Institut für Experimentelle Kernphysik, KIT

Übungen zur Klassischen Physik II (Elektrodynamik) SS 2016

Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann

Blatt 10 - Im Angesicht von Hall, Ampere, Biot-Savart und Stokes Bearbeitung: 29.6.2016

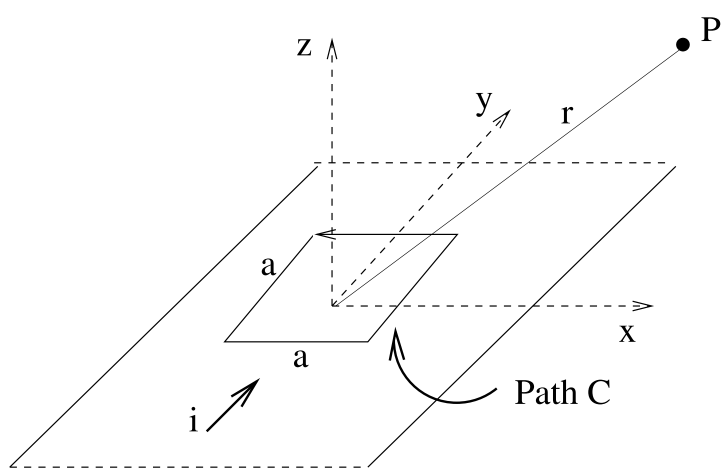
1. Hall-Effekt

Die Kraft, die auf die Ladungsträger q wirkt, ist die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.

(a) Im Metallstreifen befinden sich hauptsächlich freie Elektronen mit negativer Ladung als Ladungsträger, d.h. $q = -e$, außerdem fließt der Strom I in entgegengesetzter Richtung zu den Elektronen, d.h. $\vec{j}$ ist antiparallel zu $\vec{v}$. Die Kraft $\vec{F}$ zeigt dann nach rechts, d.h. in Richtung des Punktes b. Die Elektronen sammeln sich also zum Punkt b hin, der somit auf einem niedrigeren Potential als Punkt a liegt.

(b) Im p-leitenden Halbleiter sind die Ladungsträger positiv geladene Löcher oder Elektronenfehlstellen. Es gilt also $q = e > 0$ und jetzt $\vec{j} \parallel \vec{v}$, also die Kraft zeigt wiederum nach rechts. Die positiven Löcher wandern somit zum Punkt b, der damit auch auf ein höheres Potential als Punkt a gehoben wird.

2. Das Amperesche Gesetz



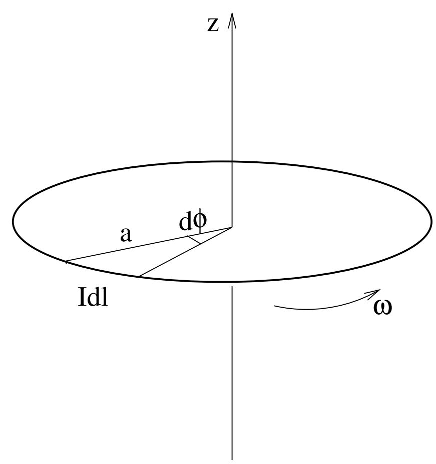
Das Amperesche Gesetz lautet: $\int_C \vec{B}.d\vec{s} = \mu_0 I$, wobei das Integral über einen geschlossenen Pfad um den Strom I läuft. Man betrachte einen beliebigen Punkt P ausserhalb der Platte (siehe Abbildung). Im gewählten Koordinatensystem bleibt (unter Verwendung des Biot-Savartschen Gesetzen und unter Ausnutzung der Symmetrie) nur eine Komponente des $\vec{B}$-Feldes (in x-Richtung) nach der Integration übrig. Man wähle einen rechteckigen Integratiospfad der Kantenlänge a. Nur die Seiten parallel zur x Richtung tragen zum Integral bei, so dass der vom Integrationspfad umschlossene Strom gegeben ist durch:

$$J_s\times \text{ (Abstand senkrecht zum Strom)} = J_s \cdot a.$$

Die Anwendung des Ampereschen Gesetzes ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{B}.\vec{ds} &= Ba + Ba = \mu_0 J_s a \\
B &= \frac{\mu_0 J_s}{2}
\end{aligned}$$

3. <u>Das Biot-Savartsche Gesetz 1</u>



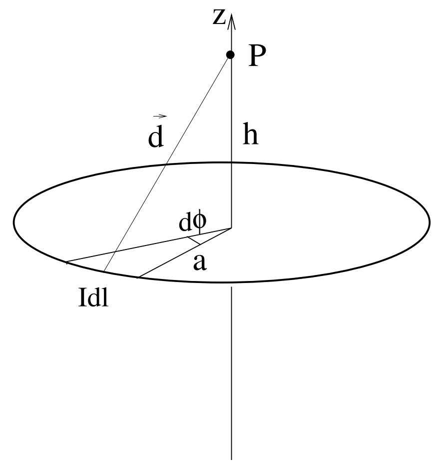
Das Biot-Savartsche Gesetz ist gegeben durch:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$

In Zylinderkoordinaten gilt: $Id\vec{l} \times \vec{r} = Iad\phi\hat{\phi} \times a\hat{r} = Ia^2 d\phi\hat{z}$, d.h. das $\vec{B}$-Feld zeigt entlang der z-Achse (siehe Abbildung), die Richtung ist durch die "Rechte-Hand-Regel" festgelegt.

Ein beliebiger (aber fester) Punkt auf dem Leiter macht eine Umdrehung pro Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$, so dass die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde gegeben ist durch: $\frac{\omega}{2\pi}$. Eine Ladung passiert daher einen Punkt in der Schaltung $\frac{\omega}{2\pi}$ mal in der Sekunde und entspricht somit einem Strom $I = \frac{Q\omega}{2\pi}$.

$$\begin{aligned}
d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi a^3} \cdot \frac{Q\omega}{2\pi} a^2 d\phi \hat{z} \\
\vec{B} &= \frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi^2 a} \int_0^{2\pi} d\phi \hat{z} \\
\vec{B} &= \frac{\mu_0 Q\omega}{4\pi a} \hat{z}.
\end{aligned}$$



4. Das Biot-Savartsche Gesetz 2

Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes ergibt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d^3} d\vec{l} \times \vec{d}$$

In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} I d\vec{l} \times \vec{d} &= I(a^2 d\phi\, \hat{\phi} \times \hat{r} + ahd\phi\, \hat{\phi} \times \hat{z}) \\ &= I(a^2 d\phi\, \hat{z} + ahd\phi\, \hat{r}) \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie heben sich alle Beiträge in der $\hat{r}$ Richtung auf, so dass das $\vec{B}$-Feld entlang der z Achse zeigt, die Richtung ist durch die "Rechte-Hand-Regel" gebeben.

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 I a^2 d\phi}{4\pi d^3} \\ \Rightarrow B &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(a^2+h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ \Rightarrow B &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+h^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

5. Stokescher Satz

Es fließt ein radialsymmetrischer Strom in z-Richtung
$\Rightarrow$ Man nutze Zylinderkoordinaten, r, ϕ, z mit dem Wegelement: $ds = rdrd\phi dz$!

$$\begin{array}{ll} j(r) = j_0 \frac{1}{r} e^{-\lambda r} & \text{für} \quad a \leq r \leq b \\ 0 & \text{für} \quad r < a \bigvee r > b \end{array} \tag{1}$$

$$rot\ \vec{B}(r) = \nabla \times \vec{B}(r) = \mu_0 \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} H \tag{2}$$

Stokescher Satz: (allgemein gültig)

$$\int\int_A \nabla \times \vec{B} d\vec{A} = \oint_P \vec{B} d\vec{s} \tag{3}$$

(1) in (2), zusammen in (3)

$$\int\int_A \mu_0 j(r) d\vec{A} = \oint_P \vec{B} d\vec{s} = 2\pi r B(r) \text{ Kreispfad mit Radius } r \tag{4}$$

Fallunterscheidung nötig: Fall 1: $r < a$

$$\int\int_A 0 d\vec{A} = 0 = \oint_P \vec{B} d\vec{s} = 2\pi r B(r) \Rightarrow \ B(r) = 0 \tag{5}$$

Fall 2: $r \leq b$ Exponentieller plus $1/r$-Beitrag!

$$j_0\mu_0 \int_0^{2\pi} \int_a^r \frac{1}{r} e^{-\lambda r} r \cdot dr d\phi = j_0\mu_0 2\pi \int_a^r e^{-\lambda r} \cdot dr = 2\pi r B(r) \Rightarrow \tag{6}$$

$$B(r) = \frac{j_0\mu_0}{\lambda r} \left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda r}\right) \tag{7}$$

Fall 3: $r > b$ Reiner $1/r$-Anteil, die Strom**verteilung** spielt keine Rolle mehr.

$$j_0\mu_0 \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} e^{-\lambda r} r \cdot dr d\phi = 2\pi r B(r) \Rightarrow \tag{8}$$

$$B(r) = \frac{j_0\mu_0}{\lambda r} \left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right) \tag{9}$$

Flächenintegral für $r > b$ ist gleich null.

Nebenrechnung:

$$\int_a^b e^{-\lambda r} dr = \frac{1}{\lambda} \left(e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}\right)$$

6. <u>2 Leiter</u>

ZUSATZ Kraft nicht nur auf einen Probekörper, sondern auch auf einen Nachbarleiter!)

Nach dem Gesetz von Biot-Savart (siehe oben) erzeugt ein Stromelement $\vec{I}\vec{dl}$ in einem Punkt der vom Stromelement um den Ortsvektor $\vec{r}$ entfernt liegt, senkrecht zu $\vec{dl}$ und $\vec{r}$ den Beitrag

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I}}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \tag{10}$$

zum magnetischen Gesamtfeld $\vec{H}$ des Leiters in diesem Punkt. Mit $dl = dz$, $|\vec{dl} \times \vec{r}| = dz \sin\varphi = dz\ a$ und $r = \sqrt{z^2 + a^2}$ gilt für den Betrag

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz \sin\varphi}{r^2} = \frac{Ia}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{Il}{4\pi a \sqrt{(l^2/4) + a^2}} \tag{11}$$

Das Magnetfeld ist rechts vom Leiter in die Zeichenebene hinein gerichtet (Rechte-Hand-Regel).
Für $l \to \infty$ erhält man

$$H_\infty = \lim_{l\to\infty} \frac{I}{2\pi a\sqrt{1+4a^2/l^2}} = \frac{I}{2\pi a} \tag{12}$$

Einfachere Rechnung via Maxwell-Gleichung / Ampersches Gesetz:
dafür ausführlich:

$$\oint_{\partial F} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int\int_F \vec{J}\cdot d\vec{F}; \qquad \vec{D} = 0 \tag{13}$$

Flächenstromdichte über die Fläche integriert ergibt den Gesamtstrom I
Magnetfeld Linienintegral geht *um* den Leiter ((Kreis) radialsymmetrisch, d.h. nur von r abhängig)

$$\int_0^{2\pi} r\cdot H\cdot d\varphi = 2\pi\cdot r\cdot H = I \tag{14}$$

Magnetfeld um Leiter ($\vec{B} = \mu_0\vec{H}$)

$$H = \frac{I}{2\pi\cdot r}; \quad B = \frac{\mu_0\cdot I}{2\pi\cdot r} \tag{15}$$

(a) Aus $H = \frac{I}{2\pi r}$ folgt mit $r = d/2 : H_1 + H_2 = \frac{I_1 - I_2}{\pi d} = -31,8A/m$ (bezüglich I_2 gemäß Rechte-Handregel orientiert)

(b) Aus $H_1 + H_2 = \frac{I_1}{2\pi x} - \frac{I_2}{2\pi(d-x)} = 0$ folgt $x = \frac{I_1 d}{I_1+I_2} = 4cm$

(c) **ZUSATZ:** Kraft zwischen 2 Leitern!
Feld im Abstand r vom Leiter:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \tag{16}$$

Kraft des B-Felds auf einen Leiter:

$$d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B} \tag{17}$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} \tag{18}$$

(16) und (18) in (17)

$$\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B} \overset{l\perp B}{=} \frac{\mu_0 I_1\cdot I_2\cdot l}{2\pi r}\frac{\vec{r}}{r} \tag{19}$$

A la Newton 3 erfahren beide Leiter diese Kraft.

Da stromführende Leiter sowohl Magnetfelder erzeugen wie auch durch Magnetfelder Kräfte erfahren, ergibt sich, dass zwischen zwei Strömen eine Kraft wirken muss. Gleichgerichtete Ströme sind anziehend und entgegengesetzt gerichtete abstossend (Hierzu muss man die rechten Winkel und die Rechte-Handregel beachten).
Immer nachdenken ob man besser Biot-Savart ... oder Amper ... benutzt.

Virtuelles Rechnen - Aufteilung: $\|1\|2\|3\|4\|5\|6\|$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/EDYN.htm

Hier finden Sie auch alle Daten zu den Klausuren!