Institut für Experimentelle Kernphysik, KIT

Übungen zur Klassischen Physik II (Elektrodynamik) SS 2016

Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann

Blatt 6 Bearbeitung: 01.6.2016

---

1. Kapazitätsnetzwerk

Kapazitäten: (Parallel: $R_{ges} = \sum r_i$; Seriell: $R_{ges} = \frac{\prod R_i}{\sum R_i}$)

(a) Zwischen den Eckpunkten AB liegen parallelgeschaltet die Kapazität C_1 und die Ersatzkapazität C_e, welche sich aus der Reihenschaltung von C_2, C_3 und C_4 nach $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}$ berechnet. Mit $C_e = 1\mu F$ wird $C_{AB} = C_1 + C_e = 1,75\mu F$. Analog erhält man $C_{AD} = 2,92\mu F$; $C_{BC} = 3,5\mu F$ und $C_{CD} = 4,48\mu F$. Als Parallelschaltung der Reihen C_1 und C_2 sowie C_3 und C_4 erhält man $C_{AC} = 2,1\mu F$ und analog dazu $C_{BD} = 2,29\mu F$.

(b) Es ist $U_{AC} = \varphi_C - \varphi_A = 20V$ mit $\varphi_C = 20V$ und $\varphi_a = 0V$. Für die Reihenschaltung von C_1 und C_2 mit $C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 0,06\mu F$ folgt $Q_{12} = C_{12}U = 12\mu C$ und damit $U_1 = \frac{Q_{12}}{C_1} = \varphi_B - \varphi A = 16V$ und $U_2 = \varphi_C - \varphi_B = 4V$. Analog erhält man aus der Reihenschaltung von C_3 und $C_4 : U_3 = \varphi_D - \varphi_C = -7.5V$ und $U_4 = \varphi_A - \varphi_D = -12,5V$ (jeweils negativ wegen $\sum U_i = 0$). Damit wird $\varphi_B = 16V$, $\varphi_D = 12,5V$, also $|U_{BD}| = |\varphi_d - \varphi_b| = 3,5V$

2. Ausgedehnter Kondensator

Das elektrische Feld eines Kabels im Abstand r ist gegeben durch: $\lambda/2\pi\epsilon_0 r + \lambda/2\pi\epsilon_0(d-r)$, wobei der erste Term das Feld des unteren Kabels und der zweite Term das Feld des oberen Kabels beschreibt.

Der Potentialunterschied ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Delta V = V_A - V_B &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{d-a}^{a}\left[-\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r}\right]dr \\ &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} log_e \frac{(d-a)}{a}\end{aligned}$$

Die Kapaziät pro Längeneinheit ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}C = \lambda/\Delta V &= \frac{\pi\epsilon_0}{log_e \frac{(d-a)}{a}} \\ &\sim \frac{\pi\epsilon_0}{log_e \frac{d}{a}} \text{, for } d >> a\end{aligned}$$

3. Dielektrika

(a) Die elektrische Verschiebung D ist an den Grenzflächen stetig, d.h. es gilt

$$D_1 = D_2 \qquad \text{oder} \qquad \epsilon_0\epsilon_1 E_1 = \epsilon_0\epsilon_2 E_2$$

Die elektrische Feldstärke ist daher an den Grenflächen unstetig, für die Potentialdifferenz gilt

$$U = \int E ds = E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_1 + U_2$$

und daraus folgt

$$E_1 = \frac{2 \cdot U}{d} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad ; \quad E_2 = \frac{2 \cdot U}{d} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

Mit den Zahlenwerten $d = 0.01\,\mathrm{m}$, $U = 300\,\mathrm{V}$ und $\epsilon_1 = 6$, $\epsilon_2 = 2$ ergibt sich also

$$E_1 = 1.5 \cdot 10^4\,\mathrm{V/m} \quad , \quad U_1 = 75\,\mathrm{V}$$
$$E_2 = 4.5 \cdot 10^4\,\mathrm{V/m} \quad , \quad U_1 = 225\,\mathrm{V}$$

(b) Die Kapazität des Kondensators ergibt sich aus der Reihenschaltung der Einzelkapazitäten:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{2A}{d} \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = 26.6\,\mathrm{pF}$$

(c) Die elektrische Verschiebung D ist konstant im gesamten Kondensator:

$$D = D_1 = D_2 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdot E_1 = 7.96 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$$

(d) Trennt man den Kondensator von der Spannungsquelle, so bleibt D konstant, da auch die Ladung Q als Quelle für D unverändert bleibt. Aus $D = \epsilon_0 \cdot E_0$ im Vakuum folgt dann

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{2}{d} \cdot \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot U = 9 \cdot 10^4\,\mathrm{V/m}$$

$$\frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot U = 9 \cdot 10^4\,\mathrm{V/m}$$

$$U_0 = \int_0^d E_0 ds = 900\,\mathrm{V}$$

4. Kondensatoren unter sich

$Q = Q_2 - Q_1 = (C_2 - C_1) \cdot U_0 = 300\mu C$. Mit $C = C_1 + C_2$ wird $U = \frac{Q}{C} = 66V$

5. Elektrisches Tischtennis Lösung

(a) B1 bewegt sich auf die negative Platte I zu und berührt diese schließlich $\Rightarrow$ negative Aufladung von B2; Elektrode 1 leuchtet auf. B2 bewegt sich auf die positive Platte II zu und berührt diese schließlich. Der Elektronenmangel von II überträgt sich auf B2 $\Rightarrow$ positive Aufladung von B2; Elektrode 3 leuchtet auf. In einer anderen Betrachtungsweise - die zu äquivalenten Ergebnissen führt - könnte man sagen: Die positiven Ladungen der Platte II fließen auf den Ball 2.

