1. Superposition und Gauß'scher Satz

(a) Das elektrische Feld wird durch zwei Punktladungen, deren Felder sich ungestört überlagern, erzeugt.

$$E = E_1 + E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{2^2} - \frac{q}{93a)^2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8q}{9a^2} \tag{1}$$

(b) Man versucht die Integration über eine beliebige Oberfläche z.B. einer Kugel.

$$\int_O \vec{E}d\vec{A} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{ges}}{\epsilon_0} = fracq - q\epsilon_0 = 0 \tag{2}$$

$\Rightarrow E = 0 \quad \rightarrow$ Widerspruch zu a)

(c) Der Gaußsche Satz funktioniert scheinbar nicht, weil eine nicht zutreffende Symmetrieüberlegung verwendet wurde. Die Ladungsverteilung ist nicht kugelsymmetrisch, daher wird es auf der Oberfläche der Kugel immer verschiedene Richtungen von E$\vec{E}$ im Verhältnis zu $d\vec{A}$ geben. Auch der Betrag von $\vec{E}$ wird schwanken. Insgesamt werden sich diese Unterschiede zu 0 aufintegrieren. Im Mittel ist also E = 0 erfüllt, allerdings kann keine Aussage über ein spezielles $\vec{E}$ an einem Punkt getroffen werden. Eine sinnvolle Anwednung des Gaußschen Satzes setzt daher eine vorhandene Ladungssymmetrie voraus, die gewährleistet, dass $\vec{E}$ und $d\vec{A}$ immer gleich großsind und im gleichen Winkel zueinander stehen.

2. Coulomb Feld

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^3}\vec{r} \tag{3}$$

Ein Kraft feld ist konservativ, wenn $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ist. $\Rightarrow$
Zu zeigen $\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} =?$$

Wir berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{3}{2}\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) &= \\ -\frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(-\frac{-3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right) &= 0 \end{aligned}$$

und zyklisch!
In Kugelkoordinaten:

$$F(r,\theta,\phi) = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotation in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} rot\ \vec{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\phi\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}v_\theta\right]\vec{e}_r \\ &+ \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}v_r - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi)\right]\vec{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}v_r\right]\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

da $y_\theta = v_\phi = 0$ ist folgt sofort die Behauptung.

3. Aktion Kracher 4 Farray

Bei dieser Aufgabe soll der Faraday-Käfig diskutiert werden. Bevor die Elektrostatik eine Rolle spielt, sollte man wohl nach dem Blitzeinschlag zuerst einmal anhalten. Bei einem nahen Blitzeinschlag ist man wahrscheinlich geblendet und könnte wegen des Schocks auch im Graben landen. Das Auto schützt die Insassen vor dem Blitz, denn die Blechkarosserie wirkt wie ein Faraday-Käfig, dessen Inneres feldfrei ist. Der wichtige Sachverhalt ist, dass man nicht gleich aussteigen sollte. Auf der Karosserie kann sich noch eine grosse Ladung befinden. Selbst bei trockener Strasse kann die sich ergebene Hochspannung gegenüber dem Erdpotential groß genug sein, dass sich de auf dem Auto befindliche Ladung über die Schuhsohlen entlädt, weil die Durchbruchfeldstärke der Sohlen erreicht wird.
Ähnliches gilt bei Kontakt des Autos mit einer Hochspannungsleitung. AUch wenn hierbei die Spannung wesentlich kleiner ist, als beim Blitz, kommt hier hinzu, dass man an einer ständigen (zumindest evtl. noch länger intakten) Spannungsquelle engeschlossen ist, während sich die Blitzladung nur einmalig entlädt.
Bei Verfolgung durch Banditen, am besten einfach weiterfahren und sich damit von Blitz bzw. Stromkabel lösen und ducken, damit man nicht durch den Kugelhagel verletzt wird.

