Institut für Experimentelle Kernphysik, KIT

Übungen zur Klassischen Physik II (Elektrodynamik) SS 2016

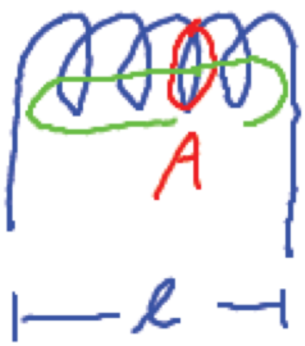
Prof. Dr. T. Müller
Dr. F. Hartmann **12tes und letztes Übungsblatt - Spulen, Wechselstrom mit komplexen Zahlen und Transformatoren** Bearbeitung: 13.7.2016

---

1. Induktivität einer Spule, Dynamisches Verhalten einer Spule plus Widerstand

Gegeben ist eine lange Zylinderspule mit N=100 Windungen, der Querschnittsfläche $A = 12.6cm^2$ und der Länge l = 20 cm.

(a) Leiten Sie die Induktivität L mit Hilfe des Induktionsgesetzes ab.



Fläche A - rot; Umlauf s - grün

$$\text{Amperesches Gesetz: im Innern der Spule } \oint_P \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 \cdot N \cdot I = B \cdot l \tag{1}$$

Stromlauf I wird N mal 'gesehen'

$$\text{Fluss}: \Phi = \int \vec{B}d\vec{A} = B \cdot A \tag{2}$$

$$U_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}(BA) = -NA\frac{dB}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{3}$$

1 nach B aufgelöst in 3

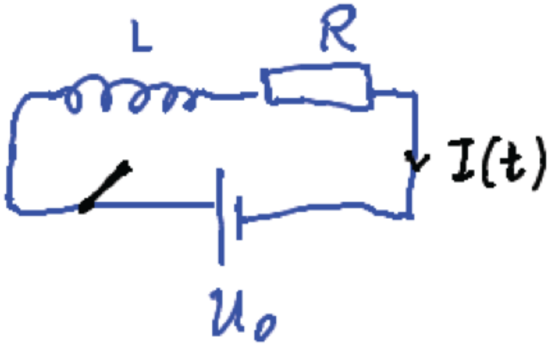
$$U_i = -NA\frac{\mu_0 N}{l}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{4}$$

Vergleich; ergo

$$L = \frac{N^2 A\mu_0}{l} \tag{5}$$

Hier: $L = 10^4 \cdot 12.6(10^{-2}m)^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}VsA^{-1}m^{-1}0.2m = 7.9 \cdot 10^{-5}H \approx 8\mu H$

(b) Die Spule liegt in Reihe mit einem Widerstand R und einer Spannungsquelle der Spannung U_0. Berechnen Sie den Einschaltstrom und die Spannung über der Spule als Funktion der Zeit.



Maschenregel

$$U_0 = -U_L + U_R = -L\frac{dI}{dt} + IR \tag{6}$$

Inhomogene DGL: Zu lösen mit Ansatz oder Trennung der Veränderlichen - beide Lösungen hier. Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0 - IR}{L} \rightarrow \frac{dI}{U_0 - IR} = \frac{dt}{L} \rightarrow \frac{dI}{\frac{U_0}{R} - I} = \frac{R}{L}dt \tag{7}$$

$$\frac{1}{-1}\ln\left(\frac{U_0}{R} - I\right) = \frac{R}{L}t + C_1 \Rightarrow \frac{U_0}{R} - I = C_2 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \tag{8}$$

$$\Rightarrow I = \frac{U_0}{R} - C_2 e^{\frac{t}{\tau}};\ \text{mit}\ \tau = \frac{L}{R} \tag{9}$$

Randbedingung: $t \rightarrow \infty$ muss $I = \frac{U_0}{R}$ gelten und $I(t=0) = 0$ erfordert $C_2 = \frac{U_0}{R}$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right) \tag{10}$$

Spannung über der Spule

$$U_L = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{U_0}{R} \cdot \frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}} = -U_0 e^{\frac{t}{\tau}} \tag{11}$$

Und nun mit Ansatz: Maschenregel

$$U_0 = -U_L + U_R = -L\frac{dI}{dt} + IR \tag{12}$$

Ansatz:

$$I(t) = k_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + k_2;\ \text{Nebenbedingung I}:\ I(t=0) = 0 \rightarrow k_1 = -k_2 \tag{13}$$