(b) B1 (negativ) wird von Platte I (negativ) ebenso abgestossen wie B2 (positiv) von Platte II (positiv) $\Rightarrow$ B1 geht zu Platte II, wird dabei positiv und B2 geht zur Platte I und wird dabei negativ. Die Folge ist ein ständiges Hin- und Herpendeln der Bälle.

6. σ – Tensor 2. Stufe

Beispiele für Tensoren:

Arbeit	W:	Skalar:	Tensor 0.Stufe
Elekrisches Feld	$\vec{E}$:	Vektor:	Tensor 1. Stufe
Elektrische Leitfähigkeit:	σ_{el}	Matrix:	Tensor 2. Stufe
Total antisymmetrischer Tensor:	ϵ_{jkl}:	0 $\quad j=k \bigwedge j=l \bigwedge k=l$ 1 $\quad gerade\ Permutation$ 2 $\quad ungerade\ Permutation$	Tensor 3. Stufe

Ohmsches Gesetz differentiell: $\vec{j} = \sigma_{el}\vec{E}$
Ohmsches Gesetz integral: $U = R \cdot I$
(erinnert mich immer an den schweizer Kanton)
Zur eigentlichen Aufgabe:
Feldstärke $\vec{E}$ zeigt nur in x-Richtung (Näherung; $E_y = E_z = 0$), also ($E_x = \frac{U}{L}$)

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 37.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{V}{m}$$

Die Stromdichte ist dann:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} 2.5385 & 0.5500 & 0.2066 \\ 0.5500 & 2.3445 & -0.2462 \\ 0.2066 & -0.2462 & 1.1170 \end{pmatrix} \cdot 10^2 \frac{1}{\Omega m} \begin{pmatrix} 37.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{V}{m} = \begin{pmatrix} 9519 \\ 2063 \\ 775 \end{pmatrix} \frac{A}{m^2} = \text{konst.}$$

Der Strom I durch die Querschnittsfläche A kommt nur vom j_x-Anteil, also:
$I = j_x \cdot A = 7.615A$.

(Anhang: Korrekte Rechnung: Als Ergebnis erhält man, dass ein Strom in x-, y- und z-Richtungen fließt. Das heißt, dass es zu Oberflächenladungen an den Stirnflächen der y- und z-Richtung kommen wird (kein Stromabfluss möglich). Dies führt zu einem Feld und somit ist die Annahme $E_y = E_z = 0$ prinzipiell falsch. Man muss vielmehr davon ausgehen, dass im stationären Fall (d.h. nach einem Einschaltvorgang, der die Stirnflächen der y- und z-Richtung auflädt) nur ein Strom in x-Richtung fließen wird. Der richtige Ansatz ist also: $j = (j_x; 0; 0)$. Mit der Gleichung: $J = \sigma \cdot E$ und $E = (U/L; E_y; E_z)$ erhält man ein LGS mit drei Gl. und 3 Unbekannten $(j_x, E_y, E_z$. Man erhält daraus: $E_y = -9.75 \cdot 10^2 V/m; E_z = 9.09 \cdot 10^2 V/m$ und damit $j_x = 7.036A$. D.h. j_x ist um ca. 7.6% kleiner als in obiger Lösung.)

7. <u>Disskussionsaufgabe: Mamma warum geht das Licht so schnell an?</u>

Wenn ein Lichschalter betätigt wird geht das Licht *"instantan"* an!!! Zur Auswahl:

(a) die Elektronen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit!
Quatsch:
Driftgeschwindigkeit: $\vec{v}_D = \frac{\vec{j}}{\varrho_{el}}$ der Elektronen ist wesentlich kleiner als c

(b) Die Elektronen bewegen sich zwar wesentlich langsamer, als c, aber erreichen die Lampe innerhalb unseres Reaktionsvermögen
Das stimmt zwar prinzipiell auch, aber, um die Lampe zum Leuchten zu bringen muss ja nicht das erste Elektron in der Leitung (beim Schalter) die Lampe erreichen.

(c) das elektrische Feld breitet sich längs des Leiters mit Lichtgeschwindigkeit aus:
JA: Die Elektronen in einem Leiter sind offensichtlich viel langsamer als die Informations-Transportgeschwindigkeit. Tatsächlich breitet sich das elektrische Feld mit Lichtgeschwindigkeit aus und erreicht somit sofort (im Rahmen des Betrachters) die Glühbirne. Dort, wie überall sonst, bewegen sich dann die bereits vorhandenen Elektronen langsam durch den Glühdraht.

Virtuelles Rechnen - Aufteilung: ‖1‖2‖3‖4‖5‖6‖7‖

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm