Alexey Ustinov, Hannes Rotzinger Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Übungen zur Klassischen Experimentalphysik II SS 2017

Übungsblatt 3 · Besprechung am 17. Mai 2017

http://www.phi.kit.edu/phys2.php ILIAS KPW: *KPII-SS2017*

Aufgabe 7: Gradient, Divergenz und Rotation *(3 Punkte)*

(a) Erklären Sie den Begriff des Gradienten eines skalaren Feldes anhand einer Kugel, die einen Berghang hinunter rollt (potentielle Energie).

(b) Gegeben ist ein skalares Feld mit $f(\vec{r}) = \frac{1}{2+r^2}$ und $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Berechnen Sie den Gradienten $\vec{\nabla} f$.

(c) Erklären Sie jeweils qualitativ die Begriffe Divergenz und Rotation anhand einer mit Wasser gefüllten Badewanne. Wo ändern sich beide Größen des Geschwindigkeitsfeldes des Wassers $\vec{v}(\vec{r})$ wenn der Wasserhahn geöffnet ist, bzw. beim Ablaufen des Wassers?

(d) Zeigen Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Flüssigkeit, gegeben durch $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ quellenfrei ist, d.h. dass seine Divergenz verschwindet: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Dabei ist $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ und $\vec{r} = (x, y, z)$.

(e) Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot} \vec{v}$ des Geschwindigkeitsfeldes aus Aufgabenteil (d).

Aufgabe 8: *(2 Punkte)*
Gegeben sein ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Berechnen Sie das Integral $\epsilon_0 \oint_A \vec{E} d\vec{A}$ über die geschlossene Oberfläche A eines Würfels mit der Kantenlänge L, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt und dessen Kanten entlang den Raumrichtungen x, y und z verlaufen. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn über die nicht geschlossene Oberfläche des halben Würfels (oberhalb der x-y-Ebene) integriert wird ?

Aufgabe 9: *(3 Punkte)*
Berechnen und skizzieren Sie die radiale Abhängigkeit des elektrischen Feldes $\vec{E}(r)$ und des elektrischen Potentials $\varphi(r)$ (für $0 < r < \infty$) folgender Objekte mit jeweils dem Radius R:

(a) homogen geladener unendlich langer Draht

(b) unendlich langer Draht, bei dem die Ladung nur auf der Oberfläche ist.

Aufgabe 10: *(2 Punkte)*
An der Erdoberfläche beträgt die elektrische Feldstärke etwa E = 130 V/m.

(a) Wie groß ist die Kapazität der Erde, wenn sie als leitende Kugel betrachtet wird (kurze Herleitung)?

(b) Wie groß sind die Gesamtladung auf der Erdoberfläche und die Spannung, wenn angenommen wird, dass in höheren Schichten der Atmosphäre keine elektrischen Ladungen vorhanden sind?

(c) Welche Werte ergeben sich, wenn eine Gegenladung (auf einer Kugelschale) im Abstand h = 10 km von der Erdoberfläche angenommen wird?

Nabla-Operator Spickzettel

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right); \quad \varphi = \text{Skalar (Feld)}, \quad \vec{X} = \text{Vektor (Feld)}$$

$$\vec{\nabla}\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \equiv \operatorname{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} \equiv \operatorname{rot}\vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\varphi) = \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi \iff \operatorname{div}(\vec{A}\varphi) = \varphi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\varphi) = \varphi\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\times\vec{\nabla}\varphi \iff \operatorname{rot}(\vec{A}\varphi) = \varphi\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\operatorname{grad}\varphi$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \iff \operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \iff$$
$$\operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\operatorname{grad})\vec{A} - (\vec{A}\operatorname{grad})\vec{B} + \vec{A}(\operatorname{div}\vec{B}) - \vec{B}(\operatorname{div}\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \iff$$
$$\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\operatorname{grad})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\operatorname{grad})\vec{B} + \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} + \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) \equiv \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad \Delta = \text{Laplace Operator}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \equiv \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{A} \equiv 0$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) \equiv \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\varphi \equiv 0$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \equiv \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Satz von Gauß:

$$\int\limits_{\text{Oberlfläche}} \vec{E} \quad d\vec{f} = \int\limits_{\text{Volumen}} \operatorname{div}\vec{E} \quad dV$$

Satz von Stokes:

$$\oint\limits_{\text{Weg}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int\limits_{\text{Fläche}} \operatorname{rot}\vec{E}\cdot d\vec{f}$$