 3x^2 - 3y^2; \quad E_z = 0$$

Das Linienintegral ist gegeben durch $\vec{E}(x, y, z) = (6xy, 3x^2 - 3y^2, 0)$.

(a) Das Linienintegral vom Punkt $P_0(0, 0, 0)$ zum Punkt $P(x_1, y1, z_1)$ ist dann (i) zunächst entlang der$y$-Achse

$$U_i(x_1, y_1, z_1) = \int_{(0,0,0)}^{(x_1,y_1,z_1)} \vec{E}(x, y, z) d\vec{s} = \int_0^{x_1} (0, 3x^2, 0) \cdot (1, 0, 0) dx +$$

$$\int_0^{y_1} (6x_1y, 3x_1^2 - 3y^2, 0) \cdot (0, 1, 0) dy = 0 + 3x_1^2 y_1 - y_1^3$$

oder (ii)

$$U_{ii}(x_1, y_1, z_1) = \int_0^{y_1} (0, -3y^2, 0) \cdot (0, 1, 0) dx + \int_0^{x_1} (6xy_1, 3x^2 - 3y_1^2, 0) \cdot (1, 0, 0) dy =$$

$$-y_1^3 + 3x_1^2 y_1 = U_i(x_1, y_1, z_1)$$

Die Verschiebung hängt offensichtlich nicht vom gewählten Weg ab. d.h. das gegebene Feld ist **konservativ** und die geleistete Arbeit (hier für die Verschiebung einer elektrischen Ladung) entlang eines geschlossenen Weges ist Null. Dies gilt insbesondere für das Gravitationsfeld und elektrostatische Felder. Daraus folgt auch, dass für das Wegintegral über einen geschlossenen Weg $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ gilt. Zusammen mit dem Gausschen Flusssatz bildet dies gewissermaßen die Grudnlage der Elektrostatik.

(b) Mit $U(x, y, z) = 3x^2 y - y^3$ ergibt sich für den Gradienten

$$grad\ U = \vec{\nabla} U = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) U = (6xy, 3x^2 - 3y^2, 0) = \vec{E}(x, y, z) \quad (1)$$

3. Beschleunigte Ladung

(a) Die Arbeit, die vom elektrischen Feld am Elektron beim Durchlaufen der Potentialdifferenz (Spannung) U verrichtet wird, berechnet sich zu $W = eU$ mit e als Elementarladung. Sie geht vollständig in kinetische Energie des Elektrons über. Diese ist gleich der Differenz aus Gesamtenergie $E = mc^2$ (mit der Impulsmasse $m = m_0/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$) und der Ruheenergie $E_0 = m_0 c^2$:

$$eU = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] \quad (2)$$

Für $v = 0,95c$ erhält man daraus $U = 1,13MV$

(b) Anmerkung:
Im atomaren Bereich ist die Energieeinheit Joule unpraktisch. Man benutzt dort Elektronenvolt (eV). Dies ist die Energie, welche ein Elektron gewinnt, wenn es die Potentialdifferenz $U = 1V$ durchlaufen hat.
$1ev = 1.602 \cdot 10^{-19}C \cdot 1V = 1.602 \cdot 10^{-19}J$
Ruheenergie des Protons: 938.28MeV
$\rightarrow$ kinetische Energie $10GeV$

$$10GeV = 0,938GeV\gamma \;\Rightarrow\; 1-\beta^2 = 0,0938^2 \;\Rightarrow\; \beta = \sqrt{1-0,0938^2} = 0.9663 \quad (3)$$

mit $\gamma = 10/0,983 = 10,66$

$$m = m_0\gamma + m_0 = 11,66m_0 \quad (4)$$

Lösung $v = 0.9963c; m = 11,66m_0$

4. Schönes Wetter

(a) Wird der Erdkörper als Leiter betrachtet, liegt eine negative Ladung mit einer Flächenladungsdichte $\sigma = -D_1 = -\varepsilon_0 E_1 = 1,15 \cdot 10^{-9}C/m^2$ auf seiner Oberfläche. Der elektrische Fluss durch Fläche A nimmt mit zunehmender Höhe ab, also anthält die Atmosphäre eine positive Raumladung Q, für welche $\varepsilon_0(E_1 - E_2)A = Q$ gilt. Ersetzt man Q durch die Raumladungsdichte $\varrho = dQ/dV = const.$, erhält man

$$Q = \varrho \int dV = \varrho Ah; \quad \varrho = \frac{Q}{Ah} = \varepsilon_0 \frac{E_1 - E_2}{h} = 1,12 \cdot^{-13} C/m^3 \quad (5)$$