4. Noch ein wenig DIV

$$div \begin{pmatrix} -sin(2y) \\ +cos(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -sin(2y) \\ +cos(2x) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(-sin(2y)) + \frac{\partial}{\partial y}(cos(2x)) = 0$$

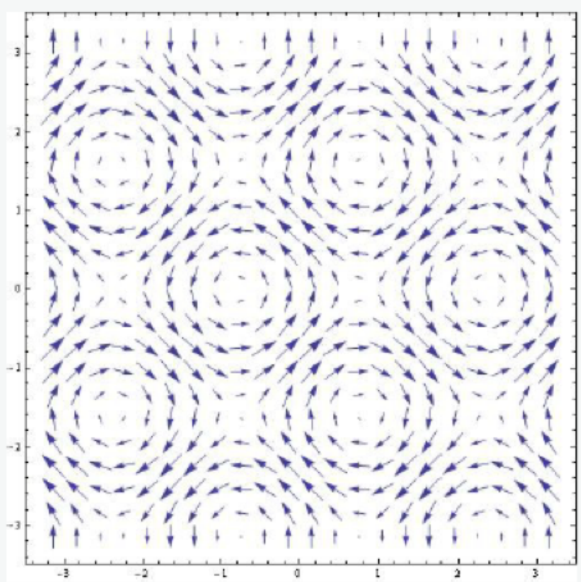


Abb. L8-1: Das Vektorfeld der Funktion $\boldsymbol{F}(x, y)$

$$\vec{F} = -\sin(2y) \cdot \vec{i} + \cos(2x)\,\vec{j}, \qquad div\,\vec{F} = 0$$

5. Gewitterwolken

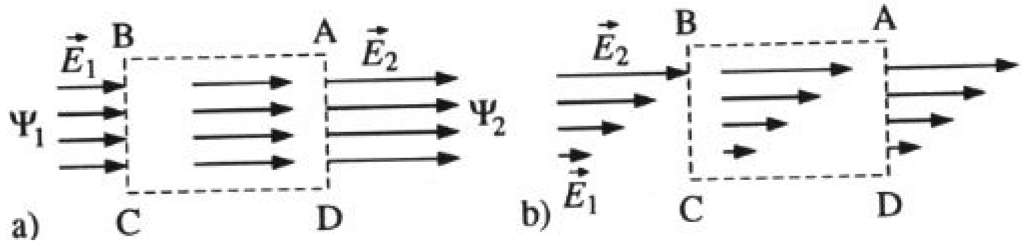
$E = \frac{q}{r^2}, q \propto \varrho r^3 \rightarrow E \propto \varrho r$ Die Feldstärkw wird 3mal so groß

6. Quellen und Wirbelfeld

(a) Als vom Fluss Φ durchsetztes Raumgebiet wählen wir einen in Feldrichtung liegenden Quader (Seitenansicht ABCD), von dem nur die senkrecht zum Feld orientierten Deckflächen BC und AD durchflutet werden. Da die Feldstärke $\vec{E}$ in Flussrichtung linear anwächst, ist der aus dem Gebiet austretende Fluss Φ_2 größer als der eintretende Φ_1. Im umschlossenen Gebiet befinden sich also elektrische Ladungen Q als Quellen des Feldes. Es gilt

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{A} = \Phi_2 - \Phi_1 = Q \tag{4}$$

mit $Q > 0$ (Quellenfeld)



Beim Umlauf einer Probeladung q auf dem geschlossenen Weg A-B-C-D-A wird nur entlang A-B und C-D Arbeit geleistet. Dabei wird offensichtlich entlang des Weges A-B genau soviel Arbeit geleistet wie längs des Weges C-D wieder frei wird, so dass die insgesamt verrichtete Arbeit null ist:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{5}$$

d.h. es handelt sich hier (wie beide jedem elektrostatischen Feld) um ein konservatives Kraftfeld (wirbelfreies Quellenfeld)

(b) In diesem Feld wird bei einem geschlossenen Umlauf A-B-C-D-A entlang A-B mehr Arbeit verrichtet als auf dem Rückweg C-D gewonnen wird (wegen ($E_2 > E_1$), d.h. hier ist $W \neq 0$. Das Feld b) ist ein Wirbelfeld und kann damit als elektrostatisches Feld nicht existieren.

7. Hohlkugel

1 ist richtig, 5 oder 7 ist richtig, je nachdem, wie der Nullpunkt des Potentials festgelegt wird.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/EDYN.htm

1. Multiple Choice - Verständnisfragen

(a) Die Einheiten der Permittivität sind

- einheitslos
- $1/4\ \pi$
- Nm^2
- YES C^2/Nm^2

ϵ relative Polarisierung von Materialien in elektrischen Feldern

(b) Welche der folgenden Einheiten sind die Einheiten des elektrischen Feldes?

