Alexey Ustinov, Hannes Rotzinger Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Übungen/Lösungen zur Klassischen Experimentalphysik II SS 2017

Übungsblatt 3 · Besprechung am 17. Mai 2017

http://www.phi.kit.edu/phys2.php ILIAS KPW: *KPII-SS2017*

Aufgabe 7:

(a) Die potentielle Energie der Kugel ist ein skalares Feld der Form $E_{pot} = gh(x, y)$, wobei $h(x, y)$ die Höhenkontur des Berghangs ist. Der Gradient der Energie entspricht der Kraft auf die Kugel: grad $E_{pot} = -\vec{F}$, die Kugel wird beim Herunterrollen also immer entlang des Gradienten beschleunigt. Dieser zeigt dabei immer in Richtung der größten Steigung.

(b) $\vec{\nabla} f = -\frac{2\vec{r}}{(2+r^2)^2}$

(c) Beim Wasser Einlassen: Divergenz ungleich 0 unterhalb des Wasserhahns, Rotation gleich 0; beim Ablassen bildet sich meistens ein Strudel: Rotation und Divergenz ungleich 0 beim Ausfluss.

(d) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-\omega y, \omega x, 0)$; $\vec{\nabla} v = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0$.

(e) $\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial(-\omega y)}{\partial z}\vec{e}_y + \left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right)\vec{e}_z = 2\omega\vec{e}_z$. Hierbei ist $\vec{e}_i$ der Einheitsvektor in Richtung i.

Aufgabe 8: Oberflächenintegral

Berechnung des Oberflächenintegrals des Würfels : 6 Seiten → 6 Normalenvektoren die immer nach außen zeigen:
$dA_{x1} = (1, 0, 0)$, $dA_{x2} = (-1, 0, 0)$, $dA_{y1} = (0, 1, 0)$, $dA_{y2} = (0, -1, 0)$, $dA_{z1} = (0, 0, 1)$, $dA_{z2} = (0, 0, -1)$.

$$\epsilon_0 \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \epsilon_0 (\oint_{L^2} \vec{E} dA_{x1} + \oint_{L^2} \vec{E} dA_{x2} + \oint_{L^2} \vec{E} dA_{y1} + \oint_{L^2} \vec{E} dA_{y2} + \oint_{L^2} \vec{E} dA_{z1} + \oint_{L^2} \vec{E} dA_{z2})$$

Durch die symmetrische Durchsetzung des homogenen Feldes:

$$= \epsilon_0 \oint_{L^2} (E_x, E_y, E_z) d(1, 0, 0) + ...$$

ergibt sich

$$= \epsilon_0 (E_x L^2 - E_x L^2 + E_y L^2 - E_y L^2 + E_z L^2 - E_z L^2) = 0$$

wie vermutet, da alle Feldlinien, die in den Würfel gehen, ihn auch wieder verlassen.

Beim halben Würfel ist das vorgehen identisch, bei den Seitenflächen (x, y) ergibt das Integral wieder 0, da das Feld welches in den Würfel hineingeht auch wieder auf der anderen Seite austritt. Somit spielt nur der Deckel (z) eine Rolle:

$$\epsilon_0 (\oint_{L^2} \vec{E} dA_{z1}) = \epsilon_0 (\oint_{L^2} (E_x, E_y, E_z) d(0, 0, 1)) = \epsilon_0 E_z L^2$$

Aufgabe 9:

(a) homogen geladener Draht der Länge $L \gg R$ mit der Raumladungsdichte ρ

(i) innen ($r < R$): $\int \vec{E} d\vec{S} = E_i 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$
Das Flächenelement $d\vec{S}$ ist der Zylindermantel.

$$E_i 2\pi r L = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$$E_i = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r$$

mit der Ladung pro Länge

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \pi R^2 \rho$$

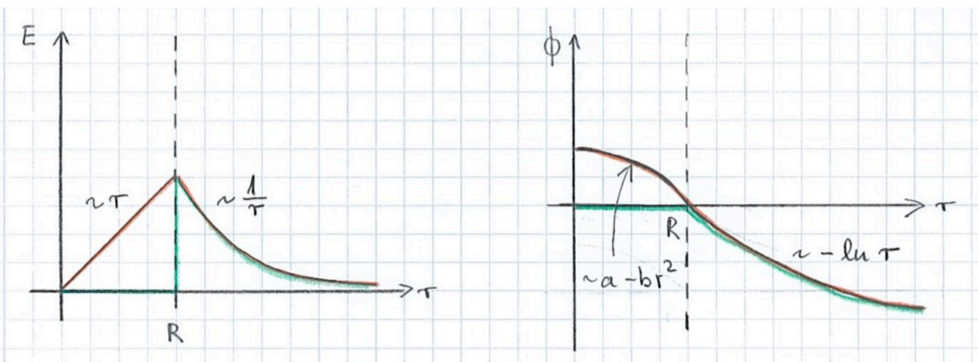
(ii) außen: $E_a = 2\pi r L = \frac{\rho \pi R^2 L}{\epsilon_0}$

$$E_a = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\rightarrow \varphi_i = -\int_R^r E_i dr = -\int_R^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2}(R^2 - r^2)$$

$$\varphi_a = -\int_R^r E_a dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}$$

(b) "hohler Draht": $\rightarrow Q_i = 0 \rightarrow E_i = 0$ und $E_a \propto \frac{1}{r}$ (außen bleibt)
$\varphi_i =$ konst und $\varphi_a \propto \ln r$ (außen bleibt).



Aufgabe 10:

(a) Kapazität einer leitenden Kugel

$$C = \frac{Q}{U}$$

mit

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) dr$$

und

$$\int E df = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2};\ r_i < r < r_a$$

$$\rightarrow U = \int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$$

also

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Näherungsweise kann die Erde als leitende Kugel ansehen: $r_a \rightarrow \infty$: $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_E}$
$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 r_E = 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot 6371\,\mathrm{km}$. $C = 709\,\mu\mathrm{F}$

(b) $E = 130\,\mathrm{V/m} \rightarrow$ (aus (a)) $U = E(r) \cdot r_E = 828\,\mathrm{MV}$.
$\rightarrow Q = C \cdot U = 4\pi\epsilon_0 E(r) r_E^2 = 5.87 \cdot 10^5\,\mathrm{C}$.

(c) Gegenladung der Kugel bei $r_a = r_E + h = 6381$:

$$C' = \frac{Q}{U'} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_a} \right)^{-1}$$

$C' = 0.45\,\mathrm{F}$
Die Ladung auf der Erdoberfläche bleibt gleich:
$Q = Q' = 4\pi\epsilon_0 r_E^2 E(r) = 5.87 \cdot 10^5\,\mathrm{C} \rightarrow U' = \frac{Q}{C'} = 1.3 \cdot 10^6\,\mathrm{V}$