

Klassische Experimentalphysik 2 - SoSe 2020

Übungsblätter

Studentische Lösung

22. Oktober 2020

Alle Angaben sind ohne Gewähr von Richtigkeit und Vollständigkeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Blatt 1	4
1.1	Aufgabe 1	4
1.2	Aufgabe 2	5
1.3	Aufgabe 3	7
2	Blatt 2	10
2.1	Aufgabe 4	10
2.2	Aufgabe 5	13
2.3	Aufgabe 6	14
2.4	Aufgabe 7	16
3	Blatt 3	20
3.1	Aufgabe 8	20
3.2	Aufgabe 9	22
3.3	Aufgabe 10	24
4	Blatt 4	27
4.1	Aufgabe 11	27
4.2	Aufgabe 12	28
4.3	Aufgabe 13	28
4.4	Aufgabe 14	31
4.5	Aufgabe 15 (freiwillig)	34
5	Blatt 5	36
5.1	Aufgabe 16	36
5.2	Aufgabe 17	38
5.3	Aufgabe 18	41
5.4	Aufgabe 19 (freiwillig)	44
6	Blatt 6	46
6.1	Aufgabe 20	46
6.2	Aufgabe 21	49
6.3	Aufgabe 22	51
6.4	Aufgabe 23	52
7	Blatt 7	56
7.1	Aufgabe 24	56
7.2	Aufgabe 25	57
7.3	Aufgabe 26	60
7.4	Aufgabe 27	61

Inhaltsverzeichnis

8 Blatt 8	64
8.1 Aufgabe 28	64
8.2 Aufgabe 29	65
8.3 Aufgabe 30	66
8.4 Aufgabe 31	68
8.5 Aufgabe 32	69
9 Blatt 9	72
9.1 Aufgabe 33	72
9.2 Aufgabe 34	73
9.3 Aufgabe 35	75
9.4 Aufgabe 36	76
10 Blatt 10	79
10.1 Aufgabe 37	79
10.2 Aufgabe 38	79
10.3 Aufgabe 39	81
10.4 Aufgabe 40	82
10.5 Aufgabe 41	87
11 Blatt 11	92
11.1 Aufgabe 42	92
11.2 Aufgabe 43	94
11.3 Aufgabe 44	96
11.4 Aufgabe 45	97
12 Blatt 12 (freiwillig)	99
12.1 Aufgabe 46	99
12.2 Aufgabe 47	102
12.3 Aufgabe 48	103
12.4 Aufgabe 49	103

1 Blatt 1

1.1 Aufgabe 1

(a)

Folgende Gleichungen sind uns gegeben:

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (1.1)$$

$$F_C = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \quad (1.2)$$

Gleichsetzung der Gleichungen (1.1) und (1.2):

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{\frac{k \cdot e^2}{r^2}}{\frac{G \cdot m_E^2}{r^2}} \quad (1.3)$$

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{k \cdot e^2}{G \cdot m_E^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{F_C}{F_G} = 4,17 \cdot 10^{42} \quad (1.5)$$

(b)

Masse m bestimmen:

$$-G \cdot \frac{m^2}{r^2} = k \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r^2} \quad (1.6)$$

$$G \cdot m^2 = k \cdot e^2 \quad (1.7)$$

$$m = \sqrt{\frac{k \cdot e^2}{G}} \quad (1.8)$$

$$m = 1,86049 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \quad (1.9)$$

(c)

Wir formulieren Teil (a) um mit m_1, m_2, q_1 und q_2 . Außerdem legen wir fest, dass das Verhältnis beider Massen gleich sein soll.

$$G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (1.10)$$

$$\frac{G}{k} = \frac{q_1 \cdot q_2}{m_1 \cdot m_2} \quad (1.11)$$

$$\frac{G}{k} = \frac{q^2}{m^2} \quad (1.12)$$

$$\frac{q}{m} = \sqrt{\frac{G}{k}} \quad (1.13)$$

$$\frac{q}{m} = 8,611 \cdot 10^{-11} \frac{\text{C}}{\text{kg}} \quad (1.14)$$

(d)

Voraussetzung:

$$\frac{q_E}{M_E} = \frac{q_m}{m_m} \quad (1.15)$$

Rechnung:

$$G \cdot \frac{M_E \cdot m_m}{r^2} = k \cdot \frac{q_E \cdot q_m}{r^2} \quad (1.16)$$

$$G \cdot M_E \cdot m_m = k \cdot q_E \cdot q_m \quad (1.17)$$

$$G \cdot M_E \cdot m_m = k \cdot q_E \cdot q_E \cdot \frac{m_m}{M_E} \quad (1.18)$$

$$G \cdot M_E^2 = k \cdot q_E^2 \quad (1.19)$$

$$q_E = 5,14625 \cdot 10^{14} \text{ C} \quad (1.20)$$

Es folgt: $q_m = 6,3269 \cdot 10^{12} \text{ C}$

1.2 Aufgabe 2

(a)

Gegeben: $r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

1 Blatt 1

$$E = \frac{F}{Q} \quad (1.21)$$

$$E = \frac{k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}}{Q} \quad (1.22)$$

$$E = \frac{k \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r^2}}{e} \quad (1.23)$$

$$E = -k \cdot \frac{e}{r^2} \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow |E| = 5,15 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1.25)$$

(b)

$$F = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \quad (1.26)$$

$$F = k \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r^2} \quad (1.27)$$

$$F = -8,25 \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow |F| = 8,25 \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad (1.29)$$

Die Kraft wirkt in die Richtung des Atomkerns.

(c)

Berechnung:

$$\Delta E = \frac{F_1}{Q} - \frac{F_2}{Q} \quad (1.30)$$

$$\Delta E = \frac{k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}}{Q} - \frac{k \cdot \frac{Q \cdot q}{16 \cdot r^2}}{Q} \quad (1.31)$$

$$\Delta E = \frac{15}{16} \cdot \frac{k \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r^2}}{e} \quad (1.32)$$

$$\Delta E = \frac{15}{16} \cdot -5,15 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow |\Delta E| = 4,828 \cdot 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1.34)$$

1.3 Aufgabe 3

(a)

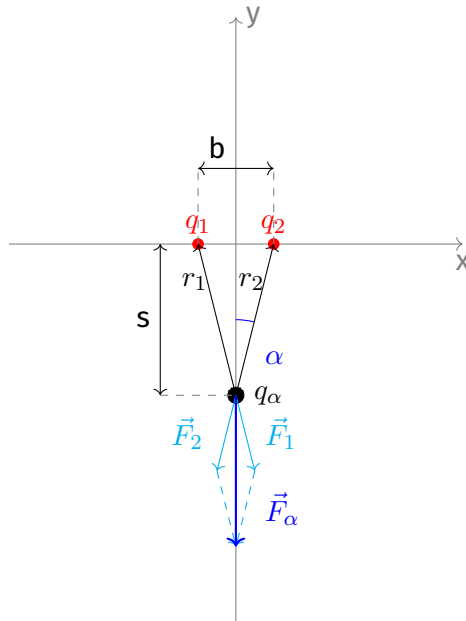


Abbildung 1.1: Skizze

(b)

Grundsätzlich gilt für den Zusammenhang zwischen dem Abstand s zum Mittelpunkt und den Abständen r_1, r_2 zu den beiden Protonen

$$\cos(\alpha) = \frac{s}{r_1} = \frac{s}{r_2} \quad (1.35)$$

$$r_1 = r_2 = r = \sqrt{s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad (1.36)$$

Nach dem Superpositionsprinzip gilt somit an einem beliebigen Punkt mit Abstand s vom Mittelpunkt des Moleküls

$$\vec{E}(s) = \vec{E}_1(s) + \vec{E}_2(s) \quad (1.37)$$

wobei sich hier die Komponenten in Richtung der x-Achse gerade ausgleichen und somit lediglich die y-Komponenten $\vec{E}_y = \vec{E} \cdot \cos(\alpha)$ sich addieren

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(s) &= k \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{s}}{|s|} + k \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{e}{r_2^2} \cdot \frac{\vec{s}}{|s|} \\
 &\stackrel{(1.35)}{=} k \cdot \frac{2e \cdot s}{r^3} \cdot \frac{\vec{s}}{|s|} \\
 &\stackrel{(1.36)}{=} k \cdot \frac{2e \cdot s}{\left(\sqrt{s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^3} \cdot \frac{\vec{s}}{|s|}
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

(c)

Die auf ein α -Teilchen q_α wirkende Kraft ergibt sich aus $\vec{F} = \vec{E} \cdot q$ mit $q_\alpha = +2e$

$$\vec{F}_\alpha(s) \stackrel{(1.38)}{=} k \cdot \frac{4e^2 \cdot s}{\left(\sqrt{s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^3} \cdot \frac{\vec{s}}{|s|} \tag{1.39}$$

(d)

Um das Maximum von (1.39) zu bestimmen, bestimmen wir zunächst die Nullstellen der Ableitung, wobei wir hier vereinfachend nur den Betrag betrachten:

$$\begin{aligned}
 F'_\alpha(s) &= k \cdot 4e^2 \cdot \frac{\left(\sqrt{s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^3 - s \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot 2s}{\left(s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^3} = 0 \\
 &= k \cdot 4e^2 \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{\left(s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^3}}_t \cdot \left(-2s^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Da $\forall s \ t \neq 0$ folgt mit $b = 7,4 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

$$\begin{aligned}
 s_0 &= \frac{b}{2 \cdot \sqrt{2}} \\
 &= 2,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

(e)

Aus (1.39) und (1.41) ergibt sich für die maximal wirkende Kraft

$$\begin{aligned}\vec{F}(s_0) &= k \cdot \frac{4e^2 \cdot \frac{b}{2\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^3} \cdot \frac{\vec{s}}{|s|} \\ &= 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ N}\end{aligned}\tag{1.42}$$

2 Blatt 2

2.1 Aufgabe 4

Gegeben sind uns:

$$\begin{aligned}a &= 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m} \\Q_1 &= +100 \text{ pC} = +100 \cdot 10^{-12} \text{ C} \\Q_2 &= -200 \text{ pC} = -200 \cdot 10^{-12} \text{ C} \\Q_3 &= +300 \text{ pC} = +300 \cdot 10^{-12} \text{ C}\end{aligned}$$

(a)

Aus der Aufgabenstellung kennen wir die Formel:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.1)$$

r_1 und r_3 (Abstand zwischen Q_1 bzw Q_3 und P_1) entsprechen der Kantenlänge a des Quadrats.

$$r_1 = r_3 = a \quad (2.2)$$

Potential der Punktladung Q_1 in Bezug auf P_1

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{4a\pi\epsilon_0} \quad (2.3)$$

Potential der Punktladung Q_3 in Bezug auf P_1

$$\phi_3 = \frac{Q_3}{4a\pi\epsilon_0} \quad (2.4)$$

Durch den Satz des Pythagoras wird r_2 bestimmt (Abstand zwischen Q_2 und P_1)

2 Blatt 2

$$r_2^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow r_2 = \sqrt{2}a \quad (2.5)$$

Potential der Punktladung Q_2 in Bezug auf P_1

$$\phi_2 = \frac{Q_2}{4a\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \quad (2.6)$$

Potential des Ladungssystems im Punkt P_1 (Summe der einzelnen Potentiale)

$$\phi_{P1} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad (2.7)$$

So folgt:

$$\phi_{P1} = 58,0997238 \text{ V} \approx 58,1 \text{ V} \quad (2.8)$$

Abstand der Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 zu Punkt P_2

$$r_1 = r_2 = r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad (2.9)$$

Potential der Punktladung Q_1 in Bezug auf P_2

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{2a\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \quad (2.10)$$

Potential der Punktladung Q_2 in Bezug auf P_2

$$\phi_2 = \frac{Q_2}{2a\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \quad (2.11)$$

Potential der Punktladung Q_3 in Bezug auf P_2

$$\phi_3 = \frac{Q_3}{2a\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \quad (2.12)$$

Potential des Ladungssystems im Punkt P_2 (Summe der einzelnen Potentiale)

$$\phi_{P2} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad (2.13)$$

Es folgt:

$$\phi_{P2} = 63,55158816 \text{ V} \approx 63,6 \text{ V} \quad (2.14)$$

Die Potentialdifferenz der beiden Potentiale beträgt:

$$\phi_{P2} - \phi_{P1} = 5,5 \text{ V} \quad (2.15)$$

(b)

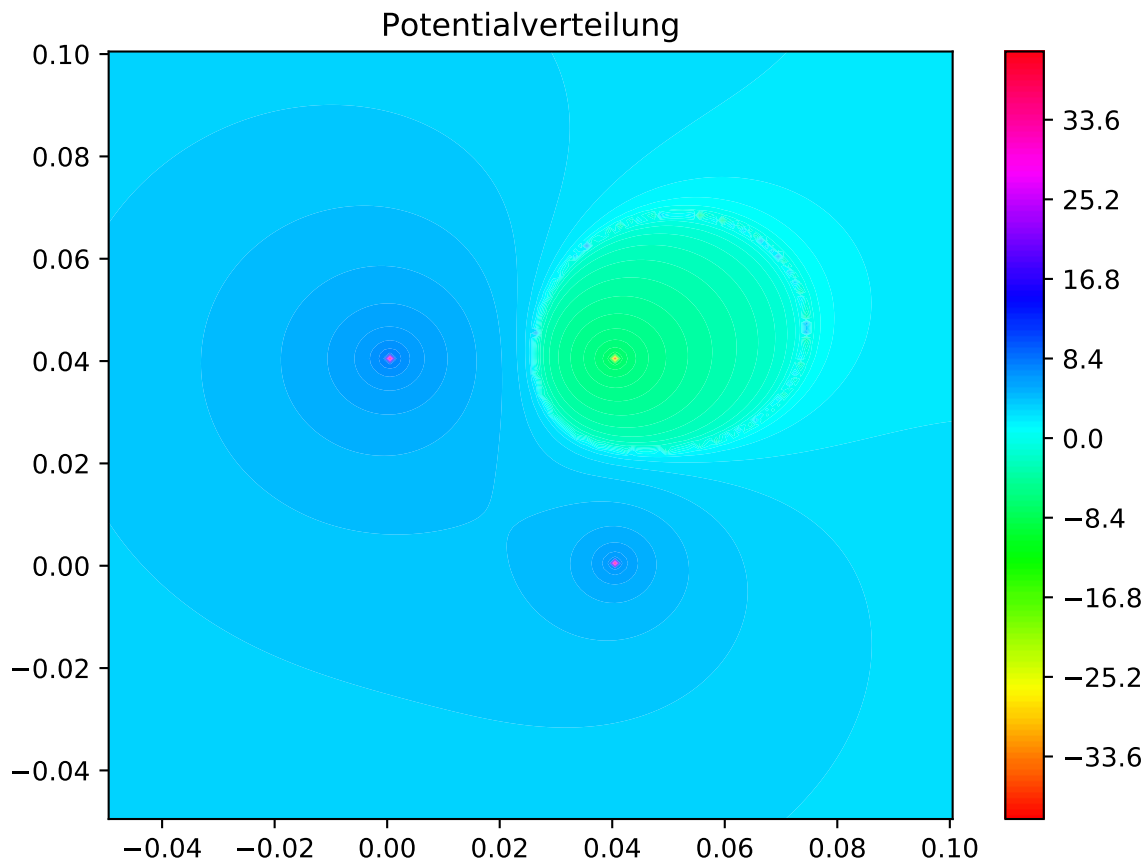


Abbildung 2.1: Potentialverteilung, erstellt mit matplotlib

Die Abbildung enthält durch Ungenauigkeiten in der Gleitkommaarithmetik leider ein wenig Rauschen. Die Werte der X- und Y-Achse sind in Metern angegeben. Die Einheit der Skala ist $\text{sgn}(z) \cdot e^{|z|} \text{ V}$.

Aufgrund der Potentialverteilung kann man erwarten, dass eine Probeladung in der Mitte zwischen den Ladungen Q_2 und Q_3 am stärksten beschleunigt wird.

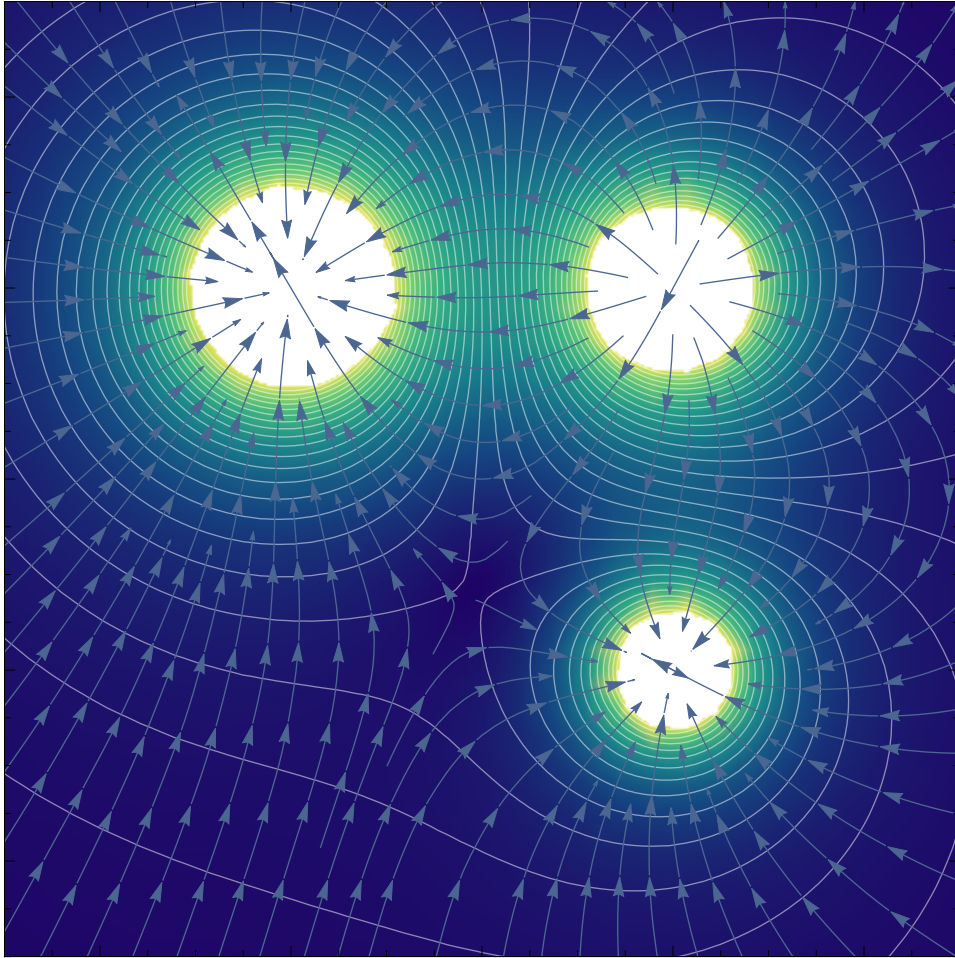


Abbildung 2.2: Alternative Potentialverteilung, erstellt mit Mathematica

Diese Grafik wurde von einem Kommilitonen mit der Hilfe von StackExchange und Mathematica erstellt. Dieser hat uns das Ergebnis freundlicher Weise zur Verfügung gestellt.