- N
- NC
- YES $F = Eq\ N/C$
- N/m^2

(c) Nabla =

1. YES $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
2. $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$
3. YES $\frac{\partial}{\partial x} \cdot e_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot e_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot e_z$
4. $((\frac{\partial}{\partial x})^2, (\frac{\partial}{\partial y})^2, (\frac{\partial}{\partial z})^2)$.
5. YES ∇
6. Δ - NO, das ist der Laplace Operator

(d) In einem quellenfreien Feld $\vec{F}$ gilt immer

1. YES $div\vec{F} = 0$
2. $div\vec{F} \neq 0$
3. $rot\vec{F} = 0$
4. YES $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

(e) div $\vec{F}$ ergibt

1. einen Vektor
2. YES einen Salar
3. YES ein skalares Quellenfeld von $\vec{F}$
4. das Rotationsfeld von $\vec{F}$

(f) rot $\vec{F}$ ergibt

1. YES einen Vektor
2. einen Salar
3. ein skalares Quellenfeld von $\vec{F}$
4. YES das Rotationsfeld von $\vec{F}$
5. YES das Wirbelfeld von $\vec{F}$
6. YES ist gleich $\nabla \times \vec{F}$

(g) grad F

1. YES ergibt einen Vektor
2. ergibt einen Salar
3. ergibt ein skalares Quellenfeld von F
4. ergibt das Rotationsfeld von F
5. ist gleich $\nabla \times F$
6. YES ist gleich $\nabla \cdot F$

(h) Konservative Felder:

1. YES Ein Kraftfeld ist dann konservativ, wenn es eine Funktion V gibt, so dass sich die Kraft als Gradient dieser Funktion V schreiben $\vec{F} = -\nabla V$
2. YES (Das ist die Definition) Die geleistete Arbeit in einem konservativen Feld ist wegunabhängig
3. YES Das Coulombfeld ist konservativ
4. YES das Gravitationsfeld ist konservativ
5. YES (mathematische Screibweise von 2) $W = \oint \vec{F} d\vec{s} = 0$

6. <u>Bemannter Flug zum Mars</u>

Gefragt: elektrisches Feld:

(a) Berechnung der Hohlkugel:

Hohlkugel $\Rightarrow$ Kugel-(bzw. Rotations)symmetrie $\Rightarrow$ reine r-Abhängigkeit!
Achtung: Innenfeld ist in Teil a) nicht gefragt! Trotzdem: Innen: Feldfrei: $E = 0$ – bekannt! Oder für $r \leq R$ gilt $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ für jede beliebige geschlossene Fläche, da es keine Ladungsträger im "inneren" jedes $r \leq R$ gibt. $\Rightarrow$

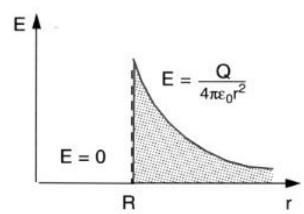
$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \phi = const.$$

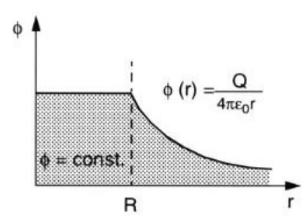
Aussenraum: GAUSS: Für $r \geq R$ gilt

$$\frac{Q}{\epsilon_0} \overset{Gauss}{=} \Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \overset{integriert}{=} 4\pi r^2 E \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{6}$$

mit $d\vec{S}$ als Oberflächenintegral über die Kugelschale mit $4\pi r^2$ als Ergebnis!

(b) Skizze:





(nur E gefragt, oberer Teil)

(c) Teilchen mit der Energie 10 MeV aus dem unendlichen bis $r = 80m$!
Mache aus $E \Rightarrow \phi$ via Integration:

$$10MeV = q\phi(r) = q\int_r^\infty E \cdot dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{7}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot r \cdot 10MeV}{q} \overset{Protonenladung\ e}{=} 4\pi\epsilon_0 \cdot r \cdot 10MV \tag{8}$$

(d) Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_0 = \frac{Q}{O} = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{10MV \cdot \epsilon_0}{r} \tag{9}$$