ϱ stellt nur die positive Überschussladung dar.

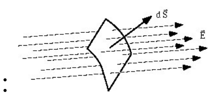
(b) Bei gleichmässigen verteilten Raumladungen nimmt E linear mit der Höhe z zwischen E_1 und E_2 ab: $E = E_1 - (E_1 - E_2)z/h$ Die Potentialdifferenz (Spannung) beträgt.

$$U = \int_0^z Edz = \left[E_1 z - \frac{E_1 - E_2}{h}\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{E_1 + E_2}{2}h = 670kV \quad (6)$$

5. <u>Felder</u>

Vorbemerkung:
<u>Kraftfluss</u>:
Definition eines Maßes fr die Zahl der elektrischen Feldlinien, die durch ein Flächenelement dS mit dem Flächennormalenvektor gehen: **elektrischer Kraftfluss; GAUSS**:

$$d\Phi_{el} = \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{7}$$



gesamter Kraftfluss durch eine Fläche S, z.B. Oberfläche eines Körpers:

$$\Phi_{el} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{8}$$

Konvention: Flächenvektor $d\vec{S}$ ist immer nach aussen gerichtet.
Beispiel: Punktladung Q in der Mitte einer Kugel mit Oberfläche S

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}; \quad \phi_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\hat{r}}{r^2} d\vec{S} \tag{9}$$

Mit $\vec{r} \| d\vec{S}$ und $\int_S d\vec{S} = 4\pi r^2$ (Kugelsymmetrie) folgt

$$\Phi_{el} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \varrho dV \tag{10}$$

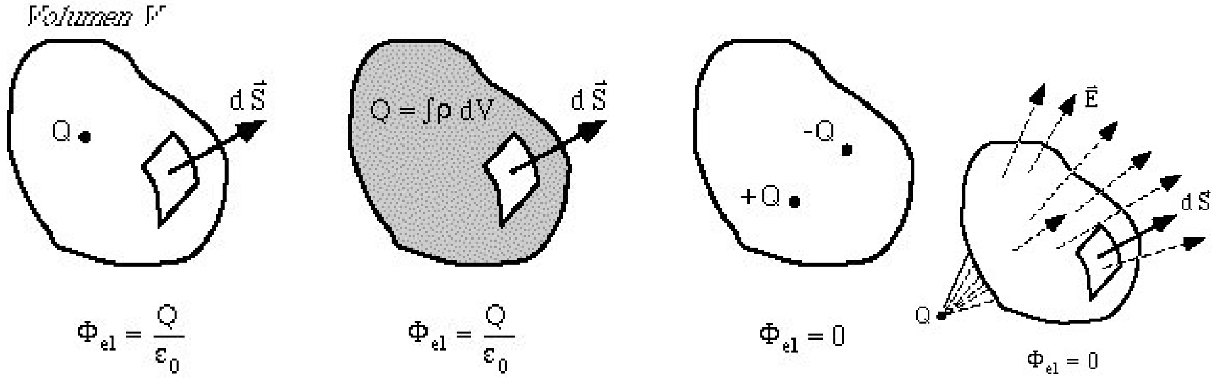
Dies ist ein klassisches Beispiel für den **Satz von Gauß**-Ostrogradski, der für beliebige Volumina V mit geschlossener Oberfläche S gilt: Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche hängt weder von der Form der Oberfläche noch von der Ladungsverteilung ab.
Allgemein gilt in der Mathematik der Gaußsche Satz für beliebige Vektorfelder :
Der Fluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich dem Integral der Divergenz des Feldes über das eingeschlossene Volumen.

$$\Phi = \int_A \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V div \vec{A} dV \tag{11}$$

Anwendung auf das elektrische Feld und Vergleich mit obiger Formel ergibt dann

$$div \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{12}$$

Die im Raum verteilten Ladungen sind die Quellen ($q > 0$) bzw. Senken ($q < 0$) des elektrostatischen Feldes.
<u>Beispiele:</u>



(Bild 4: “Was hineingeht geht auch wieder raus“!)