2.2 Aufgabe 5

Allgemein gilt für den Zusammenhang von Ladungsdichte ρ_0 und der Gesamtladung Q in einem Volumen V :

$$Q = \int_V \rho(x, y, z) dV \quad (2.16)$$

Die gesuchte Gesamtladung des Würfels mit Kantenlänge a erhalten wir folglich durch folgendes Integral:

2 Blatt 2

$$Q = \rho_0 \cdot \int_0^a \int_0^a \int_0^a (2x^2 + 4yz - 3xz) \, dx \, dy \, dz \quad (2.17)$$

$$= \rho_0 \cdot \int_0^a \int_0^a dy \, dz \left[\frac{2}{3}x^3 + 4xyz - \frac{3}{2}x^2z \right]_0^a \quad (2.18)$$

$$= \rho_0 \cdot \int_0^a \int_0^a \left(\frac{2}{3}a^3 + 4ayz - \frac{3}{2}a^2z \right) dy \, dz \quad (2.19)$$

$$= \rho_0 \cdot \int_0^a dz \left[\frac{2}{3}a^3y + 2ay^2z - \frac{3}{2}a^2yz \right]_0^a \quad (2.20)$$

$$= \rho_0 \cdot \int_0^a \left(\frac{2}{3}a^4 + 2a^3z - \frac{3}{2}a^3z \right) dz \quad (2.21)$$

$$= \rho_0 \cdot \left[\frac{2}{3}a^4z + a^3z^2 - \frac{3}{4}a^3z^2 \right]_0^a \quad (2.22)$$

$$= \rho_0 \cdot \frac{11}{12} \cdot a^5 \quad (2.23)$$

2.3 Aufgabe 6

(a)

Bekannt aus der Vorlesung sind bereits die elektrischen Feldstärken für eine homogen geladene nichtleitende Kugel mit Radius R und Ladungsdichte ρ als

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r^3} \cdot \vec{r}, \quad r \geq R \quad (2.24)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \cdot \vec{r}, \quad r < R \quad (2.25)$$

Wir bestimmen zunächst für $r \geq R$ das Potential:

$$\phi(r) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}' \quad (2.26)$$

$$= \int_r^\infty E \, dr' \quad (2.27)$$

$$\stackrel{(2.24)}{=} \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r'^2} \, dr' \quad (2.28)$$

$$= \left[-\frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r'} \right]_r^\infty \quad (2.29)$$

$$\stackrel{\phi(\infty)=0}{=} \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r} \quad (2.30)$$

2 Blatt 2

Anschließend bestimmen wir für $r < R$ das Potential $\phi(r)$ über die Potentialdifferenz $\phi(r) - \phi(R)$:

$$\phi(r) - \phi(R) \stackrel{(2.25)}{=} \int_r^R \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \cdot r' dr' \quad (2.31)$$

$$\phi(r) = \left[\frac{\rho}{6 \varepsilon_0} \cdot r'^2 \right]_r^R + \phi(R) \quad (2.32)$$

$$\stackrel{(2.26)}{=} \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} R^2 - \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} R^2 \quad (2.33)$$

$$= \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} (3R^2 - r^2) \quad (2.34)$$

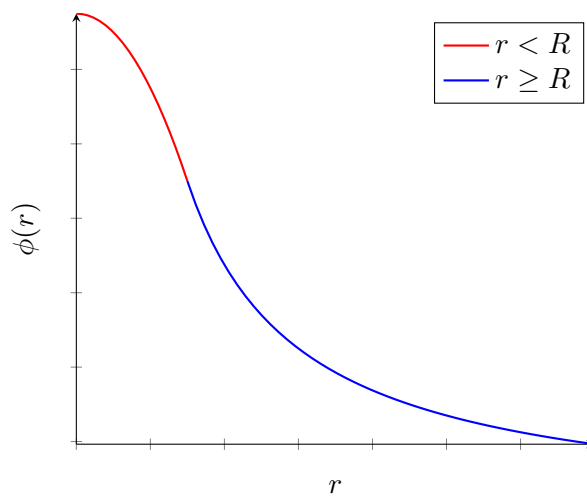


Abbildung 2.3: Skizze

(b)

Wir kennen aus der Vorlesung den Satz für die Änderung der Energie als folgenden:

$$dW = - \int_{\infty}^R E(r) \cdot q dr \quad (2.35)$$

Dafür benutzen wir nun die Formel für die elektrische Feldstärke (2.24), wobei wir nur den Betrag betrachten. Da wir es hier mit einem dreidimensionalen Körper zu tun haben, können wir die Probeladung q mit dem Zusammenhang für die Volumenladungsdichte umschreiben. Da wir über den Radius r in der (2.35) integrieren, haben wir kein konstantes Volumen, sodass folgt:

$$q = dV \cdot \rho \quad (2.36)$$

2 Blatt 2

Setzen wir diese nun die Ergebnisse aus (2.24) und (2.36) in (2.35) ein, so erhalten wir folgenden Term:

$$dW = - \int_{\infty}^R \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{R^3 \cdot \rho}{r^2} \cdot \rho \cdot dV \, dr \quad (2.37)$$

$$= - \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho^2 \cdot R^3 \cdot dV \cdot \int_{\infty}^R \frac{1}{r^2} \, dr \quad (2.38)$$

$$= - \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho^2 \cdot R^3 \cdot dV \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho^2 \cdot R^2 \cdot dV \quad (2.40)$$

Da wir nun die Gesamtenergie erhalten möchten, müssen wir nochmal über den Term (2.40) integrieren, wobei wir die dV mit $R^2 \cdot \sin(\theta) \, dR \, d\theta \, d\sigma$ ersetzen. Für die Rechnung ergibt sich dann:

$$W = \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R R^4 \cdot \sin(\theta) \, dR \, d\sigma \, d\theta \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho^2 \cdot 4\pi \int_0^R R^4 \, dR \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \rho^2 \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{5} R^5 \quad (2.43)$$

Das Endergebnis könnte man noch anders umschreiben, wir belassen es aber dabei.

2.4 Aufgabe 7

Folgende Werte sind uns gegeben:

$$p = 3,4 \cdot 10^{-30} \, \text{As m}$$

$$a = 1 \, \text{nm} = 10^{-9} \, \text{m}$$

Allgemein ist das elektrische Potential im SI-System wie in (2.44) definiert. Da unser HCl-Teilchen ja in z-Richtung liegt, können wir diese zu Gleichung (2.45) umformulieren.

2 Blatt 2

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(p_z \cdot z)}{r^3} \quad (2.45)$$

Für das elektrische Feld gilt allgemein folgender Zusammenhang:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\text{grad } \varphi \quad (2.46)$$

Für den dreidimensionalen Raum im kartesischen Koordinatensystem gilt außerdem:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.47)$$

Für die X-Richtung:

$$-\frac{z}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} = 3 \cdot \frac{z}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (2.48)$$

$$= 3 \cdot \frac{z}{r^4} \frac{x}{r} \quad (2.49)$$

$$= 3 \cdot \frac{xz}{r^5} \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5} \quad (2.51)$$

Für die Y-Richtung können wir aus (2.48) folgern:

$$-\frac{z}{r^3} \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{r^5} \quad (2.52)$$

Für die Z-Richtung können wir mittels (2.48) folgern :

$$-\frac{z}{r^3} \frac{\partial}{\partial z} = 3 \cdot \frac{z}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{1}{r^3} \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \quad (2.54)$$

So bekommt man für des elektrische Feld $\vec{E}$

2 Blatt 2

$$\vec{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{3xz}{r^5} \\ \frac{3yz}{r^5} \\ \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

(a)

Für den Aufgabenteil (a) bekommen wir folgenden Vektor für r :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^{-9} \text{ m} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Setzt man nun den Vektor (2.56) in die Gleichung (2.55) ein, so folgt:

$$\vec{E} = \frac{3,4 \cdot 10^{-30} \text{ A s m}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3a^2}{a^5} - \frac{1}{a^3} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$= \frac{3,4 \cdot 10^{-30} \text{ A s m}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{a^3} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,11 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

(b)

Für den Aufgabenteil (b) haben wir folgenden Vektor r :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-9} \text{ m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Es folgt:

2 Blatt 2

$$\vec{E} = \frac{3,4 \cdot 10^{-30} \text{ A s m}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{a^3} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,06 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

3 Blatt 3

3.1 Aufgabe 8

(a)

- Die potentielle Energie ist gegeben durch $E_{pot} = mgh$ wobei $h(x, y)$ der Höhe des Hanges an der jeweiligen Stelle entspricht. (Unter der Annahme, dass dessen Massenschwerpunkt genau im Zentrum liegt.)
- Der Gradient der Energie entspricht der Kraft auf den kugelförmigen Stein.
- Die Kraft resultiert nach dem Superpositionsprinzip aus der Gewichtskraft $\vec{F}_g = -mg$ und der Normalkraft, die stets senkrecht zum Hang steht.
- Der Gradient zeigt stets parallel zur Hangsteigung und gibt dabei die Richtung der Kraft und damit auch die der Beschleunigung an.
- Die Beschleunigung folgt mit $\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{F}}{m}$

(b)

Gegeben:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{3 + r^2} \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Gesucht ist der Gradient:

$$\vec{\nabla} f \tag{3.1}$$

Rechnung:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \tag{3.2}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3 + (x^2 + y^2 + z^2)} \tag{3.3}$$

$$\vec{\nabla} f = -\frac{2x}{(r^2 + 3)^2} \cdot \vec{e}_x - \frac{2y}{(r^2 + 3)^2} \cdot \vec{e}_y - \frac{2z}{(r^2 + 3)^2} \cdot \vec{e}_z \tag{3.4}$$

3 Blatt 3

$$= -\frac{2}{(r^2 + 3)^2} \cdot \vec{r} \quad (3.5)$$

(c)

Zu Zeigen: Das Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Flüssigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ist quellenfrei (Divergenz: $\text{div } \vec{v} = 0$).

Gegeben:

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega); \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

Rechnung:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\vec{\nabla} v = -\frac{\partial \omega y}{\partial x} + \frac{\partial \omega x}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

(d)

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \omega x}{\partial z} \\ -\frac{\partial \omega y}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega x}{\partial x} + \frac{\partial \omega y}{\partial y} \end{pmatrix} = 2\omega \vec{e}_z \quad (3.8)$$

(e)

- (a) Quellenfrei ($\text{div } \vec{F} = 0$), die stärkere Strömung zur Mitte hin resultiert allerdings in Rotation eines mitbewegten Körpers ($\text{rot } \vec{F} \neq 0$).

Offizielle Antwort: Bewegt man sich mit in der Richtung des elektrischen Feldes, so bleibt der Vektor konstant bzw. verändert sich nicht. So gilt $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, wodurch $\text{div } F = 0$ ist. Betrachtet man nun den Weg auf Rand eines Rechtecks in diesem Feld, so merkt man, dass dessen Linienintegral nicht 0 ist, wodurch $\text{rot } \vec{F} \neq 0$ sein muss.

- (b) Quelle erkennbar ($\text{div } \vec{F} \neq 0$), aber keine Rotation ($\text{rot } \vec{F} = 0$)

Offizielle Antwort: Es ist erkennbar, dass es sich bei diesem Feld um eine Zentralkraft handelt. Daher wirkt die Kraft $\vec{F}$ radial. Der Betrag von F ist auch nur vom Radius r abhängig. Da jede Zentralkraft keinerlei Rotation besitzt, ist $\text{rot } \vec{F} = 0$. Betrachtet man

nun einen Weg in der des Umfangs eines Teils eines Donuts, so stellt man fest, dass $\text{div } \vec{F} \neq 0$ ist.

- (c) Quellenfrei ($\text{div } \vec{F} = 0$), ($\text{rot } \vec{F} = 0$)

Offizielle Antwort: Die Zirkulation entlang der Kante eines Quadrates könnte offensichtlich Null ($\text{rot } \vec{F} = 0$) sein. Es ist möglich, dass es sich hierbei um ein elektrostatisches Feld handelt. Es ist von der Zeichnung nicht direkt ersichtlich, dass ($\text{div } \vec{F} = 0$) gilt, aber man relativ gut sehen, dass es Null sein könnte.

- (d) Quellenfrei ($\text{div } \vec{F} = 0$), zyklische Strömung erkennbar, aber potentiell durch zunehmenden Betrag hin zum Zentrum kompensiert? ($\text{rot } \vec{F} = 0$) *Offizielle Antwort:* Der Betrag der Kraft $\vec{F}$ ändert sich nicht, wenn man sich in Richtung der Kraft $\vec{F}$ bewegt. Diese Feststellung ist hinreichend für eine fehlende Divergenz ($\text{div } \vec{F} = 0$). Es scheint, dass die Zirkulation um den Umfang eines Ausschnitts einer zweidimensionalen Projektion eines Torus Null ($\text{rot } \vec{F} = 0$) sein kann, wenn die Kraft $\vec{F}$ auf der Außenseite schwächer als auf der Innenseite ist. Dies ist möglicherweise ein elektrostatisches Feld mit einer zu $\frac{1}{r}$ -proportionalen Kraft $\vec{F}$, wo r der Abstand von einem Punkt zum Ursprung ist.

- (e) Quellenfrei ($\text{div } \vec{F} = 0$), zyklische Strömungen erkennbar ($\text{rot } \vec{F} \neq 0$)

Offizielle Antwort: Genauso wie in (d) kann man herleiten, dass ($\text{div } \vec{F} = 0$) gilt. Hier kann man jedoch erkennen, anders als in (d), dass das Linienintegral über die Außenseite nicht vom Linienintegral der Innenseite kompensiert wird, wodurch ($\text{rot } \vec{F} \neq 0$) gelten muss.

- (f) Senke erkennbar ($\text{div } \vec{F} \neq 0$) sowie zyklische Strömung erkennbar ($\text{rot } \vec{F} \neq 0$)

Offizielle Antwort: Die Zirkulation um den Umfang eines Quadrates ist nicht Null, sodass ($\text{rot } \vec{F} \neq 0$) gilt. Es scheint außerdem, dass die Divergenz nicht Null ($\text{div } \vec{F} \neq 0$) ist, da Vektoren von allen Richtungen zum Mittelpunkt konvergieren.

3.2 Aufgabe 9

Berechnung der radialen Abhängigkeit des elektrischen Feldes $\vec{E}(r)$ und des Potentials $\phi(r)$ (für $0 < r < \infty$)

(a)

Ein homogener, geladener, unendlich langer Stab

Gegeben: Radius R , Ladung pro Länge $\lambda = \frac{Q}{L} = \pi R^2 \rho$

Als Ansatz dient das Gauß-Theorem:

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (3.9)$$

wobei aufgrund der näherungsweise unendlichen Länge und somit bestehenden Symmetrie immer $\vec{E} \parallel \vec{S} \parallel \vec{r}$ und somit auch $\vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S$ gilt.

3 Blatt 3

Wir gehen im Folgenden immer von einem die Ladung umschließenden Zylinder der Höhe L aus, sodass sich als umschließende Fläche immer der Mantel des Zylinders mit Radius r ergibt und für den Fluss Φ somit gilt

$$\Phi(r) = \int \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 2\pi r L \quad (3.10)$$

Wir setzen hier zudem als Referenzpunkt $\phi(R) = 0$, um die Formel des Potentials zu vereinfachen. Fallunterscheidung zwischen innerhalb und außerhalb des Stabes:

- Innerhalb ($r < R$):

$$\int \vec{E}_i(r) d\vec{S} \stackrel{(3.10)}{=} E_i 2\pi r L \stackrel{(3.9)}{=} \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0} \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow E_i = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r \quad (3.12)$$

$$\phi_i = - \int_R^r E_i dr = - \int_R^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r dr = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} (R^2 - r^2) \quad (3.13)$$

- Außerhalb ($r \geq R$):

$$E_a \cdot 2\pi r L = \frac{\rho \pi R^2 L}{\epsilon_0} \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow E_a = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (3.15)$$

$$\phi_a = - \int_R^r E_a dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (3.16)$$

Die Skizzen sind mit denen aus Teil (b) zusammengefasst.

(b)

Den Fall eines unendlich langen Stabes, bei dem die Ladung nur auf der Oberfläche sitzt, können wir direkt aus den oberen Rechnungen folgern:

$$Q_i = 0 \Rightarrow E_i = 0; \quad \phi_i = const = 0 \quad (3.17)$$

Da nach außen die Ladungsverteilung irrelevant ist, gilt

$$E_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad \phi_a = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (3.18)$$

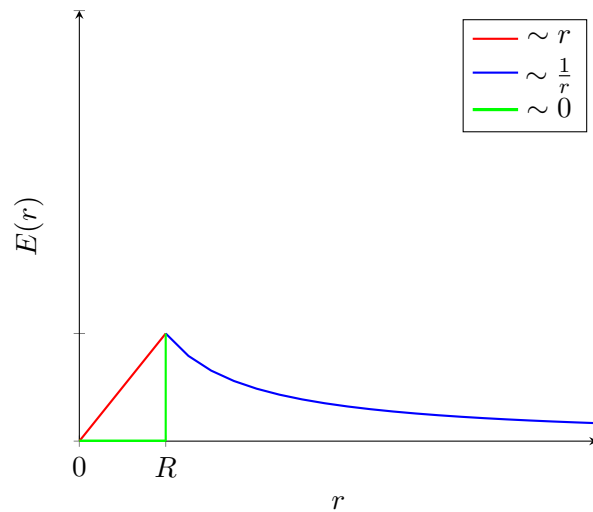


Abbildung 3.1: Elektrisches Feld aus dem Teil (a) ist rot und blau und aus dem Teil (b) grün und blau.

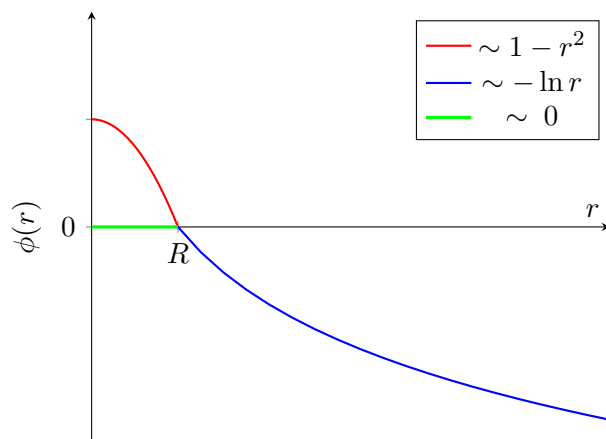


Abbildung 3.2: Potential aus dem Teil (a) ist rot und blau und aus dem Teil (b) grün und blau.

3.3 Aufgabe 10

Gegeben: Elektrische Feldstärke $E = 120 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

(a)

Gesucht: Kapazität der Erde, wenn sie als leitende Kugel betrachtet wird. Als Ansatz gehen wir von der Erde als Kondensator gegen Unendlich aus, wobei $\phi(r) = 0$ als Referenzpunkt des Potentials dient.

3 Blatt 3

$$U = \Delta\phi = \phi(r_E) \quad (3.19)$$

$$\Rightarrow C_E = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\phi(r_E)} \quad (3.20)$$

Zur Bestimmung des Potentials greifen wir für $\vec{E}$ zunächst auf das Gauß-Theorem zurück:

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.21)$$

Mit der geschlossenen Fläche $A = 4\pi r^2$ ergibt sich

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\phi(r_E)} = 4\pi \epsilon_0 r_E = 4\pi 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 6371 \text{ km} = 709 \mu\text{F} \quad (3.24)$$

(b)

Gesucht: Gesamtladung und Spannung

$$Q \underset{(3.22)}{=} 4\pi \epsilon_0 E(r) r_e^2 = 5,42 \cdot 10^5 \text{ C} \quad (3.25)$$

Mit Q und C findet sich über $C = \frac{Q}{U}$ somit

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{4\pi \epsilon_0 E(r) r_E^2}{4\pi \epsilon_0 r_E} = E(r) \cdot r_E = 764,52 \text{ MV} \quad (3.26)$$

(c)

Gesucht: Kapazität und Spannung im Falle einer Gegenladung auf einer Kugelschale im Abstand $r_a = r_E + h$ ($h = 20\text{km}$).

In diesem Fall betrachten wir einen Kugelkondensator mit Spannung

3 Blatt 3

$$U_g = \Delta\phi = \phi(r_E) - \phi(r_a) \quad (3.27)$$

$$\phi(r_E) - \phi(r_a) \stackrel{(3.22)}{=} \int_{r_E}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} dr \quad (3.28)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (3.29)$$

Sodass sich für die neue Kapazität C_g ergibt

$$C_g = \frac{Q}{U_g} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_a} \right)^{-1} = 226,52 \text{ nF} \quad (3.30)$$

4 Blatt 4

4.1 Aufgabe 11

Gegeben: Der Abstand der Platten eines Plattenkondensators soll von d_1 auf d_2 vergrößert werden.

(a)

Betrachtung des Kondensators mit angeschlossener Spannungsquelle $\Rightarrow U = \text{const}$

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} U^2 \quad \Rightarrow W \propto \frac{1}{d} \quad (4.1)$$

Durch den vergrößerten Abstand nimmt die Energie ab.

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{d_1}{d_2} \quad (4.2)$$

(b)

Betrachtung bei abgeklemmter Spannungsquelle $\Rightarrow Q = \text{const}$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} U^2 \quad (4.3)$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A} \quad (4.4)$$

$$U = E \cdot d \quad (4.5)$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 A E^2 d \quad \Rightarrow W \propto d \quad (4.6)$$

4 Blatt 4

Durch den vergrößerten Abstand nimmt die Energie hier also zu.

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad (4.7)$$

4.2 Aufgabe 12

Berechnung des elektrischen Feldes durch den Gaußschen Satz

$$\oint_{\text{Zylinder}} \vec{E} \, d\vec{A} \quad (4.8)$$

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} \quad (4.9)$$

Spannung zwischen den Leitern, welche der Potentialdifferenz entspricht

$$\Delta\varphi = \int_{r_1}^{r_2} E \, dr \quad (4.10)$$

$$= \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \, dr \quad (4.11)$$

$$= \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (4.12)$$

$$= U \quad (4.13)$$

Berechnung der Kapazität pro Längeneinheit

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{Q}{UL} \quad (4.14)$$

$$= \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) L} \quad (4.15)$$

$$= \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (4.16)$$

4.3 Aufgabe 13

(a)

Wir gehen vom Gauß-Theorem aus und betrachten eine von einem Quader eingeschlossene Probenfläche A .

4 Blatt 4

$$\Phi = A \cdot E_O = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (4.17)$$

$$= \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon_0} \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \cdot E_O \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow \sigma \approx 8,85 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (4.20)$$

Hinweis: Damit wir diese Gleichung aufstellen können, nähern wir das Gummiband als einen Zylinder. Dessen Mantelfläche entspricht dann der Fläche A . Falsch ist es die Fläche, die sich aufwärts bewegt, separat von der abwärts bewegenden Fläche zu betrachten. Dies führt für zu, dass man einen Vorfaktor von 2 dazu bekommt.

(b)

Da wir eine konstante Geschwindigkeit betrachten, können wir einen Zeitraum Δt und die darin übertragene Ladung ΔQ betrachten.

Auf die Fläche ΔA übertragene Ladung ΔQ :

$$\Delta Q = \sigma \cdot \Delta A \quad (4.21)$$

$$= \sigma \cdot b \cdot v_{trans} \cdot \Delta t \quad (4.22)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot E_O \cdot b \cdot v_{trans} \cdot \Delta t \quad (4.23)$$

Somit ergibt sich als Stromstärke

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (4.24)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot E_O \cdot b \cdot v_{trans} \quad (4.25)$$

$$= \sigma \cdot b \cdot v_{trans} \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow 3,984 \cdot 10^{-6} \text{ A} \quad (4.27)$$

(c)

Wir betrachten die Kugel als näherungsweise vollständig kugelförmig (ohne Öffnung) und ihre Spannung U als Spannung gegen unendlich, d.h. $U = \phi$ mit Referenzpunkt $\phi_\infty = 0$.

Da für eine Kugel mit Radius R außerhalb gilt $\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ folgt

4 Blatt 4

$$C = \frac{Q}{\phi} = 4\pi\epsilon_0 \cdot R \quad (4.28)$$

Über $C = \frac{Q}{U}$ folgt somit für die benötigte Ladungsmenge

$$Q = C \cdot U \quad (4.29)$$

$$= 4\pi\epsilon_0 \cdot R \cdot U \quad (4.30)$$

Diese wird bei der oben bestimmten Stromstärke nach t_U erreicht:

$$t_U = \frac{Q}{I} \quad (4.31)$$

$$= \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot R \cdot U}{\epsilon_0 E_O \cdot b \cdot v_{trans}} \quad (4.32)$$

$$= \frac{4\pi \cdot R \cdot U}{E_O \cdot b \cdot v_{trans}} = \frac{4\pi \cdot R \cdot U}{E_O \cdot b \cdot v_{trans}} \quad (4.33)$$

$$\Rightarrow t_U = 4\pi \text{ s} \approx 12,566 \text{ s} \quad (4.34)$$

(d)

Über das Gauß-Theorem ergibt sich die Feldstärke $\vec{E}$ außerhalb der Kugel leicht zu

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{r} \quad (4.35)$$

Für die maximale Ladungsmenge $Q_{\max}$ an der Oberfläche mit $r = R$ ergibt sich somit

$$Q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 \cdot E_{\max} \cdot R^2 \quad (4.36)$$

Für $E_{\max} = 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ folgt:

$$Q_{\max} \approx 2,50 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad (4.37)$$

4.4 Aufgabe 14

(a)

Es gilt allgemein

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \quad (4.38)$$

wobei bei Plattenkondensatoren folgender Zusammenhang existiert

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \quad (4.39)$$

Somit gilt hier

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \cdot U^2 \quad (4.40)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b \cdot h}{d} \cdot U^2 \quad (4.41)$$

(b)

Grundsätzlich betrachten wir vereinfachend den Kondensator als Summe der beiden Teilkondensatoren mit $\varepsilon_r = 1$ bzw. $\varepsilon_r = 7$. Dafür bestimmen wir

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{b}{d} \cdot (h - H_1) \quad (4.42)$$

$$C_7 = 7\varepsilon_0 \frac{b}{d} \cdot H_1 \quad (4.43)$$

$$C_{ges} = C_1 + C_7 = \varepsilon_0 \frac{b}{d} \cdot (h + 6H_1) \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot C_{ges} \cdot U^2 \quad (4.45)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{b}{d} \cdot (h + 6H_1) \cdot U^2 \quad (4.46)$$

(c)

Grundsätzlich kann bei angelegter Spannung die Flüssigkeit im Kondensator weiter nach oben gezogen werden, sodass H_1 steigt und damit wegen $\varepsilon_r > 1$ die Kapazität und folglich wegen $U = \text{const.}$ auch die Feldenergie steigt.

Neben dieser energetischen Änderung wird die Flüssigkeit dadurch aber auch im Gravitationsfeld angehoben und gewinnt an potentieller Energie. Dieser Prozess läuft so lange ab, bis sich die Änderung der potentiellen Energie δW_{pot} und die der Feldenergie δW_{el} gerade ausgleichen.

(d)

Berechnung des Füllstandes im Kondensator:

Zuerst Herleitung der potentiellen Energie

$$dW_{\text{pot}}(\Delta H) = mg \, dH \quad (4.47)$$

$$= \rho V g \, dH \quad (4.48)$$

$$= \rho b d \Delta H \, g \, dH \quad (4.49)$$

Folgende Nebenrechnungen wurden dafür verwendet

$$m = \rho V \quad (4.50)$$

$$V = \Delta H \, b d \quad (4.51)$$

Nun Herleitung der elektrischen Energie

$$dW_{\text{el}}(\Delta H) = \frac{1}{2} C U^2 \quad (4.52)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{b \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) d H}{d} U^2 \quad (4.53)$$

Folgende Nebenrechnungen wurden dafür verwendet

$$C^1 = \frac{t}{h} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{h b}{d} + \left(1 - \frac{t}{h}\right) \varepsilon_0 \frac{h b}{d} \quad (4.54)$$

$$C^2 = \frac{dH + t}{h} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{h b}{d} + \left(1 - \frac{dH + t}{h}\right) \varepsilon_0 \frac{h b}{d} \quad (4.55)$$

$$C^2 - C^1 = C = (dH + t) \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b}{d} + \varepsilon_0 \frac{h b}{d} - (dH + t) \varepsilon_0 \frac{b}{d} - t \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b}{d} - \varepsilon_0 \frac{h b}{d} + t \varepsilon_0 \frac{b}{d} \quad (4.56)$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b}{d} dH - \varepsilon_0 \frac{b}{d} dH \quad (4.57)$$

$$= \varepsilon_0 \frac{b}{d} (\varepsilon_r - 1) dH \quad (4.58)$$

4 Blatt 4

Gleichsetzung der potentiellen und elektrischen Energie

$$dW_{pot}(\Delta H) = dW_{el}(\Delta H) \quad (4.59)$$

$$\rho b d \Delta H g dH = \frac{1}{2} \frac{b \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) dH}{d} U^2 \quad (4.60)$$

$$\Delta H = \frac{\varepsilon_0 U^2 (\varepsilon_r - 1)}{2 d^2 \rho g} \quad (4.61)$$

$$H_N = t + \Delta H \quad (4.62)$$

$$= t + \frac{\varepsilon_0 U^2 (\varepsilon_r - 1)}{2 d^2 \rho g} \quad (4.63)$$

Beispielrechnung:

Gegeben:

$$U = 10 \text{ kV} = 10.000 \text{ V}$$

$$\varepsilon_r = 36$$

$$t = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$$

$$\rho = 1,20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$d = 0,5 \text{ cm} = 0,005 \text{ m}$$

Einsetzen in:

$$H_N = t + \frac{\varepsilon_0 U^2 (\varepsilon_r - 1)}{2 d^2 \rho g} \quad (4.64)$$

$$\approx 0,0726 \text{ m} \quad (4.65)$$

$$\approx 7,26 \text{ cm} \quad (4.66)$$

(e)

Nachdem das Gleichgewicht erreicht ist, der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt wird aber noch ein Kabel die beiden Kondensatorplatten verbindet, sinkt das Nitrobenzol wieder auf seine ursprüngliche Füllhöhe von $t = 2 \text{ cm}$. In diesem Fall können sich die Ladungen wieder ausgleichen.

Besteht jedoch keine Verbindung zwischen den Kondensatorplatten, dann kann es zu keinem Ladungsausgleich kommen und die Füllhöhe, die nach dem Gleichgewicht eingetreten ist, bleibt erhalten.

4.5 Aufgabe 15 (freiwillig)

Allgemein gelten hier die Gesetze für die Reihen- und Parallelschaltung von Kondensatoren. Außerdem kennen wir:

$$U = \frac{Q}{C} \quad (4.67)$$

Durch die Betrachtung der Schaltung können wir für die Kondensatoren folgern:

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_g} + \frac{1}{C} \quad (4.68)$$

$$C_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_g} + \frac{1}{C}\right)} \quad (4.69)$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{(C_g + C_3)} \quad (4.70)$$

$$C_2 = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{(C_g + C_3)}} \quad (4.71)$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{(C_g + C_2)} \quad (4.72)$$

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{(C_g + C_2)}} \quad (4.73)$$

Nun können wir für U_e folgern:

$$U_e = \frac{Q}{C_1} \quad (4.74)$$

Für die Feststellung von U_a können wir folgendes aufstellen:

$$\frac{Q_2}{C_2} = \frac{U_2}{\text{Parallel}} = \frac{Q}{C_g + C_2} \quad (4.75)$$

$$\Rightarrow Q_2 = Q \left(\frac{C_2}{C_g + C_2} \right) \quad (4.76)$$

4 Blatt 4

$$\frac{Q_3}{C_3} = \underset{Parallel}{U_3} = \frac{Q_2}{C_g + C_3} \quad (4.77)$$

$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \left(\frac{C_3}{C_g + C_3} \right) \quad (4.78)$$

$$U_a = \underset{Reihe}{U_3} = \frac{Q_3}{C_g} \quad (4.79)$$

Mit dem einsetzen der gegebenen Werte erhalten wir folgende Spannungen:

$$U_e = \frac{1651}{3410} \text{ V} \approx 0,48 \text{ V} \quad (4.80)$$

$$U_a = \frac{100}{341} \text{ V} \approx 0,29 \text{ V} \quad (4.81)$$

Für den Fall, dass $C_g = 10 \text{ F}$ ist, gilt:

$$U_e = \frac{13}{80} \text{ V} = 0,1625 \text{ V} \quad (4.82)$$

$$U_a = \frac{1}{80} \text{ V} = 0,0125 \text{ V} \quad (4.83)$$

5 Blatt 5

5.1 Aufgabe 16

(a)

Beim Durchlaufen der Beschleunigungsspannung erhält das Elektron insgesamt die Energie $E_U = e \cdot U$, weshalb durch die Energieerhaltung gilt

$$E_{kin} = E_U \quad (5.1)$$

$$U = \frac{E_{kin}}{e} \quad (5.2)$$

$$= 1,87 \text{ kV} \quad (5.3)$$

(b)

Sobald das Elektron in den Bereich des Kondensators eintritt ($t = 0$), wirkt in y-Richtung die Kraft $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$, wobei insbesondere $\vec{E} = -E_y \vec{e}_y$ (Siehe Polung in der Skizze), zudem zunächst $v_y(0) = 0, y(0) = 0$, sodass gilt

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv_y}{dt} = e \cdot E_y \quad (5.4)$$

$$v_y(t) = \int_0^t \frac{e}{m} \cdot E_y dt' \quad (5.5)$$

$$= \frac{e}{m} \cdot E_y \cdot t \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t \frac{e}{m} \cdot E_y \cdot t' dt' \quad (5.7)$$

$$= \frac{e}{2m} \cdot E_y \cdot t^2 \quad (5.8)$$

In x-Richtung wirkt keine Kraft, d.h. bei Vernachlässigung der Reibungskraft bleibt die durch die Beschleunigungsspannung erhaltene Geschwindigkeit $v_x = \text{const}$ erhalten.

5 Blatt 5

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_x^2 \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} \cdot t \quad (5.11)$$

Folglich ergibt sich für die Bahnkurve $y(x)$:

$$y(x) = \frac{e}{2m} \cdot E_y \cdot \left(x \cdot \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}} \right)^2 \quad (5.12)$$

$$= \frac{e}{4} \cdot \frac{E_y}{E_{kin}} \cdot x^2 \quad (5.13)$$

Die Gleichung (5.13) stellt eine Parabelbahn da.

(c)

Das Elektron verlässt den Kondensator zum Zeitpunkt t_e mit $x(t_e) = L$

$$y(L) = \frac{e}{4} \cdot \frac{E_y}{E_{kin}} \cdot L^2 \quad (5.14)$$

$$= 0,43 \text{ cm} \quad (5.15)$$

Der gesuchte Winkel entspricht dem Winkel zwischen $v_y(t_e)$ und v_x :

$$t_e = L \cdot \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}} \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow v_y(t_e) = \frac{e}{m} \cdot E_y \cdot L \cdot \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}} \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{v_y(t_e)}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{e}{m} \cdot E_y \cdot L \cdot \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}}}{\sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}}\right) \quad (5.18)$$

$$= \arctan\left(\frac{e \cdot E_y \cdot L}{2E_{kin}}\right) \quad (5.19)$$

$$= 12^\circ \quad (5.20)$$

(d)

Für $t < t_e$ bewegt sich das Elektron unbeschleunigt weiter, d.h. mit $t_e \equiv t' = 0$ erreicht das Elektron den Schirm bei t'_s mit

$$x'(t') = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} \cdot t' \quad (5.21)$$

$$x'(t'_s) = b \quad (5.22)$$

$$\Rightarrow t'_s = b \cdot \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}} \quad (5.23)$$

$$y'(t') = v_y(t_e) \cdot t' = \frac{e}{m} \cdot E_y \cdot L \cdot \sqrt{\frac{m}{2E_{kin}}} \cdot t' \quad (5.24)$$

$$\Rightarrow y'(t'_s) = \frac{e}{2} \cdot \frac{E_y}{E_{kin}} \cdot L \cdot b \quad (5.25)$$

Für den Abstand y_s auf dem Leuchtschirm gilt somit

$$y_s = y(t_e) + y'(t'_s) \quad (5.26)$$

$$= \frac{e}{4} \cdot \frac{E_y}{E_{kin}} \cdot L^2 + \frac{e}{2} \cdot \frac{E_y}{E_{kin}} \cdot L \cdot b \quad (5.27)$$

$$= \frac{e}{2} \cdot \frac{E_y}{E_{kin}} \cdot L \left(\frac{L}{2} + b \right) \quad (5.28)$$

$$= 2,99 \text{ cm} \quad (5.29)$$

5.2 Aufgabe 17

(a)

Wir nutzen zunächst zur Bestimmung des elektrischen Feldes E die Definitionen der Stromdichte j (mit $A = 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$)

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{I}{A} \quad (5.30)$$

$$\Rightarrow E = \rho \cdot \frac{I}{A} \quad (5.31)$$

$$= 3,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 3,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad (5.32)$$

Von E können wir nun auf U schließen

$$U = l \cdot E \quad (5.33)$$

$$= l \cdot \rho \cdot \frac{I}{A} \quad (5.34)$$

$$= 8,5 \cdot 10^{-2} \text{ V} \quad (5.35)$$

(b)