Einsetzen:

$$\frac{U_0}{R} = -\frac{L}{R}k_1\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + k_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + k_2 \Rightarrow \tau = \frac{R}{L} \tag{14}$$

Nebendingung II:

$$I(t \rightarrow \infty) = \frac{U_0}{R} \Rightarrow k_2 = \frac{U_0}{R} \Rightarrow k_1 = -\frac{U_0}{R} \tag{15}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{\frac{L}{R}t}\right) \tag{16}$$

Spannung siehe oben - ableiten!

2. Induktivitäten parallel - Induktivitäten seriell

Gegeben seien zwei Induktivitäten L_1 und L_2, die in grossem Abstand von einander parallel/seriell geschaltet sind. Was ist die Gesamtinduktivität der beiden?

Einfach zum merken:

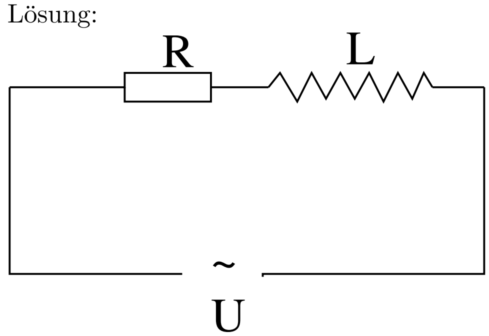
$$\text{seriell}: \; L_{ges} = L_1 + L2; \; \text{allgemein}: \; L_{ges} = \Sigma L_i \tag{17}$$

$$\text{Parallel}: \; \frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \; \text{allgemein}: \; \frac{1}{L_{ges}} = \Sigma \frac{1}{L_i} \tag{18}$$

3. Und meine Leuchtstoffröhre funktioniert doch!

Eine Leuchtstoffröhre benötigt eine Spannung von U=50V und eine Stromstärke I=0.12A (Effektivwerte) und kann als ohmscher Widerstand betrachtet werden. Welche Induktivität L muss eine, in Reihe geschaltete Spule haben, damit die Leuchtstoffröhre an die Netzspannung (230V,50Hz) angeschlossen werden kann? Der ohmsche Widerstand der Spule sei vernachlässigbar.

Lösung:



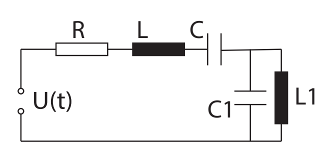
$$z = R + i\omega L$$

Betrage: $\frac{U_0}{I_0} = |z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{I_0} &= \frac{U_{eff}\sqrt{2}}{I_{eff}\sqrt{2}} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\
\omega^2 L^2 &= \left(\frac{U_{eff}}{I_{eff}}\right)^2 - R^2 \;, R = \frac{50V}{I_{eff}} \\
L &= \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U_{eff}}{I_{eff}}\right)^2 - \left(\frac{50V}{I_{eff}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi 50Hz} \cdot \frac{1}{0.12A}\sqrt{230^2 - 50^2} \\
L &= 5,96H
\end{aligned}$$

4. Darf es heute etwas komplex sein - Wechselstromkreise

Ein Stromkreis aus Kapazitäten, ohmschen Widerständen und Induktivitäten sei wie in der Abbildung gegeben.



(a) Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der Schaltung, wenn von Aussen eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin \omega t$ angelegt wird.

(b) Wie groß ist der Maximalstrom, der im Kreis fließen kann, wenn man die Frequenz ω variiert, die Amplitude U_0 aber konstant hält?

(c) Was ist bei Variation von ω bei konstantem U_0 der minimale Strom? Bei welchen Frequenzen kann dieser Minimalstrom beobachtet werden?

Lösung **(a)**

RLC in Serie mit C_1, L_1 parallel. Ohmscher Widerstand: $X_R = R$
komplexer induktiver Widerstand: $X_L = i\omega L$
komplexer Widerstand der Kapazität: $X_C = \frac{1}{i\omega C}$
Komplexer Widerstand: $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$
Sein Betrag wird Impedanz genannt: $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

$$Z^2 = ZZ^* = \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right) \cdot \left(R - i\omega L - \frac{1}{i\omega C}\right) = \left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \tag{19}$$

$$= \left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \tag{20}$$

Anwendung auf Schaltkreis der Aufgabe:

$$Z(\omega) = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + \frac{\frac{1}{i\omega C_1} \cdot i\omega_1}{\frac{1}{i\omega C_1} + i\omega L_1} = ... = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}\right) \tag{21}$$

(b)

komplexer Strom $I(t) = U(t)/Z$

$$I(t) = \frac{U(t)}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_1}\right)} \text{ mit } U(t) = U_0 \sin(\omega t); U_0 = \text{konstant} \tag{22}$$

folgt Amplitude $I_0 = \frac{U_0}{|Z|}$ also

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_1}\right)^2}} \tag{23}$$

(c)

$$I_0 = I_0(\omega) \tag{24}$$

variiere $\omega \Rightarrow I_{max}, I_{min}$
$I_{max} = \frac{U_0}{R}$
I_{min} für $\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_1} \to \infty$
triviale Lösungen für $\omega = 0$ und $\omega = \infty$

$$1 - \omega^2 C_1 L_1 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot L_1}} \tag{25}$$

d.h. Parallelschaltung blockiert für $\omega = \frac{1}{\sqrt{C_1 \cdot L_1}}$ den Stromfluss volständig.

5. <u>Transformator I</u>

Bei einem Transformator (TRAFO) gilt: 2 Spulen, welche denselben Fluss Φ erfahren.
$U_{ind} = -L\frac{dI_1}{dt} = -N_1\frac{d\Phi}{dt} = -U_1$ und $U_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$
Schlussendlich: $\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$ Welche Aussagen sind richtig?

(a) **Richtig** Die Spannungen verhalten sich genauso wie die Windungszahlen (Verhältnisse)

(b) **Nein, man braucht eine Stromänderung.** Das System funktioniert mit Gleichstrom

(c) **Richtig** Um hohe Spannungen zu erzeugen muss die Sekundärspule deutlich mehr Windungen haben, als die Primärspule

(d) **Nein, umgekehrt** Um hohe Ströme zu erzeugen muss die Sekundärspule deutlich mehr Windungen haben, als die Primärspule

(e) N**ein, Energieerhaltung** Durch geschickte Wahl vieler Spulen kann man höhere Ströme und gleichzeitig höhere Spannungen erzeugen

(f) **Richtig** Der Wirkungsgrad eines realen Trafo ist nicht 100%; es wird Leistung/Energie in Wärme umgewandelt.

6. <u>Transformator II</u>

Ein idealer Trafo (Wirkungsgrad 100%) an Netzspannung $V = 230V$ mit Windungszahlen $N_1 = 500$ und $N_2 = 13$. Welche Aussagen sind richtig?

(a) Die Sekundärspannung ist 1V

(b) **Richtig** Die Sekundärspannung ist 6V

(c) Am am Sekundärkreis angeschlossenem Motor mit Widerstand $R = 60\Omega$ fliessen 10 mA Strom

(d) **Richtig** Am am Sekundärkreis angeschlossenem Motor mit Widerstand $R = 60\Omega$ fliessen 100 mA Strom

(e) Am am Sekundärkreis angeschlossenem Motor mit Widerstand $R = 60\Omega$ fliessen 1 A Strom

(f) Im Primärkreis fließen 1 mA Strom

(g) **Richtig** im Primärkreis fließen 2.6 mA Strom

zu b:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow U_2 = \frac{U_1 \cdot N_2}{N_1} = \frac{230V \cdot 13}{500} = 5.98V \tag{26}$$

zu d

$$U = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{U}{R} = \frac{6V}{60\Omega} = 100mA \tag{27}$$

zu g

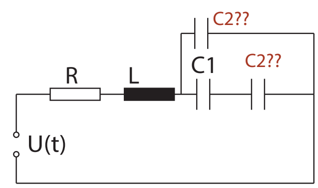
$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 = P_2 \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{U_2 \cdot I_2}{U_1} = 2.6mA \tag{28}$$

7. Schwingkreis

Ein Schwingkreis bestehe aus der Serienschaltung einer Spule (Induktivität L), einem Kondensator (Kapazität C1) und einem ohmschen Widerstand R. Er wird von einer Wechselspannungsquelle mit der Spannung $U(t) = U_0 sin(\omega t)$ gespeist. Dieser Schwingkreis soll durch einen Zusatzkondensator der Kapazitat C2 so abgestimmt werden, dass seine Resonanzfrequenz f_r mit der Generatorfrequenz $f = \omega/2n$ übereinstimmt. Kapazität parallel oder in Serie??

(a) Berechnen Sie die Kapazität C2 des zusätzlichen Kondensators.

(b) Im abgestimmten Schwingkreis wird im Widerstand R eine Wärmeleistung P umgesetzt. Wie groß ist R?



(c) Bestimmen Sie den Scheinwiderstand und den Phasenwinkel für den Schwingkreis aus R, C1 und L bei der Generatorfrequenz f.

(d) Bestimmen Sie für den Schwingkreis in c) die Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung.

Zahlenwerte: $U_0 = 15$ V; f =1 kHz; C1 =90 nF; L =300 mH; P =2.5 W.

Lösung:

$f = 1$ kHz $\rightarrow \omega = 2\pi f = 6283 s^{-1}$

Bedingung $\omega_r \approx \omega$; $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ für kleine Dämpfung.

$\Rightarrow C_r = \frac{1}{\omega_r^2 L} = \frac{1}{6283^2 s \cdot 300 \cdot 10^{-3}} F = 94.4nF < C_1 \Rightarrow$ C_2 muss in Reihe zu C_1 stehen.

$\Rightarrow C_2 = \frac{C_r C_1}{C_1 - C_r} = \frac{84.4 \cdot 90}{90 - 84.4} nF = 1.36 \mu F$

b) Blindwiderstand =0 im Resonanzfall

$P = U_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{U_o}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U_0^2}{2P} = \frac{15^2 V^2}{2 \cdot 2.5W} = 45\Omega$

c) Scheinwiderstand

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ mit $X = X_L - X_C = \omega_r L - \frac{1}{\omega_r C_1} = 116.5\Omega$

$\Rightarrow Z = \sqrt{45^2 + 116.6^2}\Omega = 125\Omega$

Phasenwinkel $\tan \Phi = \frac{X}{R} = 2.6 \rightarrow \Phi = 69^o$

d)

Scheinleistung $S = U_{eff} I_{eff} = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{U_0^2}{2Z} = 0.9VA$

Wirkleistung $P = U_{eff} I_{eff} \cos \Phi = S \cos \Phi = 0.32W$

Blindleistung $Q = U_{eff} I_{eff} \sin \Phi = S \sin \Phi = 0.84W$

8. Wechselspannung

Eine Wechselspannung ist gegegen durch: $U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ Welche Aussagen sind richtig?

(a) **korrekt**. Integral über Sin =Null. Der Mittelwert der Spannung ist NULL

(b) **korrekt**. Der Quotient aus Gesamtspannung und Gesamtstrom heißt Scheinwiderstand oder Impedanz $Z = \frac{U_{ges}}{I_{ges}}$

(c) **falsch** Effektivwert $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$

(d) **korrekt**.Effektivwert $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ item **korrekt**.Bei einem Widerstand schwingt/wechselt U(t) und I(t) in Phase

(e) **falsch** Bei einer Kapazität eilt die Spannung U(t) dem Strom I(t) vorraus

(f) **korrekt** - Nomenklatur. Bei einer Induktivität eilt die Spannung U(t) dem Strom I(t) vorraus

(g) **falsch** Die mittlere Leistung ist immer $< P >= U_0 \cdot I_0$

(h) **korrekt** Impedanz ist der Widerstand gegenüber einer Wechselspannung

(i) Die Impedanz eines Widerstands ist ωR; **NEIN, nur R**

(j) Die Impedanz eines Kondensators ist ωC - Nein, $\frac{1}{\omega c}$

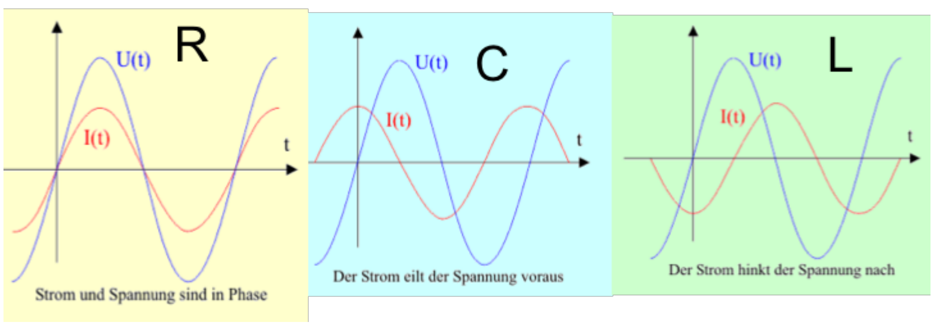
(k) **korrekt** Die Impedanz einer Spule ist ωL

(l) **korrekt** Spule blockiert hohe Frequenzen, läßt Gleichstrom durch

(m) **falsch** Kondensator blockiert hohe Frequenzen, läßt Gleichstrom durch

$X_L = \omega L \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow \infty$
$X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow 0$
Spule blockiert hohe Frequenzen und läßt Gleichstrom durch

$X_L = \omega L \rightarrow o$ für $\omega \rightarrow \infty$
$X_L = \omega L \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow 0$
Kondensator läßt hohe hohe Frequenzen durch und blockiert Gleichstrom durch



Virtuelles Rechnen - Aufteilung: $\|\mathbf{1a}\|\mathbf{1b}\|\mathbf{2}\|\mathbf{3}\|\mathbf{4}\|\mathbf{5}\|\mathbf{6}\|\mathbf{7a},\mathbf{b}\|\mathbf{7c},\mathbf{d}\|$

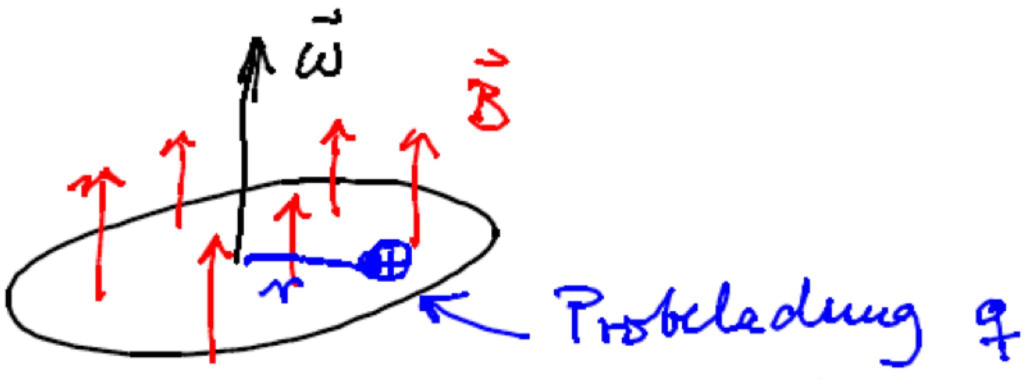
Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/EDYN.htm

Zum Spass:

Karussell im Magnetfeld - Induktion und Bezugssysteme

Eine kreisförmige Kunststoffscheibe rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 10^3 s^{-1}$ in einem homogenen Magnetfeld der Stärke $B = 0.5Vs/m^2$ um eine Achse durch den Mittelpunkt der Scheibe. Die Vektoren der Winkelgeschwindigkeit und des Magnetfeldes sind parallel.

(a) Wie gross ist das elektrische Feld E(r), das ein Beobachter im System der rotierenden Scheibe messen kann?



Ruhender Beobachter "sieht" bewegte Ladung im B-Feld:

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \tag{29}$$

Rotierender Beobachter "sieht" die Ladung in Ruhe bemerkt aber *eine elektrische* Kraft auf die Ladung q:

$$\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E} \text{ mit } \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \tag{30}$$

und damit beide Situaionen gleich sind ist das elektrische Feld (auch wenn es empirisch gemessen würde)

$$E = \omega \cdot r \cdot B = 10^3 \cdot r \cdot 0.5T = 500\frac{V}{m^2} \cdot r \sim r \tag{31}$$

Relativität der Felder

(b) Welche Spannung besteht zwischen zwei Punkten auf der Scheibe, die sich bei Radien $r_1 = 2cm$ und $r_2 = 4cm$ befinden?

Spannung = intergration des Potentials

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \omega \cdot r \cdot B dr = \omega B \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_1}^{R_2} = 0.3V \tag{32}$$