Potential und Spannung:

Ziel: Definition der Arbeit W, der potentiellen Energie und eines elektrostatischen Potentials in Analogie zur Mechanik (s. Physik I). Dort wurde die Bewegung einer Masse m in einem Gravitationsfeld beschrieben. Dabei galt folgende Vorzeichenkonvention:
$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \; > \; 0$: man gewinnt Energie (auf Kosten der potentiellen Energie)
$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \; < \; 0$: man mu Energie aufwenden.
Fr das elektrostatische Feld gilt: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q\vec{E}d\vec{s}$

$$W = \int_{P1}^{P2} \vec{F} d\vec{s} = q \int_{P1}^{P2} \vec{E} d\vec{s} \tag{13}$$

Wie in der Mechanik gilt: konservatives Kraftfeld $\Leftrightarrow$ Arbeitsintegral unabhngig vom Weg $\Leftrightarrow$ jedem Raumpunkt p lässt sich die eindeutig definierte Funktion $\phi(P) = \int_P^\infty \vec{E} d\vec{s}$ **elektrostatisches Potential im Punkt P** zuordnen.
Die Potentialdifferenz $\phi(P_1) - \phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}$ heisst **elektrische Spannung**.

Zusatz / Zusammenfassung / Vorgriff / Was man wissen sollte!!:

Das elektrostatische Feld kann durch das Vektorfeld $\vec{E}(x, y, z)$ oder quivalent durch die skalare Potentialfunktion $\phi(x, y, z)$ beschrieben werden.

$$\phi(p) = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} \; \Leftrightarrow \; \vec{E} = -grad\phi(x, y, z) = -\nabla\phi \tag{14}$$

Aus $div\vec{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0}$ und $div\ grad\phi = \Delta\phi$ folgt die **Poisson-Gleichung**,

$$\Delta\phi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{15}$$

wobei $\Delta \equiv div\ grad \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator ist.
Damit kann man aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung $\varrho(x, y, z)$ die Funktionen $\phi(x, y, z)$ und $\vec{E}(x, y, z)$ berechnen. Die Integrationskonstanten sind durch Randbedingungen festgelegt. Falls keine Ladungen vorhanden sind, geht die Poisson-Gleichung ber in die Laplace-Gleichung

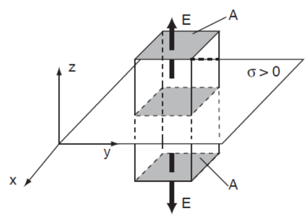
$$\Delta\phi = 0 \tag{16}$$

Definition: Flächen, auf denen $\phi = const$ gilt, heissen Äquipotentialflächen.
$\vec{E} = -grad\ \phi(x, y, z)$ steht in jedem Punkt p einer Äquipotentialfche senkrecht auf

dieser. $\Leftrightarrow$ Beim Verschieben einer Ladung auf einer Äquipotentialfiche wird keine Arbeit geleistet.
Achtung, beachten sie den Unterschied zwischen Φ und ϕ, einmal haben sie es mit einem Flächen ($d\vec{S}$)- und einmal mit einem Linienelement (Integral) ($d\vec{s}$) zu tun.