Wenn jedes Kupferatom gerade ein Leitungselektron beisteuert, können wir schließen

$$N_{Cu} = N_e \quad (5.36)$$

Die Teilchendichte der Kupferatome $n_{Cu} = \frac{N_{Cu}}{V}$ ergibt sich über die Materialdichte und die molare Masse von Kupfer (Avogadrokonstante N_A , um von Stoffmenge auf gesuchte Teilchenanzahl zu schließen)

$$M_{Cu} = \frac{m \cdot N_A}{N_{Cu}} \quad (5.37)$$

$$\rho_{Cu} = \frac{m}{V} \quad (5.38)$$

$$\Rightarrow N_{Cu} = \frac{m \cdot N_A}{M_{Cu}} \quad (5.39)$$

$$= \frac{\rho_{Cu} \cdot V \cdot N_A}{M_{Cu}} \quad (5.40)$$

$$\Rightarrow n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{N_{Cu}}{V} = \frac{\rho_{Cu} \cdot N_A}{M_{Cu}} \quad (5.41)$$

$$= 8,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \quad (5.42)$$

Da die Dichte ρ_{Cu} für ein Volumen in cm^3 angegeben ist, gilt dies auch für das bereits berechnete n_e . Für alle folgenden Aufgabenteile wollen wir allerdings im SI-System bleiben

$$n_e^{(SI)} \equiv |n_e|^{(cgs)} \cdot 10^6 \text{ m}^{-3} \quad (5.43)$$

Für die Driftgeschwindigkeit v_D folgt erneut über die Stromdichte j

5 Blatt 5

$$j = \frac{I}{A} = n_e \cdot e \cdot v_D \quad (5.44)$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{I}{A \cdot e \cdot n_e} \quad (5.45)$$

$$= \frac{I}{A \cdot e \cdot \frac{\rho_{Cu} \cdot \text{cm}^3 \cdot N_A}{M_{Cu} \cdot \text{m}^3}} \cdot 10^{-6} \quad (5.46)$$

$$= 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \quad (5.47)$$

(c)

Wir betrachten zunächst exemplarisch einen einzelnen Stoßprozess: Das Elektron wird von $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ nach dem letzten Stoß durch E für eine Zeit t beschleunigt, bis es erneut zum Stoß kommt.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = -e \cdot \vec{E} \quad (5.48)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_0^t \frac{-e}{m} \cdot \vec{E} dt' \quad (5.49)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{-e}{m} \cdot \vec{E} \cdot t + \vec{v}_0 \quad (5.50)$$

Nun wollen wir diese Größen über sehr viele Stoßprozesse gemittelt betrachten. Nun können wir das Problem vereinfacht 1-dimensional in Richtung von $\vec{E}$ betrachten, da gemittelt $\vec{v}_0 = \vec{0}$ und somit nur Bewegung in Richtung von $\vec{E}$ stattfindet (gemittelt - real wird natürlich ungerichtet gestreut).

$$\langle v \rangle = v_D \quad (5.51)$$

$$\langle t \rangle = \tau \quad (5.52)$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{-e}{m} \cdot E \cdot \tau \quad (5.53)$$

$$\tau = \frac{m}{-e \cdot E} \cdot v_D \quad (5.54)$$

$$= 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad (5.55)$$

(d)

Beweglichkeit im Kupfer:

$$\mu = \frac{v_D}{E} = 4,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \quad (5.56)$$

5 Blatt 5

Mit den oben formulierten Zusammenhängen findet sich für $\mu = 10^7 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} = 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$

$$v_D = \mu \cdot E \quad (5.57)$$

$$= 34 \text{ m/s} \quad (5.58)$$

$$\tau = \frac{m}{-e \cdot E} \cdot v_D \quad (5.59)$$

$$= \frac{m}{-e} \cdot \mu \quad (5.60)$$

$$= 6 \cdot 10^{-9} \text{ s} \quad (5.61)$$

Wir können aus der Gleichung (5.61) erkennen, dass die Werte im Halbleiter deutlich größer sind als im Kupfer.

5.3 Aufgabe 18

(a)

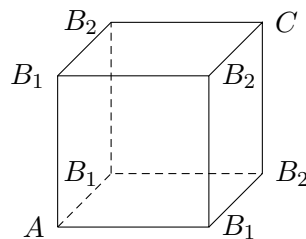


Abbildung 5.1: Beschriftung des Würfels in Schaltungsebenen, wobei A und C mit der Spannungsquelle verbunden sind.

Durch die Umformung bekommt man dann folgenden zweidimensionalen Schaltplan (Figur 5.2), welche durch LaTeX eventuell etwas verschoben ist.

(b)

Da alle Widerstände des Systems identisch sind, können wir eine Symmetrie erkennen. Dies führt dazu, dass sich der Strom von Knoten A gleichmäßig auf die drei anknüpfenden Kanten verteilt.

$$I = I_{\text{gesamt}} = I_{A \rightarrow B_1} + I_{A \rightarrow B_1} + I_{A \rightarrow B_1} = 3 \cdot I_{A \rightarrow B_1} \quad (5.62)$$

Umgeformt kommen wir zu folgendem:

5 Blatt 5

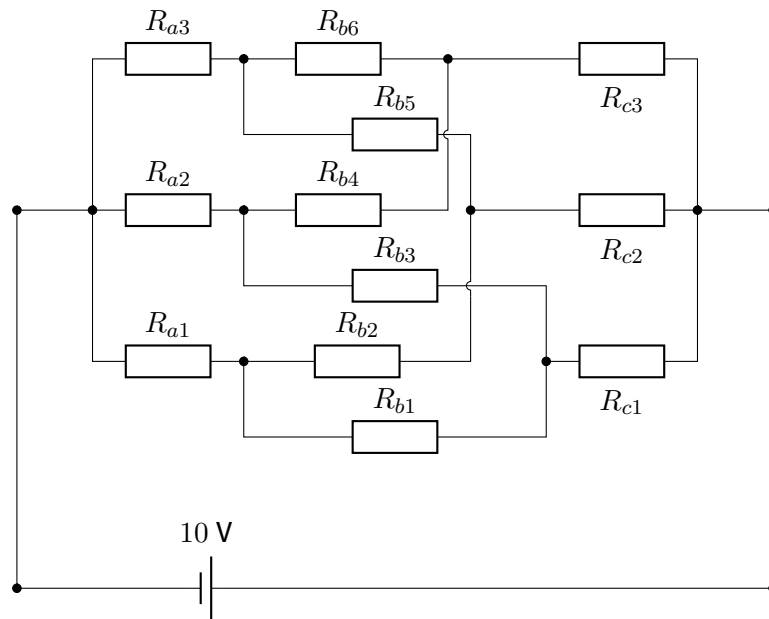


Abbildung 5.2: 2D-Schaltkreis

$$I_{A \rightarrow B_1} = \frac{I_{\text{gesamt}}}{3} \quad (5.63)$$

Identisches gilt umgekehrt auch für den Knoten C:

$$I_{B_2 \rightarrow C} = \frac{I_{\text{gesamt}}}{3} \quad (5.64)$$

Bei der Betrachtung der Ströme von den Knoten B_1 zu den Knoten B_2 können wir feststellen, dass es von jedem B_1 immer zwei symmetrische Wege zu einem Knoten B_2 gibt. So können wir aufstellen:

$$I_{A \rightarrow B_1} = I_{B_1 \rightarrow B_2} + I_{B_1 \rightarrow B_2} \quad (5.65)$$

Da diese identisch sind, so folgt

$$I_{B_1 \rightarrow B_2} = \frac{I_{A \rightarrow B_1}}{2} = \frac{I_{\text{gesamt}}}{2 \cdot 3} = \frac{I_{\text{gesamt}}}{6} \quad (5.66)$$

So folgt mit dem Ohmschen Gesetz bei der Betrachtung von einem Pfad:

$$U_{ges} = U_{A \rightarrow B_1} + U_{B_1 \rightarrow B_2} + U_{B_2 \rightarrow C} \quad (5.67)$$

$$= R_{ges} \cdot I_{A \rightarrow B_1} + R_{ges} \cdot I_{B_1 \rightarrow B_2} + R_{ges} \cdot I_{B_2 \rightarrow C} \quad (5.68)$$

$$= R_{ges} (I_{A \rightarrow B_1} + I_{B_1 \rightarrow B_2} + I_{B_2 \rightarrow C}) \quad (5.69)$$

$$= R_{ges} \left(\frac{I_{gesamt}}{3} + \frac{I_{gesamt}}{6} + \frac{I_{gesamt}}{3} \right) \quad (5.70)$$

$$= \frac{5}{6} R_{ges} \cdot I_{gesamt} \quad (5.71)$$

$$\Rightarrow I_{gesamt} = 2 \text{ A} \quad (5.72)$$

$$\Rightarrow R_{ges} = 5 \Omega \quad (5.73)$$

$$(5.74)$$

Hier ist dann noch der alternative Schaltplan:

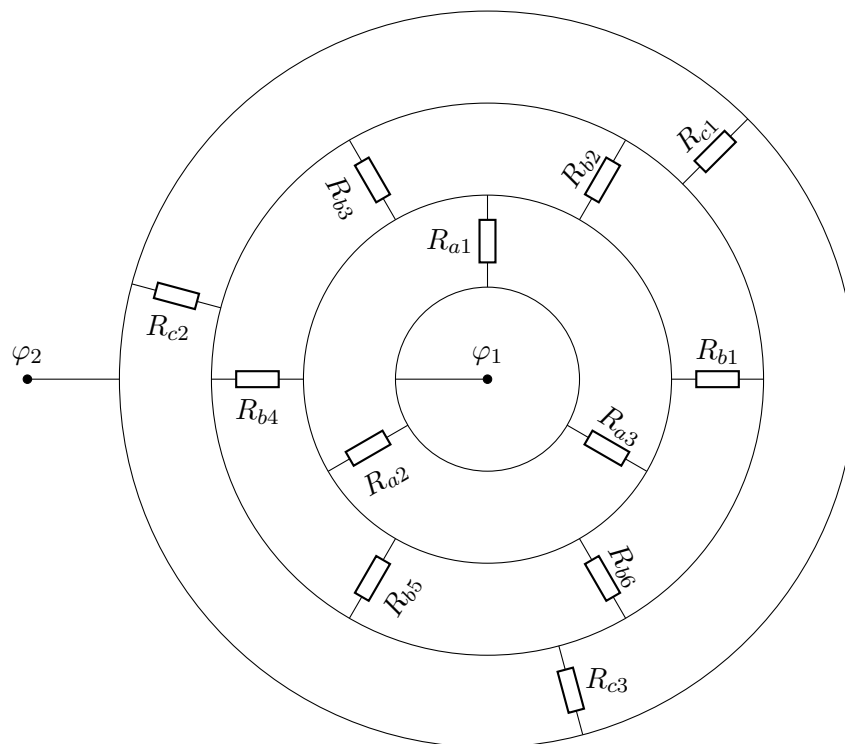


Abbildung 5.3: Alternativer 2D-Schaltkreis, wobei $\varphi_2 - \varphi_1 = 10 \text{ V}$ der Batterie entspricht. Dies gilt jedoch nur, da wir aufgrund der Symmetrie des Würfels die alle Potentiale B_1 und B_2 gleichsetzen können.

(c)

Mit dem Gedanken, die wir in Teil (b) gemacht haben, können wir sagen, dass auf den Kanten vom Knoten A zu den Knoten B_1 der gleiche Strom angelegt ist, wie auf den Kanten von den Knoten B_2 zu dem Knoten C ist. So gilt:

$$I_{A \rightarrow B_1} = I_{B_2 \rightarrow C} = \frac{I_{\text{gesamt}}}{3} = \frac{2}{3} \text{ A} \approx 0,67 \text{ A} \quad (5.75)$$

Für die Kanten von den Knoten B_1 zu den Knoten B_2 gilt:

$$I_{B_1 \rightarrow B_2} = \frac{I_{\text{gesamt}}}{6} = \frac{1}{3} \text{ A} \approx 0,33 \text{ A} \quad (5.76)$$

(d)

Für das Potential der Knoten B_2 gilt dann:

$$U_{B_2} = U_{\text{ges}} - R \cdot I_{B_2 \rightarrow C} = 10 \text{ V} - 6 \Omega \cdot \frac{2}{3} \text{ A} = 10 \text{ V} - 4 \text{ V} = 6 \text{ V} \quad (5.77)$$

So gilt für B_2 :

$$U_{B_1} = U_{B_2} - R \cdot I_{B_1 \rightarrow B_2} = 6 \text{ V} - 6 \Omega \cdot \frac{1}{3} \text{ A} = 6 \text{ V} - 2 \text{ V} = 4 \text{ V} \quad (5.78)$$

5.4 Aufgabe 19 (freiwillig)

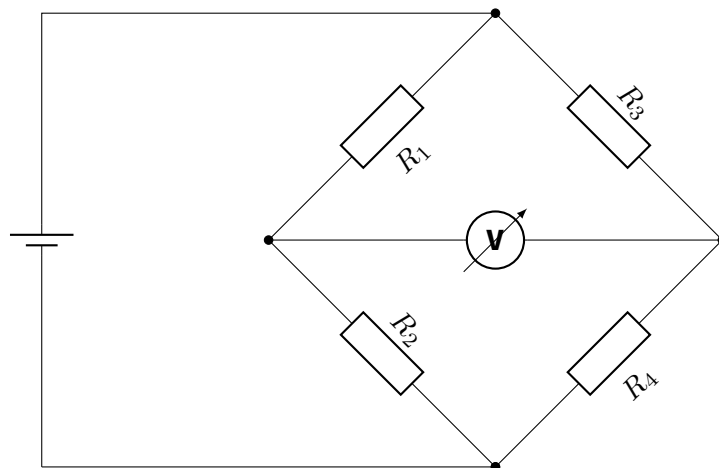


Abbildung 5.4: Beispiel einer Wheatstone-Brücke

Folgende Gleichungen können wir feststellen:

5 Blatt 5

$$I_1 = I_2 \quad (5.79)$$

$$I_3 = I_4 \quad (5.80)$$

$$U_1 = U_3 \quad (5.81)$$

$$U_2 = U_4 \quad (5.82)$$

Es folgt:

$$I_1 \cdot R_1 = I_3 \cdot R_3 \quad (5.83)$$

$$I_2 \cdot R_2 = I_4 \cdot R_4 \quad (5.84)$$

Durch Umformung folgt:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{I_3}{I_1} \quad (5.85)$$

$$\frac{R_2}{R_4} = \frac{I_4}{I_2} = \frac{I_3}{I_1} \quad (5.86)$$

Es gilt nun der Zusammenhang:

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad (5.87)$$

Wenn wir nun drei der Widerstände kennen, so können wir (5.87) umformen und erhalten den Wert des Widerstands. Diese Methode hat den Vorteil, dass man mit dem Wissen über die Widerstände nur die Spannung von 0 V messen muss, anstatt von Spannung und Stromstärke, was den Prozess vereinfacht bei gleichbleibender Präzision.

6 Blatt 6

6.1 Aufgabe 20

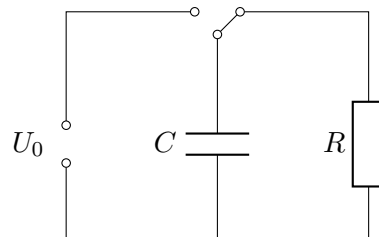


Abbildung 6.1: Schaltplan

(a)

Die Summe aller Spannungen einer Masche muss $= 0$ sein, weshalb aus dem Aufladeprozess als Randbedingung gilt

$$U_C(t = 0) = U_0 \quad (6.1)$$

und beim Entladeprozess gilt:

$$U_R(t) + U_C(t) = 0 \quad (6.2)$$

$$R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (6.3)$$

Nun leiten wir obige Gleichung ab:

$$R \cdot \dot{I}(t) + \frac{1}{C} \cdot I(t) = 0 \quad (6.4)$$

$$\dot{I}(t) + \frac{I(t)}{C \cdot R} = 0 \quad (6.5)$$

Ansatz:

6 Blatt 6

$$I(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (6.6)$$

$$\dot{I}(t) = A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (6.7)$$

Demnach:

$$A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + \frac{1}{C \cdot R} \cdot A \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0 \quad (6.8)$$

$$\lambda = -\frac{1}{C \cdot R} \quad (6.9)$$

Deshalb:

$$I(t) = A \cdot e^{-\frac{1}{C \cdot R} \cdot t} \quad (6.10)$$

Es gilt:

$$I(t=0) = I_0 = A \quad (6.11)$$

Also:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{C \cdot R} \cdot t} \quad (6.12)$$

$$R \cdot I(0) + U_C(0) = 0 \quad (6.13)$$

$$R \cdot I(0) - U_0 \stackrel{(6.1)}{=} 0 \quad (6.14)$$

$$I_0 = -\frac{U_0}{R} \quad (6.15)$$

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \quad (6.16)$$

(b)

Gegeben:

$$C = 1 \mu\text{F}; U_0 = 10 \text{ V}; R = 200 \Omega \quad (6.17)$$

6 Blatt 6

$$I_0 = -\frac{U_0}{R} \quad (6.18)$$

$$= -0,05 \text{ A} \quad (6.19)$$

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad (6.20)$$

$$= -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.21)$$

$$\tau = R \cdot C \quad (6.22)$$

$$= 2 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (6.23)$$

(c)

Wir integrieren $I(t)$ und erhalten:

$$Q(t) = \int_{t_0=0}^{t_1} I(t) dt \quad (6.24)$$

$$= \int_{t_0=0}^{t_1} I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} dt \quad (6.25)$$

$$= I_0 \cdot \tau \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right) \quad (6.26)$$

$$\Rightarrow Q(t = 0,001 \text{ s}) \approx -9,932 \cdot 10^{-6} \text{ C} \quad (6.27)$$

(d)

Für diesen Aufgabenteil bestimmen wir die Änderung der Energie am Widerstand in diesem System:

$$W_R = \int_0^\infty P(t) dt \quad (6.28)$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{U(t)}_{I(t) \cdot R} \cdot I(t) dt \quad (6.29)$$

$$= R \cdot \int_0^\infty I^2(t) dt \quad (6.30)$$

$$= R \cdot I_0^2 \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \quad (6.31)$$

6 Blatt 6

$$= -\frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty \quad (6.32)$$

$$= -\frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{R \cdot C}{2} \cdot [0 - 1] \quad (6.33)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 \quad (6.34)$$

Wie wir erkennen können, merken wir, dass die anfängliche Energie im Kondensator $W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$ der Energie entspricht, die am Widerstand umgewandelt wird. Da die Energien gleich sind, wird die gesamte Energie des Kondensators im Widerstand umgewandelt. Da der Widerstand die elektrische Energie nur in Wärmeenergie umwandeln kann, wird die Energie komplett in Wärme umgewandelt.

6.2 Aufgabe 21

(a)

Aus der molaren Masse M , können wir die Masse m von $^{10}\text{B}^+$ bestimmen:

$$M = \frac{m}{n} \quad (6.35)$$

$$\Rightarrow m = M \cdot n \quad (6.36)$$

$$\Rightarrow m(^{10}\text{B}^+) = M \cdot \frac{1}{N_A} \quad (6.37)$$

$$m(^{10}\text{B}^+) = 1,66 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \quad (6.38)$$

Wir wissen, dass wir im Massenspektrometer Energieerhaltung haben. Am Anfang gibt es nur elektrische Energie E_{el} (bei $v_0 = 0$) und beim verlassen des elektrischen Feldes nur noch kinetische Energie. So können wir berechnen:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{el}} \quad (6.39)$$

$$E_{\text{kin}} = q \cdot E \quad (6.40)$$

$$E_{\text{kin}} = e \cdot E \quad (6.41)$$

$$\Rightarrow E_{\text{kin}} = 4,005 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 25000 \text{ eV} = 25 \text{ keV} \quad (6.42)$$

Außerdem können wir aus der Energieerhaltung die Austrittsgeschwindigkeit des Bor-Ions aus dem elektrischen Feld berechnen:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{el}} \quad (6.43)$$

6 Blatt 6

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = e \cdot U \quad (6.44)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{M \cdot \frac{1}{N_A}}} \quad (6.45)$$

$$\Rightarrow v = 694569 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.46)$$

Für die Berechnung des Radius im Magnetfeld B können wir sagen, dass die auf das Teilchen wirkende Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist. So können wir die Gleichung umstellen:

$$F_L = F_{ZP} \quad (6.47)$$

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad (6.48)$$

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \quad (6.49)$$

$$r = \frac{\sqrt{M \cdot \frac{1}{N_A} \cdot 2 \cdot q \cdot U}}{q \cdot B} \quad (6.50)$$

$$\Rightarrow r = 0,04799 \text{ m} \quad (6.51)$$

(b)

Gesucht: Abstand d der Auftreffpunkte von $^{10}\text{B}^+$ und $^{11}\text{B}^+$ auf der Fotoplatte.

Zuerst müssen wir die Masse m von $^{11}\text{B}^+$ berechnen:

$$m(^{11}\text{B}^+) = m(^{10}\text{B}^+) + m_n = 1,828 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \quad (6.52)$$

So können wir die Formel (6.49) von oben verwenden und mittels der Radien den Abstand der beiden Teilchen bestimmen. Wir kennen den Durchmesser d des Kreises, welcher $d = 2 \cdot r$ ist.

$$\Delta d = 2r(^{11}\text{B}^+) - 2r(^{10}\text{B}^+) \quad (6.53)$$

$$\Delta d = 2 \left(\frac{m(^{11}\text{B}^+) \cdot v(^{11}\text{B}^+)}{e \cdot B} - \frac{m(^{10}\text{B}^+) \cdot v(^{10}\text{B}^+)}{e \cdot B} \right) \quad (6.54)$$

$$\Rightarrow \Delta d = 2(0,05035 \text{ m} - 0,04799 \text{ m}) = 0,00472 \text{ m} = 4,72 \text{ mm} \quad (6.55)$$

(c)

Gesucht: Betrag und Richtung eines elektrischen Feldes, das die Ablenkung des $^{11}\text{B}^+$ -Ions verhindern soll.

Offensichtlich muss das elektrische Feld der Lorentzkraft entgegen wirken (antiparallel), dem entsprechend also senkrecht zu $\vec{v}$ und $\vec{B}$ stehen.

Betraglich müssen die beiden Felder genau so stark sein, dass die Coulombkraft auf das Ion die Lorentzkraft ausgleicht. Es muss also gelten:

$$|\vec{F}_C| = |\vec{F}_L| \quad (6.56)$$

Oder unter der Berücksichtigung der Richtung der Vektoren:

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.57)$$

Die Masse des $^{11}\text{B}^+$ -Ions ist bereits aus der (b) bekannt. Somit folgt für den Betrag des elektrischen Feldes:

$$|\vec{E}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| = v \cdot B = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot 25 \cdot 10^3 \text{ V}}{1,828 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} \cdot 1,5 \text{ T} = 992,986 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \quad (6.58)$$

6.3 Aufgabe 22

Wir wenden das Amperesche Gesetz an:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \quad (6.59)$$

Dicke der Platte wird vernachlässigt, deshalb ergibt sich (für den Fall $z \ll 1$) mit z als Abstand der rechteckigen Schleife L zur Platte (für unsere Zwecke hilfreich, da wir im Folgenden ohnehin Platten mit sehr kleinem Abstand betrachten wollen und auf den senkrechten Strecken entlang der z -Achse sonst kaum die Streufelder am Rand vernachlässigen könnten):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int \vec{B}(-z) dy + \int \vec{B}(z) dy \quad (6.60)$$

$$= B(-z) \cdot d + B(z) \cdot d \quad (6.61)$$

Symmetrie:

$$|\vec{B}(z)| = |\vec{B}(-z)| = B \quad (6.62)$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = 2 \cdot B \cdot d = \mu_0 \cdot I \quad (6.63)$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot d} \quad (6.64)$$

Feld zwischen zwei solchen parallelen Platten mit kleinem Abstand, die von entgegengesetzten Strömen durchflossen werden:

Außen gilt mit dem Ampereschen Gesetz über eine Kurve L, die in beliebigem Abstand um beide Platten herum verläuft (mit gegensätzlichem Vorzeichen von I_1 und I_2):

$$B = \frac{\mu_0}{2 \cdot d} (I_2 + I_1) \quad (6.65)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2 \cdot d} (|I_2| - |I_1|) \quad (6.66)$$

Innen gilt über das Superpositionsprinzip (bei vernachlässigbarem z) mit $\vec{B}_1 || \vec{B}_2$ (aus der Rechte-Hand-Regel):

$$B = |B_1| + |B_2| \quad (6.67)$$

$$= \frac{\mu_0}{2d} (|I_2| + |I_1|) = \frac{\mu_0 \cdot I}{d} \quad (6.68)$$

6.4 Aufgabe 23

Grundsätzlich wenden wir auf allen Bereichen den Zirkulationssatz (Amperesches Gesetz) an:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I \quad (6.69)$$

wobei hier I die Summe der eingeschlossenen Ströme ist. In unserem Fall können wir stets Kreise mit Radius r um variierende Ströme betrachten, sodass sich unsere Grundgleichung vereinfacht zu

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad (6.70)$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I \quad (6.71)$$

Zudem können wir für alle Fälle bereits festhalten, dass für die Ströme stets folgender Zusammenhang gilt:

$$j = \frac{I}{A} \quad (6.72)$$

$$\Rightarrow j_1 = \frac{I}{\pi(r_1 + d)^2 - \pi r_1^2} \quad (6.73)$$

$$= \frac{I}{\pi(2r_1 d + d^2)} \quad (6.74)$$

$$\Rightarrow j_2 = \frac{-I}{\pi(r_2 + d)^2 - \pi r_2^2} \quad (6.75)$$

$$= \frac{-I}{\pi(2r_2 d + d^2)} \quad (6.76)$$

(i)

Im Fall $0 \leq r < r_1$ gilt für den eingeschlossenen Strom stets $I(r) = 0$. Somit ist hier

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r) = 0 \quad (6.77)$$

(ii)

Im Fall $r_1 \leq r < r_1 + d$ wird ein zunehmender Bereich des Stromes in Rohr 1 eingeschlossen. Für diesen Strom $I(r)$ gilt:

$$I(r) = A(r) \cdot j_1 \quad (6.78)$$

$$= (\pi r^2 - \pi r_1^2) \cdot j_1 \quad (6.79)$$

$$\stackrel{(6.74)}{=} I \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{2r_1 d + d^2} \quad (6.80)$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I \cdot \frac{r^2 - r_1^2}{2r_1 d + d^2} \quad (6.81)$$

(iii)

Im Fall $r_1 + d \leq r < r_2$ ergibt sich der umschlossene Strom einfach als $I(r) = \text{const} = I$, somit gilt

6 Blatt 6

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I \quad (6.82)$$

(iv)

Im Fall $r_2 \leq r < r_2 + d$ müssen wir stets den gesamten Strom des inneren Rohres und dazu einen zunehmenden Anteil des Stromes in Rohr 2 $I'(r)$ berücksichtigen:

$$I(r) = I + I'(r) \quad (6.83)$$

$$= I + A'(r) \cdot j_2 \quad (6.84)$$

$$= I + (\pi r^2 - \pi r_2^2) j_2 \quad (6.85)$$

$$\stackrel{(6.76)}{=} I - I \cdot \frac{r^2 - r_2^2}{2r_2 d + d^2} \quad (6.86)$$

$$= I \cdot \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{2r_2 d + d^2} \right) \quad (6.87)$$

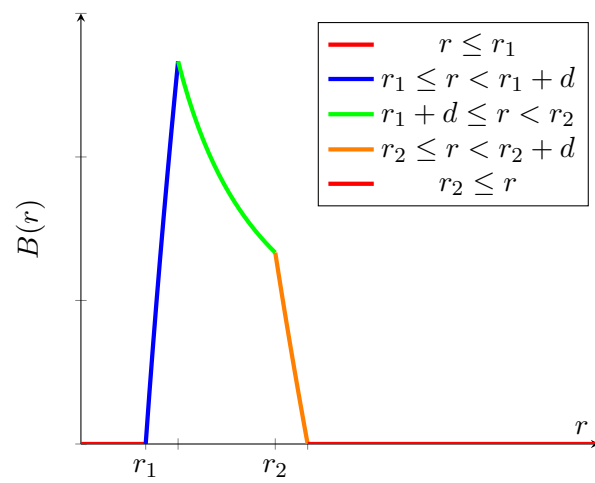
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I \cdot \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{2r_2 d + d^2} \right) \quad (6.88)$$

(v)

Abschließend gilt im Fall $r_2 + d \leq r$ für den umschlossenen Strom $I(r) = I - I = 0$, sodass erneut gilt

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r) = 0 \quad (6.89)$$

(vi)

**Abbildung 6.2:** Magnetfeld koaxialer Rohre

7 Blatt 7

7.1 Aufgabe 24

Gegeben: $I_i = 0,001 \text{ A}$, $R_i = 20 \Omega$

Bei der gesamten Aufgabe vereinfachen wir das Drehspulinstrument zum Widerstand R_i und zeichnen es auch als solchen in die Schaltungen ein. Außerdem gilt $\phi_1 \neq \phi_2$.

(a)

Damit wir eine Stromstärke von $I_0 = 5 \text{ A}$ messen können, so müssen wir den R_i parallel anschließen. So mit ergibt sich:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \quad (7.1)$$

Da wir in einer Parallelschaltung in allen Zweigen die gleiche Spannung haben haben, können wir die Spannungen der einzelnen Pfade gleichsetzen.

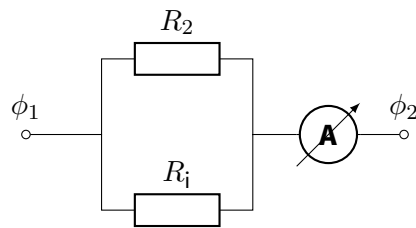
$$U_0 = U_1 (= U_2) = R_i \cdot I_i = 0,02 \text{ V} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ V} \quad (7.2)$$

Mit dem Zusammenhang von R_{ges} , U_0 und I_0 können wir sagen:

$$U_0 = R_{\text{ges}} \cdot I_0 \Leftrightarrow R_{\text{ges}} = \frac{U_0}{I_0} \quad (7.3)$$

Somit folgt:

$$R_2 = \frac{1}{\frac{I_0}{U_0} - \frac{1}{R_i}} = \frac{20}{4999} \Omega \approx 0,004 \Omega \quad (7.4)$$

**Abbildung 7.1:** Parallelschaltung für Aufgabenteil (a)**(b)**

Um eine hohe Spannung von $U_0 = 200 \text{ V}$ zu messen, so müssen wir den Widerstand R_i in eine Reihenschaltung packen. Somit gilt dann:

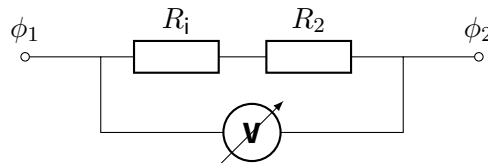
$$R_{\text{ges}} = R_i + R_2 \quad (7.5)$$

Da die Stromstärke in der Reihenschaltung konstant ist, so gilt:

$$U_0 = I_0 \cdot R_i + I_0 \cdot R_2 = I_0(R_i + R_2) \quad (7.6)$$

$$\Leftrightarrow R_2 = \frac{U_0}{I_0} - R_i \quad (7.7)$$

$$R_2 = 200000 \, \Omega - 20 \, \Omega = 199980 \, \Omega \quad (7.8)$$

**Abbildung 7.2:** Reihenschaltung für Aufgabenteil (b)

7.2 Aufgabe 25

Gegebene Größe:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ &= r \end{aligned}$$

(a)

Wir stellen Formeln für den Umfang einer Kreisrunde, der Zeit und der Stromstärke auf:

7 Blatt 7

$$s = 2\pi r \quad (7.9)$$

$$= 2\pi a_0 \quad (7.10)$$

$$t = \frac{s}{v} \quad (7.11)$$

$$I = \frac{Q}{t} \quad (7.12)$$

$$= \frac{e}{t} \quad (7.13)$$

Die Herleitung der Geschwindigkeit v durch gleichsetzen der Zentripetalkraft und der Coulombkraft:

$$F_Z = F_C \quad (7.14)$$

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7.15)$$

$$(7.16)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e}} \quad (7.17)$$

$$= \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 r m_e}} \quad (7.18)$$

$$= \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 a_0 m_e}} \quad (7.19)$$

Nun setzen wir ein:

$$v = 2188057,648 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (7.20)$$

$$t = 1,519066479 \cdot 10^{-16} \text{ s} \quad (7.21)$$

$$I = 1,054711238 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad (7.22)$$

$$\approx 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad (7.23)$$

(b)

Berechnung der Fläche:

$$S = \pi r^2 \quad (7.24)$$

$$= \pi a_0^2 \quad (7.25)$$

$$= 8,791464298 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2 \quad (7.26)$$

Berechnung des magnetischen Dipolmoments:

7 Blatt 7

$$p_m = I \cdot S \quad (7.27)$$

$$= 9,272456193 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (7.28)$$

$$\approx 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (7.29)$$

(c)

Wir wenden das Gesetz von Biot-Savart an:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.30)$$

Nun bestimmen wir das Kreuzprodukt mithilfe von Zylinderkoordinaten:

$$d\vec{l} \times \vec{r} = r d\phi \vec{e}_\phi \times r \vec{e}_r \quad (7.31)$$

$$= r^2 d\phi \vec{e}_z \quad (7.32)$$

Einsetzen in Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\phi \vec{e}_z \quad (7.33)$$

Wir integrieren:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\phi \vec{e}_z \quad (7.34)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2r} \vec{e}_z \quad (7.35)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (7.36)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2a_0} \quad (7.37)$$

$$\approx 12,47 \text{ T} \quad (7.38)$$

7.3 Aufgabe 26

Gegeben: Es liegt eine Helmholtz Spulenanordnung mit zwei ringförmigen Spulen, Radius R , Windungszahl N , Abstand d , Strom I und gemeinsamer Spulennachse x vor.

Das Biot-Savart-Gesetz für eine Leiterschleife mit N Windungen lautet:

$$B_{\text{Schleife}}(x) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + (x \pm x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.39)$$

Da wir nun zwei Spulen besitzen und beide ein Magnetfeld erzeugen, so müssen wir die magnetische Flussdichten B addieren. So gilt:

$$B_{\text{gesamt}} = B_1 + B_2 \quad (7.40)$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + (x - \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + (x + \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.41)$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{(R^2 + (x - \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R^2 + (x + \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (7.42)$$

Entwickeln wir nach Taylor so erhalten wir für die einzelnen Terme:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot \left(-\frac{3(x - \frac{d}{2})}{(R^2 + (x - \frac{d}{2})^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(x + \frac{d}{2})}{(R^2 + (x + \frac{d}{2})^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (7.43)$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot \left(-\frac{3}{(R^2 + (x + \frac{d}{2})^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15 \cdot (x + \frac{d}{2})^2}{(R^2 + (x + \frac{d}{2})^2)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad (7.44)$$

$$+ \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot \left(-\frac{3}{(R^2 + (x - \frac{d}{2})^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15 \cdot (x - \frac{d}{2})^2}{(R^2 + (x - \frac{d}{2})^2)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad (7.45)$$

Wenn man beide Funktionen mit $R = d$ an der Stelle $x = 0$ ausgewertet wird, ergibt sich:

$$\left. \frac{dB}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (7.46)$$

$$\left. \frac{d^2B}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (7.47)$$

Somit ergibt sich für die Taylorentwicklung:

$$B(x) = \sum_{k=0}^n \frac{B^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (7.48)$$

$$= B(0) + 0 + 0 \quad (7.49)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{125}} \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{R} \quad (7.50)$$

Wenn wir nun eine Anti-Helmholtz-Anordnung betrachten, so ergibt sich für die magnetische Flussdichte B :

$$B_{\text{gesamt}} = B_1 - B_2 \quad (7.51)$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + (x - \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + (x + \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.52)$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2} \cdot \left(\frac{R^2}{(R^2 + (x - \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R^2}{(R^2 + (x + \frac{d}{2})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (7.53)$$

Erfolgt nun auch eine Taylorentwicklung mit den gleichen Bedingungen, so erhalten wir:

$$B(x) = \sum_{k=0}^n \frac{B^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (7.54)$$

$$= 0 + B^{(1)}(0) + 0 \quad (7.55)$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{2304}{3125}}}_{\approx 0,8587} \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{R^2} \quad (7.56)$$

7.4 Aufgabe 27

(a)

Beim Hall-Effekt wird ein von einem Strom I durchflossener (flächiger, d.h. meist ein dünner Streifen Metall) Leiter in einem dazu senkrecht gerichteten Magnetfeld $\vec{B}$ betrachtet.

Auf die Ladungsträger im Leiter mit durch den Strom bedingter Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D$ wirkt dementsprechend senkrecht zur Strom- und Magnetfeldrichtung die Lorentzkraft $\vec{F}_L$, die zum

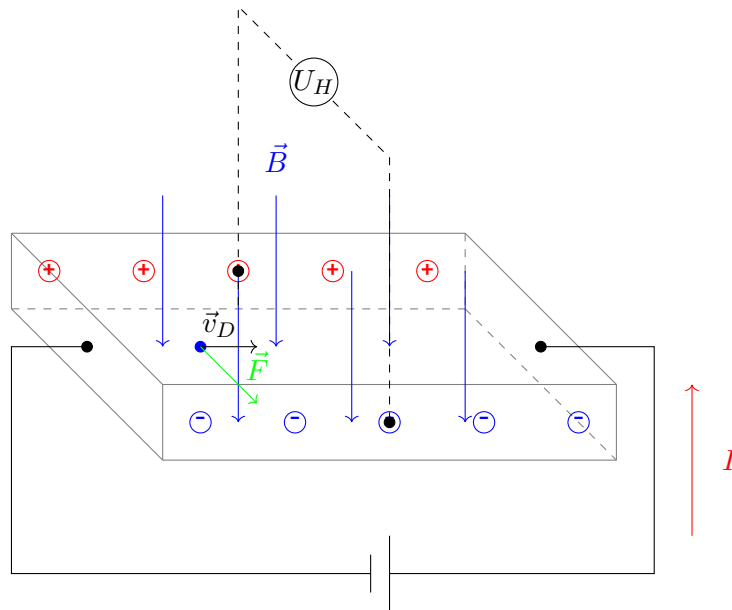


Abbildung 7.3: Skizze Hall-Effekt

Abdriften der Ladungsträger und somit (da für unterschiedliche Vorzeichen der Ladung (vereinfacht, "positive" Ladungsträger wandern natürlich nur als zurückbleibende Löcher wandernder Elektronen)) zu einer Ladungstrennung senkrecht zur Stromrichtung entlang des Leiters führt.

Dieser Prozess dauert an, bis das durch die Ladungstrennung aufgebaute elektrische Feld $\vec{E}$ die Wirkung der Lorentzkraft gerade kompensiert. Dann ist ein stabiler Zustand erreicht, der durch die zum Feld $\vec{E}$ zugehörige sogenannte Hallspannung U_H charakterisiert wird.

(b)

Nebenrechnung: Bestimmung von n_e ausgehend von $N_e = N_{Cu}$ mit Molmasse M_{Cu} (in SI, d.h. 0.06354 kg/mol und Avogadro-Konstante N_A):

$$m_{Cu} = \frac{M_{Cu}}{N_A} \quad (7.57)$$

$$\Rightarrow n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{N_{Cu}}{V} \quad (7.58)$$

$$= \frac{V \cdot \rho_{Cu}}{V \cdot m_{Cu}} \quad (7.59)$$

$$= \frac{\rho_{Cu} \cdot N_A}{M_{Cu}} \quad (7.60)$$

Berechnung der Driftgeschwindigkeit (mit $A = b \cdot d$):

7 Blatt 7

$$j = n_e \cdot e \cdot v_D = \frac{I}{A} \quad (7.61)$$

$$\Rightarrow v_D = \frac{I}{n_e \cdot e \cdot A} \quad (7.62)$$

$$= \frac{I \cdot M_{Cu}}{bd \rho_{Cu} N_A e} \quad (7.63)$$

$$= 5.88 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \quad (7.64)$$

Berechnung der Hallspannung mit $|\vec{v}_D \times \vec{B}| = v_D \cdot B$:

$$U_H = b \cdot E \quad (7.65)$$

$$E = v_D \cdot B \quad (7.66)$$

$$\Rightarrow U_H = b \cdot \frac{I}{bd n_e e} \cdot B \quad (7.67)$$

$$= \frac{I \cdot B}{n_e e d} \quad (7.68)$$

$$= \frac{I \cdot B \cdot M_{Cu}}{d \rho_{Cu} N_A e} \quad (7.69)$$

$$= 1.18 \cdot 10^{-5} \text{ V} \quad (7.70)$$

(c)

Im eingestellten Gleichgewicht wirkt selbstverständlich $\sum \vec{F} = 0$. Gemeint ist aber vermutlich die pro Längeneinheit wirkende Lorentzkraft ohne Berücksichtigung der Gegenkraft durch die sich einstellende Hallspannung:

$$\frac{F_L}{l} = \frac{q \cdot v_D \cdot B}{l} \quad (7.71)$$

$$q = V \cdot n_e \cdot e = bdl n_e e \quad (7.72)$$

$$\frac{F_L}{l} = B \cdot I \cdot \frac{bdl n_e e}{l \cdot n_e e bd} \quad (7.73)$$

$$= B \cdot I \quad (7.74)$$

$$= 16 \text{ N/m} \quad (7.75)$$

8 Blatt 8

8.1 Aufgabe 28

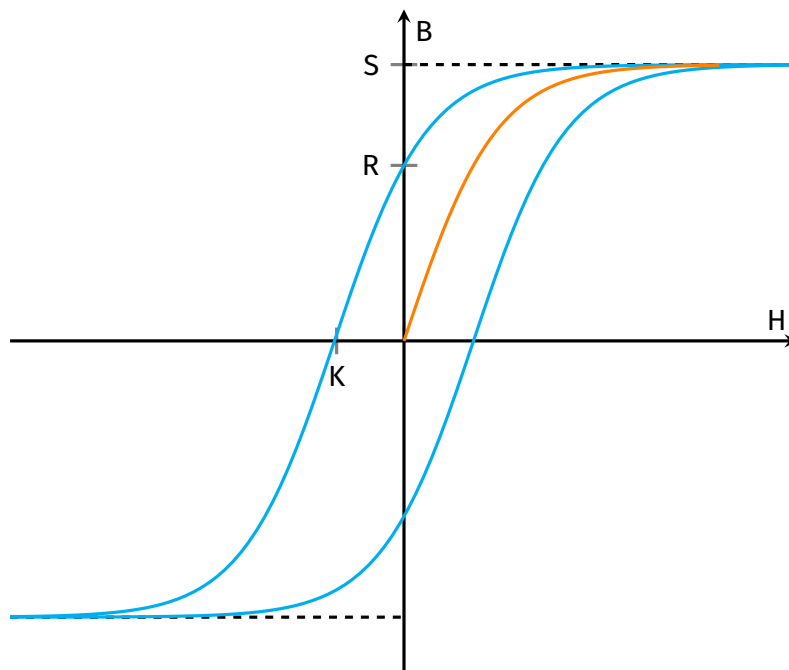


Abbildung 8.1: Skizze einer Hysteresekurve

Ganz allgemein ist mit dem Begriff Hysterese ein verzögerter Zusammenhang zwischen einer Ursache und deren intendierter Wirkung gemeint. In unserem physikalischen Kontext tritt der Begriff Hysterese im Zusammenhang der Magnetisierung eines (ferromagnetischen) Stoffes auf.

Für die (siehe Skizze) typische Hysteresekurve betrachtet man die magnetische Flussdichte B des Stoffes gegenüber der von außen angelegten magnetischen Feldstärke H . Beide sind grundsätzlich über die Permeabilität gekoppelt $B = \mu \cdot H$, an der Skizze lässt sich aber bereits erkennen, dass der Begriff Hysterese aufgrund des nicht-linearen Zusammenhangs der beiden gewählt wurde.

In orange zu sehen ist die Neukurve, also der Verlauf der Flussdichte nach erstmaligem Anlegen (Beginn im Ursprung). Wird danach aber H wieder auf 0 zurück geregelt, so sinkt die Flussdichte nicht direkt wieder auf 0, sondern verläuft entlang der blauen Kurve.

Die dabei verbleibende Flussdichte R bezeichnet man als Remanenz, die durch die verbleibende Ausrichtung der „Elementarmagnete“ im Material zustande kommt. Um $B = 0$ zu erreichen,

muss eine gegensätzlich gerichtete Feldstärke $(-)K$ angelegt werden.

Dabei ist zu beachten, dass die Flussdichte des Stoffes sich nicht beliebig steigern lässt: Es kann eine Sättigungsgrenze S erreicht werden, über die hinaus sich auch durch höhere Feldstärken die Flussdichte nicht steigern lässt (Maximale Ausrichtung der „Elementarmagnete“ erreicht).

Die Fläche unter der Hysteresekurve als Integral von B entlang von H lässt sich dabei als Maß für die zur Magnetisierung des Stoffes nötige Arbeit interpretieren.

8.2 Aufgabe 29

$R = 0,1 \text{ m}$; $\mu_r = 2000$; $N = 200$; $I = 5 \text{ A}$; $d = 0,005 \text{ m}$. Annahme: $\mu_{\text{Luft}} = 1$

(a)

Wir kennen das Ampèresches Gesetz, was besagt:

$$\oint_S H \cdot ds = N \cdot I \text{ und } \oint_S H \cdot ds = 2\pi \cdot R \cdot H \quad (8.1)$$

Die beiden Integrale können wir gleich setzen und bekommen für die magnetische Feldstärke H folgenden Ausdruck:

$$H = \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot R} = 1591,549 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (8.2)$$

Für die magnetische Flussdichte ergibt sich:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot R} = 4 \text{ T} \quad (8.3)$$

Für die Magnetisierung ergibt sich:

$$M = \chi \cdot H = (\mu_r - 1) \cdot H = 3181507,312 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (8.4)$$

(b)

Die magnetische Feldstärke H verändert sich durch die Entnahme des Eisenkerns nicht. Für die magnetische Flussdichte B ergibt sich:

$$B = \mu_0 \cdot H = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 2 \text{ mT} \quad (8.5)$$

(c)

Die Normalkomponenten der beiden magnetischen Flussdichten müssen, wie wir aus der Vorlesung kennen, stetig sein. Es gilt:

$$B_{\text{Luft}} = B_{\text{Eisen}} \quad (8.6)$$

Daraus können wir, wie wir es auch in der Vorlesung gemacht haben, zeigen, dass die magnetischen Feldstärken im Zusammenhang stehen:

$$H_{\text{Luft}} = \mu_r \cdot H_{\text{Eisen}} \quad (8.7)$$

So folgt aus dem Kurvenintegral:

$$\oint_S H \cdot ds = (2\pi \cdot R - d)H_{\text{Eisen}} + d \cdot H_{\text{Luft}} \quad (8.8)$$

$$= \frac{(2\pi \cdot R - d)}{\mu_r} H_{\text{Luft}} + d \cdot H_{\text{Luft}} \quad (8.9)$$

$$\Rightarrow H_{\text{Luft}} = \frac{N \cdot I \cdot \mu_r}{\mu_r \cdot d + 2\pi \cdot R - d} = 188265,0882 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (8.10)$$

$$\Rightarrow H_{\text{Eisen}} = \frac{N \cdot I}{\mu_r \cdot d + 2\pi \cdot R - d} = 94,1325 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (8.11)$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 \cdot H_{\text{Luft}} = 0,23658 \text{ T} = 236,58 \text{ mT} \quad (8.12)$$

(d)

Für das Magnetfeld im Mittelpunkt P entspricht dem einer normalen Leiterschleife:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} = 3,14159 \cdot 10^{-5} \text{ T} \approx \pi \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (8.13)$$

8.3 Aufgabe 30

Gegeben: Eine quadratische Drahtspule mit der Kantenlänge l befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$, wobei der Winkel α so definiert ist, dass bei $\alpha = 90^\circ$ das Magnetfeld genau senkrecht auf der Spulenfläche steht.

(a)

Gesucht: Kraft F_i auf die Leiterabschnitte $i = [1, 4]$

Aus geometrischen Gründen ist klar, dass die Leiterabschnitte 1 und 3, bzw. 2 und 4 jeweils betraglich die gleiche Kraft erfahren. Da die Stromrichtung jeweils genau entgegengesetzt ist, gilt dasselbe auch für die Kräfte.

2 und 4 verlaufen parallel zur Drehachse und sind damit von α unabhängig.

8 Blatt 8

$$F_{2,4} = B \cdot I \cdot l \quad (8.14)$$

Da die beiden Leiterabschnitte parallel zur Drehachse und damit auch parallel zur y-Achse verlaufen, haben die beiden Kräfte keine y-Komponente.

Aus der "Rechte-Hand-Regel" folgt:

$$\vec{F}_2 = B \cdot I \cdot l \cdot \vec{e}_z \quad \vec{F}_4 = -B \cdot I \cdot l \cdot \vec{e}_z \quad (8.15)$$

Bei 1 und 3 spielt der Winkel für die Kraft jedoch eine Rolle:

$$F_{1,3} = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (8.16)$$

Das kann man sich auch veranschaulichen, indem man die Grenzfälle betrachtet:

$$F(\alpha = 0^\circ) = 0 \quad F(\alpha = 90^\circ) = B \cdot I \cdot l \quad (8.17)$$

Unter Berücksichtigung der RHR folgt:

$$\vec{F}_1 = -B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_y \quad \vec{F}_3 = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_y \quad (8.18)$$

(b)

Gesucht: Drehmoment $\vec{M}$ (in Bezug auf den Spulenmittelpunkt, bzw. die Drehachse) als Funktion von α . Bezogen auf die Drehachse, spielen $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_3$ ganz offensichtlich keine Rolle, da sie parallel zur Drehachse wirken. Da sie sich zu jedem Zeitpunkt ganz unabhängig von α gerade aufheben, gibt es auch nur die eine Drehung, bzw. das Drehmoment um die Drehachse. Allgemein definiert man:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (8.19)$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos \alpha \\ 0 \\ -\frac{l}{2} \sin \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ BIl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -BIl \frac{l}{2} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.20)$$

$$\vec{M}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{l}{2} \cos \alpha \\ 0 \\ \frac{l}{2} \sin \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -BIl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -BIl \frac{l}{2} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_2 + \vec{M}_4 = -B I l^2 \cos(\alpha) \vec{e}_y \quad (8.22)$$

(c)

Das magnetische moment ist gerade so definiert, dass:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (8.23)$$

Für eine geschlossene Leiterschleife gilt:

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A} \Rightarrow \vec{M} = (I\vec{A}) \times \vec{B} \quad (8.24)$$

Setzt man noch für $A = l^2 \cdot \cos(\alpha)$ ein, so erhält man mit $\vec{M} = -B I l^2 \cos(\alpha) \vec{e}_y$ das Ergebnis aus dem Teil b).

8.4 Aufgabe 31

Für alle folgenden Teile entnehmen wir aus der Skizze $y = 0.2 \text{ m}$, $x = 0.2 \text{ m}$ und folglich $A = x \cdot y = 0.04 \text{ m}^2$.

(a)

Allgemein gilt $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, in unserem Fall aufgrund des homogenen konstanten Magnetfeldes und der einfachen Fläche vereinfacht sich dies zu

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = \mu \cdot H \cdot A \cdot \cos(\alpha(t)) \quad (8.25)$$

Da hier zunächst bei $t = 0$ auch $\alpha = 0$ gilt, berechnet sich der Fluss zu diesem Zeitpunkt zu

$$\Phi = \mu \cdot H \cdot A \quad (8.26)$$

$$= 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ Vs} \quad (8.27)$$

(b)

Für allgemeine t ist in unserem Fall der Winkel α zwischen $\vec{B}$ und $\vec{A}$ zeitabhängig und bedingt somit die Zeitabhängigkeit des magnetischen Flusses. Es gilt

8 Blatt 8

$$\alpha(t) = \omega \cdot t = 2\pi f \cdot t \quad (8.28)$$

$$\Rightarrow \Phi = \mu \cdot H \cdot A \cdot \cos(2\pi f \cdot t) \quad (8.29)$$

Mit dem Induktionsgesetz $U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi$ folgt für die Induktionsspannung

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\mu \cdot H \cdot A \cdot \cos(2\pi f \cdot t) \quad (8.30)$$

$$= \mu H A \cdot 2\pi f \cdot \sin(2\pi f t) \quad (8.31)$$

$$= U_{max} \cdot \sin(2\pi f t) \quad (8.32)$$

Mit Spannungsamplitude $U_{max} = 2\mu\pi H A f = 0.79 \text{ V}$.

(c)

Bei einem über den gesamten Raum verteilten homogenen Magnetfeld wäre der Fluss durch die Leiterschleife, da ohne Drehung $\alpha = \text{const.}$, zeitlich konstant und die induzierte Spannung $U_{ind} = 0$.

Außerdem könnte sich die Leiterschleife bei einem räumlich begrenzten Feld aus dem Magnetfeld heraus bewegen, wodurch die durchflossene Fläche A zeitlich variabel wäre:

$$\vec{A}(t) = A(t) \cdot \vec{e}_z.$$

Betrachten wir einen solchen Fall mit konstanter Geschwindigkeit $v_x = \text{const.}$ ergibt sich:

$$A(t) = y \cdot x(t) = 0,2 \cdot (0,2 - v_x \cdot t) \text{ m}^2 \quad (8.33)$$

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}(\mu H A(t)) \quad (8.34)$$

$$= 0,2 \cdot \mu H A \cdot v_x \quad (8.35)$$

8.5 Aufgabe 32

(a)

$$\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad (8.36)$$

Magnetische Flussdichte eines Leiters:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \quad (8.37)$$

8 Blatt 8

Die Fläche berechnet sich zu:

$$A = d \cdot y \quad (8.38)$$

Demnach:

$$dA = d \cdot dy \quad (8.39)$$

Wir setzen ein:

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I d}{2\pi y} dy \quad (8.40)$$

$$= \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \quad (8.41)$$

Wir wissen:

$$I = ct \quad (8.42)$$

$$\dot{\Phi} = -U \quad (8.43)$$

Wir leiten ab:

$$\dot{\Phi} = -U \quad (8.44)$$

$$= \frac{\mu_0 c d}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \quad (8.45)$$

$$|I_S| = \frac{|U|}{R_S} \quad (8.46)$$

$$= \frac{\mu_0 c d}{2\pi R_S} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \right) \quad (8.47)$$

Der induzierte Strom in der Leiterschleife ist konstant, solange der Strom in dem geraden Leiter mit der Zeit ansteigt. Erfüllt er dieses Kriterium nicht mehr, so ist der Strom in der Leiterschleife null.

Der Strom in dem Leiter erzeugt ein Magnetfeld. In der Leiterschleife entsteht ein dem entgegen gerichtetes Magnetfeld. Somit muss der Strom in der Leiterschleife auch entgegen dem Strom in dem Leiter gerichtet sein.

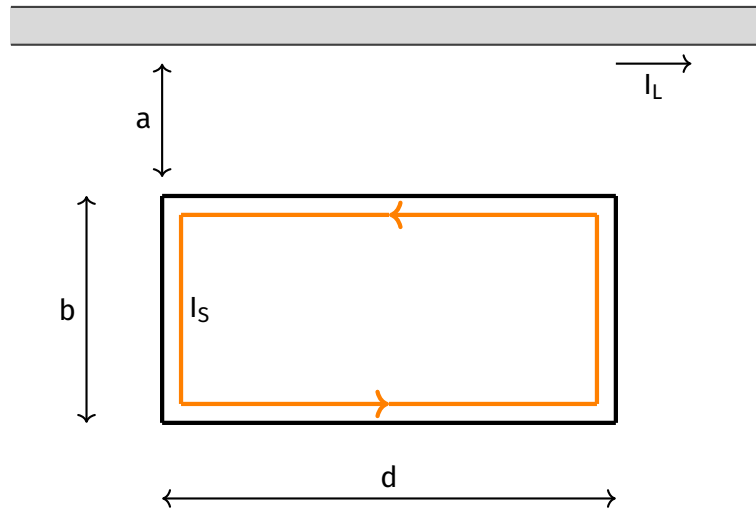
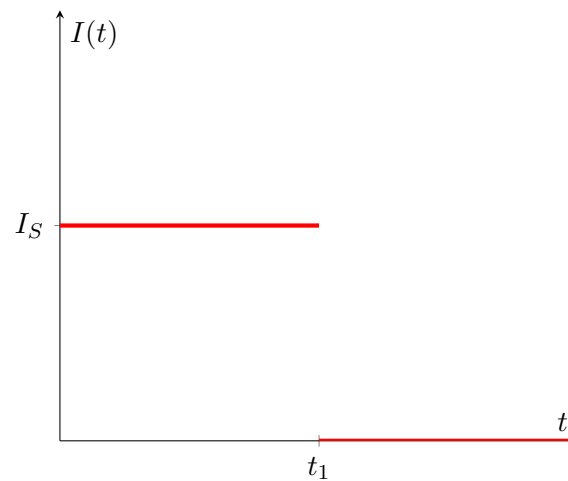


Abbildung 8.2: Skizze

Abbildung 8.3: Zeitlicher Verlauf der Stromstärke I_S **(b)**

Der Leiter baut ein Magnetfeld auf. Dieses Magnetfeld wirkt auf die sich in der Leiterschleife befindenden Elektronen. Man bezeichnet diese Kraft mit dem Fachterminus der Lorentzkraft. Die Kräfte auf die Querseiten heben sich jeweils gegenseitig auf. Die Kräfte, welche auf die Längsseiten wirken, zeigen jeweils in das Innere der Leiterschleife. Für die Längsseiten ist das B-Feld konstant. Insgesamt richtet sich die Kraft aber vom Leiter weg, weil die wirkende Kraft auf die obere Längsseite stärker ist (näher am Leiter) als die Kraft auf die untere Längsseite.