<u>TATSÄCHLICHE LÖSUNG DER AUFGABE</u>:

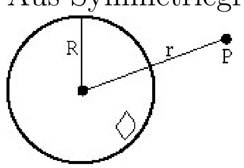
(a) Homogen geladene Fläeche
Gauß-Fläche
Der Symmetrie angepasst muss dann eine geeignete Gauss 'sche Fläche ausgewählt werden, so dass das elektrische Feld in jedem Punkt 1. senkrecht zur Fläche steht, (hier E senkrecht zu A) und 2. sowie identischen Betrag besitzt.
Aus Symmetriegründen muss das elektrische Feld E in beiden Halbräumen vom Betrag her gleich und antiparallel sein $\rightarrow$ Faktor 2



$$\frac{Q}{\epsilon_0} \overset{Gauss}{=} \Phi = \int\int_A \vec{E} d\vec{A} = 2E_z \cdot A; \qquad (17)$$

mit $Q = A\sigma$ folgt $E_z = \frac{\sigma}{d2\epsilon_0}$; $E_y = E_x = 0$. Für $\sigma > 0$ ist die Richtung wie in der Abbildun; für $\sigma < 0$ zeigt es in die Ebene.

(b) Hohlkugel
Aufgrund der Kugelsymmetrie des Problems wird das Potential lediglich von der radialen Koordinate des im Mittelpunkt der Hohlkugel festgelegten sphärischen Koordinatensystems abhängen. Daraus folgt, dass die elektrische Feldstärke nur eine Radialkomponente besitzt.
Aus Symmetriegründen muss $\vec{E}$ radial nach aussen zeigen $\Rightarrow \vec{E} \| \hat{r} \| d\vec{S} \| \hat{r}$



- Für $r \leq R$ gilt $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ für jede beliebige geschlossene Fläche, da es keine Ladungsträger im "inneren" jedes $r \leq R$ gibt. $\Rightarrow$

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \phi = const. \qquad (18)$$

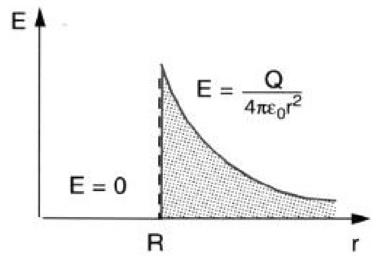
im Innenraum.

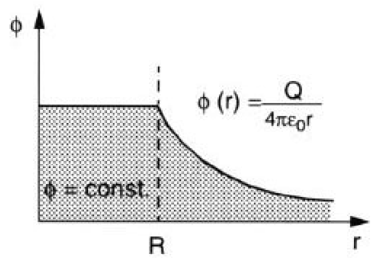
- Für $r \geq R$ gilt

$$\frac{Q}{\epsilon_0} \overset{Gauss}{=} \Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \overset{integriert}{=} 4\pi r^2 E \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (19)$$

(Flächenelement = Kugelschale am Radius$(r) = 4\pi r^2$)
Im Aussenraum wirkt die Kugel also wie eine Punktladung!

$$\phi(r) = \int_r^\infty E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow |\vec{E}(r)| = \frac{\phi(r)}{r} \tag{20}$$





$\Phi_{el} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$

(c) geladene Vollkugel
Raumladungsdichte ϱ, Ladung: $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$:

- Für $r \leq R$ gilt (siehe auch Gravitationsaufgabe Physik I, Mechanik):
  Mit der Randbedingung $\phi(\infty) = 0$ (Freie Wahl des Potentialnullpunkts), also Integration von ∞ bis r

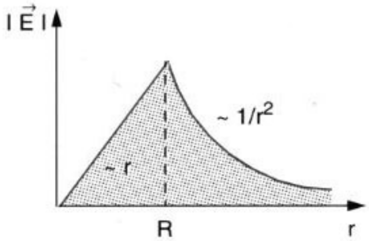
$$\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r} \Rightarrow \phi(r) = -\int_\infty^r E \cdot dr = -\int_\infty^R E \cdot dr - \int_R^r E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right) \tag{21}$$