9 Blatt 9

9.1 Aufgabe 33

Gegebene Größen:

$m = 1200 \text{ kg}$, $N = 26$, $\mu_r = 1000$, $l = 0,25 \text{ m}$, $b_1 = 0,2 \text{ m}$, $b_2 = 0,35 \text{ m}$, $b_3 = 0,5 \text{ m}$

$$\oint H ds = NI \quad (9.1)$$

Allgemeine Formel für die magnetische Feldstärke einer langgestreckte Spule:

$$H = \frac{IN}{s} \quad (9.2)$$

Äußere und innere magnetische Feldstärke ergibt die Amperewindungszahl:

$$H_a d + H_i l = NI \quad (9.3)$$

Die innere und äußere Flussdichte sind gleich:

$$B_a = B_i \quad (9.4)$$

Die äußere Feldstärke ergibt sich aus der inneren Feldstärke und der Permeabilität des Eisenkerns:

$$H_a = \mu_r H_i \quad (9.5)$$

Kombination aus (9.5) und (9.3):

$$NI = H_a \left(\frac{l}{\mu_r} + d \right) \quad (9.6)$$

Allgemein gilt:

$$B = \mu_0 H \quad (9.7)$$

$$B_{a1} = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l}{\mu_r} + d} \quad (9.8)$$

$$0 = \int B dA = B_{a2} \cdot A_2 + B_{a1} \cdot A_1 \quad (9.9)$$

Die Flächen berechnen sich folgendermaßen:

$$A_1 = \pi b_1^2 \quad (9.10)$$

$$A_2 = \pi(b_3^2 - b_2^2) \quad (9.11)$$

9 Blatt 9

Nach (9) gilt ebenso:

$$B_{a2} = -B_{a1} \frac{A_1}{A_2} \quad (9.12)$$

Allgemein berechnet sich die Induktivität einer Spule so:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{s} \quad (9.13)$$

Bestimmung der magnetischen Feldenergie:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2 \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{2} V B H \quad (9.14)$$

$$= \frac{1}{2} B N A I \quad (9.15)$$

$$= \frac{V B^2}{2\mu_0} \quad (9.16)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} (B_{a1}^2 A_1 d + B_{a2}^2 A_2 d) \quad (9.17)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} B_{a1}^2 d A_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \quad (9.18)$$

$$= \frac{N^2 I^2 d A_1 \mu_0^2}{2\mu_0 \left(\frac{l}{\mu_r} + d\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \quad (9.19)$$

Wir leiten ab:

$$\frac{dW_{\text{mag}}}{d(d)} = F \quad (9.20)$$

$$= \frac{N^2 I^2 A_1 \mu_0 \mu_r}{2l^2} \cdot \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \quad (9.21)$$

$$= mg \quad (9.22)$$

Wir formen um:

$$I = \sqrt{\frac{2mg l^2 A_2}{N^2 A_1 \mu_r^2 \mu_0 (A_1 + A_2)}} \quad (9.23)$$

Nun setzen wir ein:

$$I \approx 3,24 \text{ A} \quad (9.24)$$

9.2 Aufgabe 34

Gegeben: $l = 40 \text{ mm}$, $d = 2 \text{ mm}$, $\rho_m = 8,96 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho = 1,78 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$

(a)

Gesucht: Höhe h , aus der der Stab losgelassen werden muss, damit er das Feld mit konstanter Geschwindigkeit durchquert.

9 Blatt 9

Durch die Flächenänderung kommt es zu einer Induktionsspannung. Die Flächenänderung kann aufgrund der konstanten Geschwindigkeit wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dA}{dt} = l \cdot v \quad (9.25)$$

Damit folgt die bekannte Formel für die Induktionsspannung eines bewegten Leiters:

$$U_{\text{ind}} = -B \cdot l \cdot v \quad |U_{\text{ind}}| = B \cdot l \cdot v \quad (9.26)$$

Infolge dieser induzierten Spannung kommt es nach dem Ohm'schen Gesetz zu einem Strom.

$$I = \frac{U}{R} \quad R = \rho \frac{l}{A} \quad A = \pi \frac{d^2}{4} \quad (9.27)$$

Durch diesen Stromfluss entsteht wiederum eine Lorentzkraft

$$F_L = I \cdot l \cdot B \quad (9.28)$$

Damit der Kupferstab innerhalb des Feldes mit konstanter Geschwindigkeit fällt, muss die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte null sein. D.h. Lorentzkraft und Gewichtskraft müssen betraglich gleich groß, aber genau entgegengesetzt sein.
Die Gewichtskraft ist gegeben durch

$$F_G = m \cdot g = l \cdot A \cdot \rho_m \cdot g \quad (9.29)$$

Einsetzen und Gleichsetzen liefert:

$$I \cdot l \cdot B = \frac{U_{\text{ind}}}{\rho \cdot \frac{l}{A}} \cdot l \cdot B = A \frac{B^2 l^2 v}{\rho \cdot l} = l \cdot A \cdot \rho_m \cdot g \quad (9.30)$$

$$\frac{B^2 v}{\rho} = \rho_m \cdot g \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\rho \rho_m g}{B^2} \quad (9.31)$$

Es kann angenommen werden, dass zu Beginn auf Höhe h $v(0) = 0$ ist.

$$v(t) = -gt, \quad h(t) = h - \frac{g}{2} t^2 \quad (9.32)$$

Aus (9.32) folgt für t :

$$t = \frac{\rho \rho_m}{B^2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{g}{2} \frac{\rho^2 \rho_m^2}{B^4} \approx 0,15 \text{ m} \quad (9.33)$$

(b)

$$U_{\text{ind}} = Blv = \frac{\rho \rho_m g l}{B} \approx 2,09 \cdot 10^{-3} \text{ V} \quad (9.34)$$

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{\rho \cdot \frac{l}{A}} \approx 9,22 \text{ A} \quad (9.35)$$

$$F_L = IlB \approx 0,011 \text{ N} \quad (9.36)$$

$$P = U_{\text{ind}} \cdot I \approx 0,0193 \text{ W} \quad (9.37)$$

(c)

Die Lorentzkraft soll nach oben wirken, das B-Feld geht in die Zeichenebene hinein. Somit folgt mit der RHR, dass der Strom nach rechts, bzw. die Elektronen nach links fließen müssen.

9.3 Aufgabe 35

Gegeben: $N = 3000$, $A = 0,0001 \text{ m}$, $I_0 = 70,71 \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $r = 0,4 \text{ m}$. Wir gehen davon aus, dass zum Zeitpunkt $t_0 = 0 \text{ s}$ die Phasenverschiebung $\phi = 0$ ist.

(a)

Für einen stromdurchflossenen Leiter gilt:

$$H = \frac{I}{2\pi \cdot r} \quad (9.38)$$

Allgemein gilt auf für die Stromstärke im Wechselstromkreis:

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (9.39)$$

Mit dem Zusammenhang für die magnetische Feldstärke und der magnetischen Flussdichte folgt:

$$B = \mu_0 \cdot H \Rightarrow B(t) = \frac{\mu_0 \cdot I(t)}{2\pi \cdot r} \quad (9.40)$$

Die maximale Amplitude wird unter anderem am Zeitpunkt $t = 0$ erreicht:

$$B_0 = B(t_0) = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2\pi \cdot r} = 3,5355 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (9.41)$$

(b)

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (9.42)$$

$$\Phi = N \cdot \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\alpha) \quad (9.43)$$

Damit $|U_{\text{ind}}|$ den größtmöglichen Wert annimmt, muss $\vec{B} \parallel \vec{A}$ bzw. $\vec{B}(t) \perp \vec{I}(t)$ sein.

(c)

Es gilt:

$$\Phi = N \cdot \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = N \cdot B \cdot A = N \cdot A \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t)}{2\pi \cdot r} \quad (9.44)$$

Die Ableitung lautet dann:

$$\dot{\Phi} = N \cdot A \cdot \omega \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t)}{2\pi \cdot r} = N \cdot A \cdot f \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t)}{r} = -U_{\text{ind}} \quad (9.45)$$

So ergibt sich für die maximale Spannung U_0 :

$$U_0 = U_{\text{ind}}(t_0 = 0) = -N \cdot A \cdot f \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_0}{r} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 3,33 \text{ mV} \quad (9.46)$$

9.4 Aufgabe 36

(a)

Betrachten wir eine Fläche A , die der Elektronenstrahl durchläuft, so gilt für den Fluss des magnetischen Feldes $\vec{B}$ durch diese Fläche bei einem zeitlichen B-Feld ebenfalls eine Zeitabhängigkeit. Nach dem Induktionsgesetz wird am Rand L dieser Fläche ein ringförmiges E-Feld induziert gemäß

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_A \vec{B} d\vec{A} \quad (9.47)$$

Durch dieses Feld werden geladene Teilchen somit beschleunigt und ergänzend durch die Lorentzkraft des B-Feldes auf bewegte geladene Teilchen als Zentripetalkraft auf einer Kreisbahn gehalten.

(b)

Betrachten wir den Aufbau aus der Skizze von oben, so muss das B-Feld des durch den Kreisstrom der Teilchen in $\vec{E}$ erzeugte B-Feld dem äußeren gerade entgegengesetzt sein (Lenzsche Regel). Dementsprechend muss die technische Stromrichtung (positive Teilchen wie das Positron) entgegen dem Uhrzeigersinn verlaufen, negative Teilchen (wie das Elektron) gerade umgekehrt im Uhrzeigersinn.

Alternativ könnte auch über die Richtung der Lorentzkraft, die als Zentripetalkraft fungiert und somit zum Kreismittelpunkt gerichtet sein muss, argumentiert werden - dies führt zum gleichen Ergebnis. Denn der B-Feld zeigt von oben nach unten und mit der Richtung der Lorentzkraft lässt sich mit der Linke-Hand-Regel (LHR) die Richtung für die Elektronen und mit der Rechte-Hand-Regel (RHR) die Richtung für "positive" Ladungen bestimmen.

(c)

Wie in (b) bereits erwähnt, wirkt nach der Lenzschen Regel das B-Feld des induzierten E-Feldes der Ursache der Induktion, d.h. der Flussänderung entgegen.

Zur Beschleunigung der Teilchen wollen wir ein zunehmendes E-Feld, d.h. auch dessen nach oben gerichtetes B-Feld soll zunehmen. Das äußere Feld $\vec{B}_0$ muss folglich zunehmen, sodass dieser Zunahme durch eine Zunahme des entgegengesetzten Feldes entgegen gewirkt wird.

(d)

Grund für die Kreisbahn ist die Lorentzkraft, es muss folglich gelten (da $\vec{v}$ und $\vec{E}$ senkrecht zu $\vec{B}$)

$$F_Z = \frac{mv(t)^2}{R} = q \cdot vB = F_L \quad (9.48)$$

$$\Rightarrow p(t) = mv(t) = qBR \quad (9.49)$$

(Zusatz)

Wir wissen grundsätzlich mit der Bedingung $\frac{d}{dt}R = 0$

$$F = q \cdot E(t) = \frac{dp(t)}{dt} \quad (9.50)$$

Mit dem Induktionsgesetz können wir E bestimmen

9 Blatt 9

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 2\pi R \cdot E(t) = -\frac{d}{dt} \oint_A \vec{B} d\vec{A} \quad (9.51)$$

$$= -\frac{d}{dt} \bar{B} \cdot A \quad (9.52)$$

$$= -\frac{d}{dt} \bar{B} \cdot \pi R^2 \quad (9.53)$$

$$\Rightarrow |E(t)| = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{B} \cdot R \quad (9.54)$$

$$(9.55)$$

Mit (9.49) und (9.50) folgt

$$\frac{dp(t)}{dt} \stackrel{(9.49)}{=} qR \frac{dB}{dt} \stackrel{(9.50)}{=} q|E(t)| \quad (9.56)$$

$$\Rightarrow \frac{dB}{dt} \stackrel{(9.54)}{=} \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (9.57)$$

Integrieren mit $B(t=0) = 0$ ergibt die gesuchte Bedingung

$$B(t) = \frac{1}{2} \bar{B}(t) \quad (9.58)$$

10 Blatt 10

10.1 Aufgabe 37

Gegebene Werte: $v = 69,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $d = 1,435 \text{ m}$, $B = 6,06 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$, $A = 0,01 \text{ m}^2$, $\rho_{\text{Fe}} = 10^{-7} \Omega\text{m}$

a)

Wir kennen das Induktionsgesetz für bewegte Leiter, was besagt:

$$U_{\text{ind}} = -B \cdot d \cdot v = -6,04 \cdot 10^{-3} \text{ V} \quad (10.1)$$

Wir wissen, dass wir uns mit dem Zug von Süden nach Norden bewegen und davon ausgehen, dass das Magnetfeld senkrecht aus der Ebene zeigt. Dadurch folgt, dass der Spannung vom Osten nach Westen zeigt. (In diese Richtung fließen nach der LHR die Elektronen durch die Lorentzkraft)

b)

Für den Strom gilt:

$$U_{\text{ind}} = I \cdot R \Leftrightarrow I = \frac{U_{\text{ind}}}{R} \quad (10.2)$$

Für den Widerstand folgt mit $l = 2 \cdot 10.000 \text{ m}$

$$R = \rho_{\text{Fe}} \cdot \frac{l}{A} = 0,2 \Omega \quad (10.3)$$

Somit folgt:

$$I = -0,0302 \text{ A} \quad (10.4)$$

10.2 Aufgabe 38

(a)

Bei einer Reihenschaltung wissen wir dank der 1. Kirchhoffschen Regel:

$$I_{ges} = I_1 = I_2 \quad (10.5)$$

Ergänzend muss über L_1 und L_2 insgesamt betragsmäßig gerade die Eingangsspannung abfallen:

$$U_{ges} = U_1 + U_2 \quad (10.6)$$

Das Induktionsgesetz verbindet nun gerade die auftretenden Spannungen und Ströme (Wechselspannung):

$$U = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (10.7)$$

$$\Rightarrow -U_{ges} = L_{ges} \cdot \frac{dI_{ges}}{dt} \quad (10.8)$$

$$= L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} \quad (10.9)$$

$$= (L_1 + L_2) \cdot \frac{dI_{ges}}{dt} \quad (10.10)$$

$$\Rightarrow L_{ges} = L_1 + L_2 \quad (10.11)$$

(b)

Bei einer Parallelschaltung wissen wir dank der 2. Kirchhoffschen Regel:

$$U_{ges} = U_1 = U_2 \quad (10.12)$$

Hier teilen sich nun im Gegensatz zu (a) die Ströme auf:

$$I_{ges} = I_1 + I_2 \quad (10.13)$$

Es gilt weiterhin mit dem Induktionsgesetz:

$$\frac{U}{L} = -\frac{dI}{dt} \quad (10.14)$$

$$-\frac{dI_{ges}}{dt} = -\left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}\right) \quad (10.15)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{ges}}{L_{ges}} = \frac{U_1}{L_1} + \frac{U_2}{L_2} \quad (10.16)$$

$$= U_{ges} \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \quad (10.17)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad (10.18)$$

10.3 Aufgabe 39

(a)

Den ohmschen Widerstand können wir zunächst „klassisch“ aus den Werten bei Anlegen einer Gleichspannung ermitteln:

$$R = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = 1.64 \, \Omega \quad (10.19)$$

(b)

Analog zu (a) können wir den Scheinwiderstand $Z = |Z|$ (hier betragsmäßig) aus den Werten bei Anlegen einer Wechselspannung bestimmen ($\tilde{U}$, $\tilde{I}$ werden hier als Effektivwerte (quadratischer Mittelwert) aufgefasst):

$$Z = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = 5.03 \, \Omega \quad (10.20)$$

(c)

Schlussendlich lässt sich mit den ersten beiden Aufgabenteilen auch die Induktivität bestimmen, da diese mit dem Blindwiderstand X

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} \quad (10.21)$$

zusammenhängt gemäß

$$L = \frac{X}{2\pi f} \quad (10.22)$$

$$= \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f} \quad (10.23)$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\tilde{U}^2}{\tilde{I}^2} - \frac{\bar{U}^2}{\bar{I}^2}}}{2\pi f} \quad (10.24)$$

$$= 0.015 \, \text{H} \quad (10.25)$$

10.4 Aufgabe 40

Gegebene Größen: $U_0 = 5 \text{ V}$, $\omega = 100 \frac{1}{\text{s}}$, $R = 100 \Omega$, $C = 50 \cdot 10^{-6} \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$

Gegebene Formel: $U_G(t) = U_0 \sin(\omega t)$

(a)

Gesucht: Qualitativer Verlauf von $U(t)$ und $I_x(t)$ für die drei Fälle.