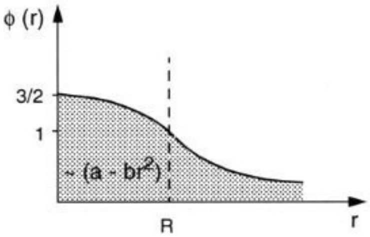
- Für $r \geq R$ gilt (siehe oben):

$$\frac{Q}{\epsilon_0} \overset{Gauss}{=} \Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{22}$$

  Mit der Randbedingung $\phi(\infty) = 0$ (Freie Wahl des Potentialnullpunkts)

$$\phi(r) = \int_r^\infty E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow |\vec{E}(r)| = \frac{\phi(r)}{r} \tag{23}$$

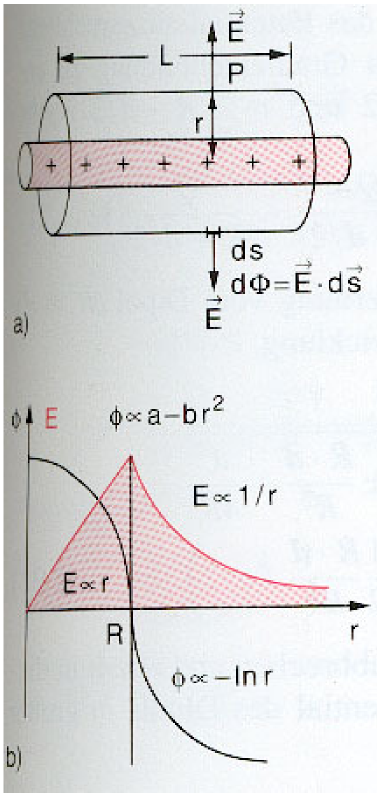




(d) Unendlich langer Stab
Ladung pro Längeneinheit $\lambda = \pi R^2 \varrho = A\varrho$; ($\lambda = \frac{Q}{L}$)
Wieder ist aus symmetriegründen die Feldstärke $\vec{E}$ in einem Punkt P im Abstand r von der Stabachse radial nach aussen gerichtet. Für den elektrischen Fluss durch eine zum Stab koaxiale Zylinderoberfläche mit Radius r und Länge L erhalten wir

- Für $r \leq R$:
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} \overset{integriert}{=} E \cdot 2\pi r \cdot L \overset{Gauss}{=} \frac{\varrho \pi r^2 L}{\epsilon_0} \Rightarrow \tag{24}$$
(Flächenelement = Zylindermantel am Radius$(R) = 2\pi r L$)
$$E = \frac{\varrho r}{2\epsilon_0}\hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2}\hat{r} \tag{25}$$
$$\phi(r) = \int_r^R E dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{26}$$

- Für $r \geq R$:
$$\Phi_{el} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{\epsilon_0}L \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} \tag{27}$$
Mit der Randbedingung $\phi(R) = 0$ (Freie Wahl des Potentialnullpunkts; warum nicht ∞?))
$$\phi(r) = \int_r^R E \cdot dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} \tag{28}$$



(e) Koaxialkabel Für $r > R_2$ gilt:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow E = 0, \Rightarrow \phi = const. \tag{29}$$

da die Gesamtladung innerhalb des Zylinder mit Radius gleich Null ist.
Für $r < R_2$ gilt: Das feld des äusseren Zylinders ist Null, das des inneren, entsprechend dem eben berechneten Stabes.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm

Zusatz

1. Ladung im zentralen elektrischen Feld

alles richtig ausser e)

2. Kreisring

(a)

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2} \tag{30}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \Rightarrow \frac{E-1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1} > 1 \Rightarrow E_1 > E_2 \tag{31}$$

(b)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \Rightarrow \frac{E-1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = 1 \Rightarrow E_1 = E_2 \tag{32}$$

Die Felder heben sich gegenseitig auf.

(c) Bei einer Kugelschale ist die Ladung proportional zur Größe des Flächenelementes d.h. $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow$ Die Felder heben sich gegenseitig auf. Wenn W mit $1/r$ statt mit $1/r^2$ variierte, so erzeugte s_2 das stärkere Feld und das resultierende Feld wiese von s_2 weg.