(Um die Graphen zu plotten wurden die Werte für die Amplitude dennoch eingesetzt)

Die Spannung ist bereits gegeben als:

$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) = 5 \text{ V} \cdot \sin(\omega t) \quad (10.26)$$

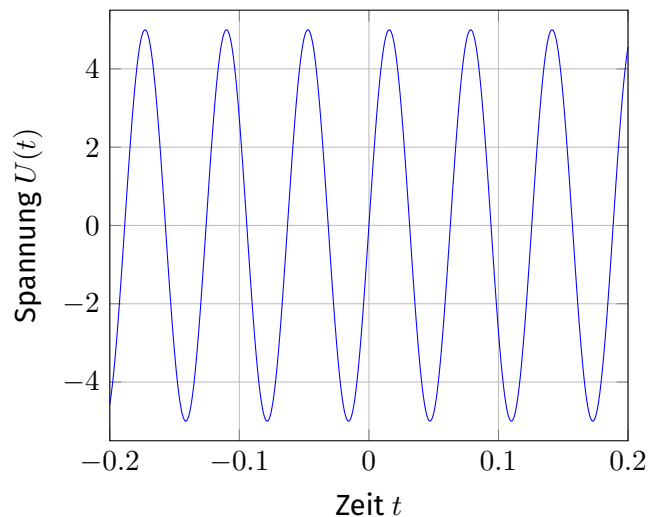


Abbildung 10.1: Spannung $U(t)$

Die allgemeine Differentialgleichung ist aus der Vorlesung bekannt:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U_0 \sin(\omega t) \quad (10.27)$$

Daraus ergibt sich:

(i) Widerstand mit $R = 100 \, \Omega$

$$R\dot{q} = U_0 \sin(\omega t) \quad (10.28)$$

$$\Rightarrow RI = U_0 \sin(\omega t) \quad (10.29)$$

$$\Rightarrow I = \underbrace{\frac{U_0}{R}}_{I_R} \sin(\omega t) = \underbrace{I_R}_{0,05 \text{ A}} \sin(\omega t) \quad (10.30)$$

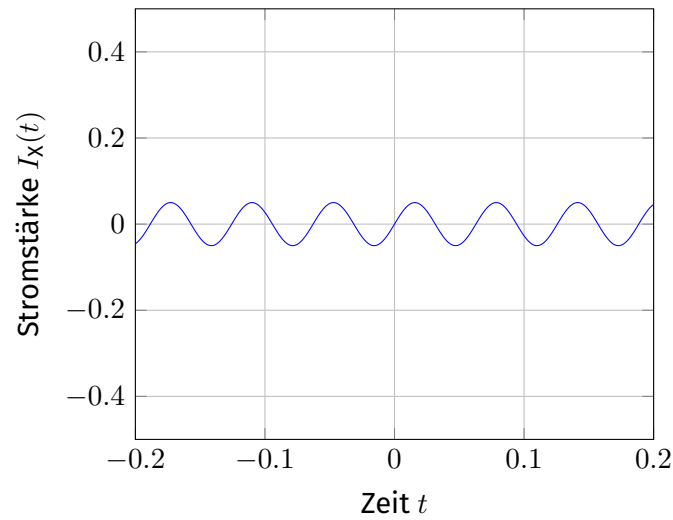


Abbildung 10.2: Verlauf der Stromstärke $I_X(t)$

(ii) Kapazität mit $C = 50 \, \mu\text{F}$

$$\frac{Q}{C} = U_0 \sin(\omega t) \quad (10.31)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{C} \right) = \frac{d}{dt} (U_0 \sin(\omega t)) \quad (10.32)$$

$$\frac{1}{C} \cdot \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{=I} = U_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad (10.33)$$

$$\Rightarrow I = U_0 \cdot C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \quad (10.34)$$

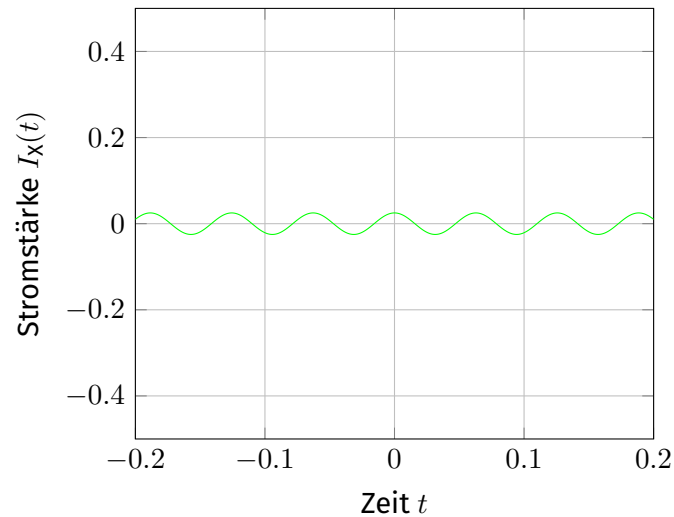


Abbildung 10.3: Verlauf der Stromstärke $I_X(t)$

(iii) Induktivität mit $L = 1 \text{ H}$

$$L \frac{dI}{dt} = U_0 \sin(\omega t) \quad (10.35)$$

$$dI = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t) dt \quad (10.36)$$

$$\Rightarrow I = \frac{U_0}{L} \int \sin(\omega t) dt \quad (10.37)$$

$$I = - \underbrace{\frac{U_0}{\omega L}}_{I_L} \cos(\omega t) \quad (10.38)$$

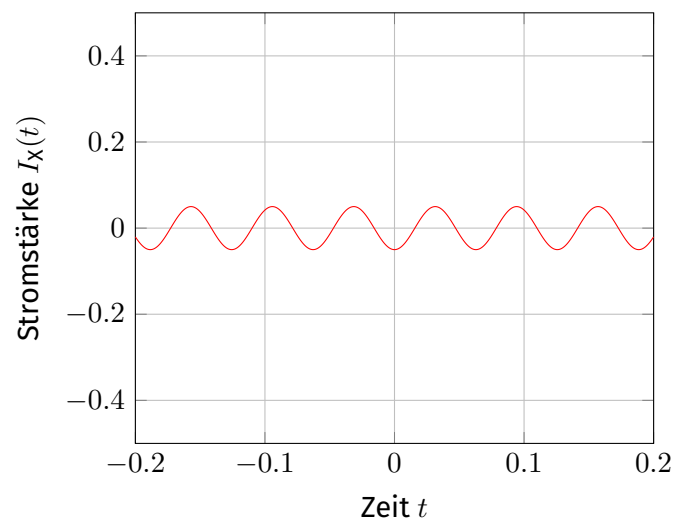


Abbildung 10.4: Verlauf der Stromstärke $I_X(t)$

(b)

Allgemein gilt: Amplitude des Stromes:

$$\tilde{I}_X = \frac{\tilde{U}_X}{X} \quad (10.39)$$

Effektivwert des Stromes:

$$I_{\text{eff}} = \frac{\tilde{I}_X}{\sqrt{2}} \quad (10.40)$$

Gemittelte Wechselstromleistung:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \tilde{U}_X \tilde{I}_X \quad (10.41)$$

Es gilt:

$$-U_0 = \tilde{U}_{X_R} \quad (10.42)$$

$$= \tilde{U}_{X_C} \quad (10.43)$$

$$= \tilde{U}_{X_L} \quad (10.44)$$

Denn:

$$U_G(t) + U_X(t) = 0 \quad (10.45)$$

(i) Widerstand mit $R = 100 \, \Omega$

$$X_R = R \quad (10.46)$$

Es folgt:

$$\tilde{I}_{X_R} = \frac{\tilde{U}_{X_R}}{X_R} = -0,05 \, \text{A} \quad (10.47)$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{\tilde{I}_{X_R}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{40} \, \text{A} \quad (10.48)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \tilde{U}_{X_R} \tilde{I}_{X_R} = \frac{1}{8} \, \text{W} = 0,125 \, \text{W} \quad (10.49)$$

(ii) Kapazität mit $C = 50 \, \mu\text{F}$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (10.50)$$

Es folgt:

$$\tilde{I}_{X_C} = \frac{\tilde{U}_{X_C}}{X_C} = -\frac{1}{40} \text{ A} \quad (10.51)$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{\tilde{I}_{X_C}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{80} \text{ A} \quad (10.52)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \tilde{U}_{X_C} \tilde{I}_{X_C} = \frac{1}{16} \text{ W} = 0,0625 \text{ W} \quad (10.53)$$

(iii) Induktivität mit $L = 1 \text{ H}$

$$X_L = \omega L \quad (10.54)$$

Es folgt:

$$\tilde{I}_{X_L} = \frac{\tilde{U}_{X_L}}{X_L} = -0,05 \text{ A} \quad (10.55)$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{\tilde{I}_{X_L}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{40} \text{ A} \quad (10.56)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \tilde{U}_{X_L} \tilde{I}_{X_L} = \frac{1}{8} \text{ W} = 0,125 \text{ W} \quad (10.57)$$

(c)

Gesucht: Gesamtimpedanz und Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung für eine Reihenschaltung von R, C und L.

Für die Gesamtimpedanz ergibt sich bei Betrachtung des Zeigerdiagramms nach Pythagoras:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \approx 141,42 \, \Omega \quad (10.58)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (10.59)$$

$$\tan(\varphi) = -1 \quad (10.60)$$

$$\varphi = -45^\circ = -\frac{\pi}{4} \quad (10.61)$$

So sieht die dazu entsprechende Skizze aus:

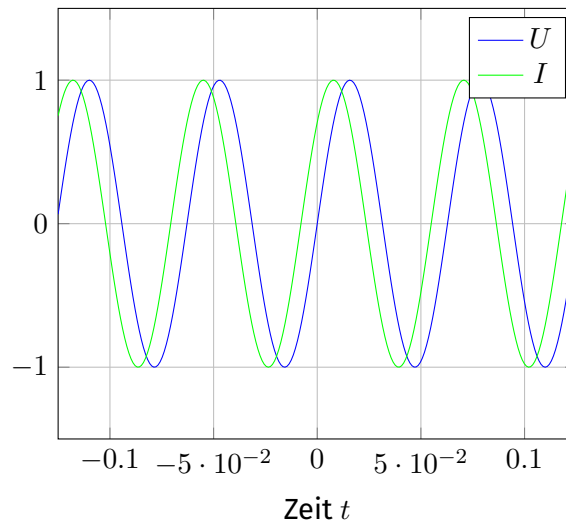


Abbildung 10.5: Skizze der Phasenverschiebung mit normierten Amplituden

10.5 Aufgabe 41

Gegeben: Es liegt ein Schwingkreis, bestehend aus einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule vor.

(a)

Gesucht: DGL für die Spannung am Kondensator mit und ohne der Anregung.

Wir nutzen hierfür einen leicht anderen Weg, als wenn wir die Differentialgleichung für die Stromstärke herleiten würden. Die Ähnlichkeiten der beiden Ansätze sind relativ leicht zu erkennen.

Über den Kondensator gilt allgemein folgender Zusammenhang:

$$Q = C \cdot U_C \quad (10.62)$$

Wir können außerdem sagen, dass hier die Kapazität $C = \text{const}$ ist, da wir die Eigenschaften des Kondensators nicht verändern. Wenn wir nun die Gleichung (10.62) nun nach der Zeit ableiten, erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (C \cdot U_C) \quad (10.63)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{\frac{dC}{dt} \cdot U_C}_{=0} + C \cdot \frac{dU_C}{dt} \quad (10.64)$$

$$I = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \quad (10.65)$$

Mit dieser Information können wir nun die Differentialgleichungen aufstellen.

(i) Ohne Anregung

Wir können die folgende Gleichung aufstellen und uns zur Nutzen machen, dass in der Reihenschaltung, auch Serienschaltung genannt, der Strom $I = \text{const}$ ist.

$$0 = U_L + U_R + U_C \quad (10.66)$$

$$= L \cdot \dot{I} + R \cdot I + U_C \quad (10.67)$$

$$\stackrel{(10.62)}{=} L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + R \cdot C \cdot \dot{U}_C + U_C \quad (10.68)$$

$$\Rightarrow 0 = \ddot{U}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C \quad (10.69)$$

Mit der letzten Umformung können wir nun feststellen, dass wir eine Gleichung erhalten, die der Differentialgleichung der Stromstärke sehr ähnlich ist.

(ii) Mit Anregung

Der Ansatz erfolgt analog zum Ansatz ohne Anregung.

$$U_G = U_L + U_R + U_C \quad (10.70)$$

$$= L \cdot \dot{I} + R \cdot I + U_C \quad (10.71)$$

$$\stackrel{(10.62)}{=} L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + R \cdot C \cdot \dot{U}_C + U_C \quad (10.72)$$

$$\Rightarrow \frac{U_G}{L \cdot C} = \ddot{U}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{U}_C + \frac{1}{L \cdot C} \cdot U_C \quad (10.73)$$

(b)

Das System charakterisieren die Parameter R, C, L.

(i) Ohne Anregung

Erinnert an den gedämpften linearen harmonischen Oszillator ohne äußere Kraft

$$0 = \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x \quad (10.74)$$

Somit stehen folgende Größen in Analogie zueinander: Dämpfungskonstante (durch Parameter R, L repräsentiert)

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (10.75)$$

Eigenfrequenz (durch Parameter L, C repräsentiert)

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (10.76)$$

Lösungsansatz:

$$U_C(t) = A \cdot e^{\lambda t} \quad (10.77)$$

Daraus folgt mit der Anwendung der PQ-Formel:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (10.78)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{LC}\right)^2} \quad (10.79)$$

Allgemeine Lösung:

$$U_C(t) = a_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + a_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (10.80)$$

Für die schwache Dämpfung:

$$\beta < \omega_0 \quad (10.81)$$

$$U_C(t) = e^{-\beta t} \left(U_{C_0} \cos(\omega t) + \frac{\dot{U}_{C_0} + \beta U_{C_0}}{\omega} \sin(\omega t) \right) \quad (10.82)$$

Für die starke Dämpfung:

$$\beta > \omega_0 \quad (10.83)$$

$$U_C(t) = U_{C_0} \left(\cosh(\omega t) + \frac{\beta + \frac{\dot{U}_{C_0}}{U_{C_0}}}{\omega} \sinh(\omega t) \right) e^{-\beta t} \quad (10.84)$$

Für die kritische Dämpfung:

$$\beta = \omega_0 \quad (10.85)$$

$$U_C(t) = e^{-\beta t} (U_{C_0} + (\dot{U}_{C_0} + \beta \cdot U_{C_0}) \cdot t) \quad (10.86)$$

Es ist davon auszugehen, dass $\dot{U}_{C_0} = 0$. Wichtige Anmerkung: Der Einfachheit halber stehen oben β und ω_0 drin.

(ii) Mit Anregung

Erinnert an den gedämpften linearen harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft:

$$F(t) = \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x \quad (10.87)$$

In Analogie:

$$F(t) = U_G(t) \quad (10.88)$$

Geht man davon aus, dass:

$$U_G(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (10.89)$$

So ergibt sich als partikuläre Lösung:

$$U_{C,S}(t) = |A| \cos(\bar{\omega}t + \bar{\phi}) \quad (10.90)$$

Mit:

$$|A| = \frac{U_0}{L\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}} \quad (10.91)$$

$$\tan(\bar{\phi}) = \frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2} \quad (10.92)$$

Die Lösung ergibt sich aus der homogenen Lösung (von oben) und der partikulären Lösung. Nach einer Einschwingzeit folgt der Oszillator aber nur noch der partikulären Lösung.

Mögliche Zahlenwerte für die Bauteile:

Gegebene Größen:

$$R = 0, f_0 = 10^3 \text{ Hz}$$

$$0 = \ddot{U} + \frac{0}{L} \cdot \dot{U} + \frac{1}{LC} \cdot U \quad (10.93)$$

$$= \ddot{U} + \frac{1}{LC} \cdot U \quad (10.94)$$

Also gilt (Kann man auch oben schon rauslesen):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.95)$$

$$= 2\pi f_0 \quad (10.96)$$

Daraus folgt:

$$LC = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2} \quad (10.97)$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi^2 s^2} \quad (10.98)$$

Eine mögliche Kombination wäre:

$$L = 0,1 \text{ H}$$

$$C = 0,2533029591 \mu\text{F}$$

(c)

Für den aperiodischen Grenzfall gilt:

Im Oszillator:

$$\beta = \omega_0 \quad (10.99)$$

Hier:

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10.100)$$

Deshalb:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10.101)$$

11 Blatt 11

11.1 Aufgabe 42

(a)

Da wir nach dem betragsmäßigen Maximum der Spannung am Kondensator suchen, genügt uns eine Berechnung der Beträge der einzelnen Größen. Da wir eine serielle Schaltung betrachten, fließt durch alle Bauteile der gleiche Strom $|I|$, für den gilt:

$$|\underline{I}| = \frac{U_0}{|\underline{Z}_{ges}|} \quad (11.1)$$

Für die Blindwiderstände gilt

$$X_C = -\frac{1}{\omega_r C} \quad (11.2)$$

$$X_L = \omega_r L \quad (11.3)$$

$$|\underline{Z}_{ges}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} \right)^2} \quad (11.4)$$

$$(11.5)$$

Damit können wir die gesuchte Spannung am Kondensator formulieren als

$$|U_C| = |\underline{I}| \cdot |X_C| \quad (11.6)$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\omega_r C} \quad (11.7)$$

$$= \frac{U_0}{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_r^2 R^2 + \omega_r^4 L^2 - 2\omega_r^2 \frac{L}{C} + \frac{1}{C^2}}} \quad (11.8)$$

Wir suchen das Maximum von $|U_C|$ bezüglich ω_r , d.h.

$$\frac{d}{dt} \frac{U_0}{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_r^2 R^2 + \omega_r^4 L^2 - 2\omega_r^2 \frac{L}{C} + \frac{1}{C}}} = 0 \quad (11.9)$$

$$\frac{U_0}{C} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_r^2 R^2 + \omega_r^4 L^2 - 2\omega_r^2 \frac{L}{C} + \frac{1}{C}}}^3 \cdot \left(2\omega_r R^2 + 4\omega_r^3 L^2 - 4\omega_r \frac{L}{C}\right) = 0 \quad (11.10)$$

$$\Rightarrow 2\omega_r R^2 + 4\omega_r^3 L^2 - 4\omega_r \frac{L}{C} = 0 \quad (11.11)$$

$$(11.12)$$

Für die gesuchte zugehörige Kreisfrequenz gilt folglich

$$4\omega_r^2 L^2 = 4 \cdot \frac{L}{C} - 2R^2 \quad (11.13)$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{2 \cdot L^2} \quad (11.14)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{2 \cdot L^2}} \quad (11.15)$$

$$\omega_r \approx 12758 \frac{1}{s} \quad (11.16)$$

(b)

Allgemein gilt bei Schwingkreisen für den Energieverlust

$$P = R \cdot I^2 \quad (11.17)$$

In unserem Fall gilt somit für den momentanen Verlust

$$P(t) = R \cdot \left(\frac{U_0 \cdot \cos(\omega_r \cdot t)}{|Z_{ges}|} \right)^2 \quad (11.18)$$

$$(11.19)$$

Da der Mittelwert von $\cos^2 = \frac{1}{2}$ ist, folgt für die mittlere Leistung

$$\bar{P} = R \cdot \frac{U_0^2 \cdot \frac{1}{2}}{|Z_{ges}|^2} \quad (11.20)$$

$$= R \cdot \frac{U_0^2 \cdot \frac{1}{2}}{R^2 + \left(\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C}\right)^2} \quad (11.21)$$

$$= 0.039 \text{ W} \quad (11.22)$$

11.2 Aufgabe 43

Gegeben: Es liegt ein Zweipol mit einer Reihenschaltung aus Widerstand R_1 und einer Spule mit der Induktivität L und einer Parallelschaltung aus Widerstand R_2 und Kondensator mit der Kapazität C

(a)

Gegeben: $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, $C = 2 \mu\text{F}$, $f = 100 \text{ Hz}$

Gesucht: Impedanz $Z = R + jX$

Wir unterteilen drei Impedanzen, die in Reihe geschaltet sind, wobei wir die Parallelschaltung als eine Impedanz betrachten:

$$Z_1 = R_1 = 100 \Omega \quad (11.23)$$

$$Z_2 = i\omega L = i \cdot 2\pi f L \approx i \cdot 62,832 \Omega \quad (11.24)$$

$$Z_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + i\omega C} = \frac{R_2 - i \cdot \omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} \approx 262,66 \Omega - i \cdot 99,02 \Omega \quad (11.25)$$

Die Gesamtimpedanz ergibt sich aus der Summe der drei Impedanzen:

$$Z_{ges} = Z_1 + Z_2 + Z_3 \approx 362,66 \Omega - i \cdot 36,19 \Omega \quad (11.26)$$

Daraus folgt, dass $R = 362,66 \Omega$ und $X = -36,19 \Omega$ ist.

(b)

Als Funktionen ergeben sich:

$$R(f) = R_1 + R_2 \left(\frac{1}{1 + 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot R_2^2 \cdot C^2} \right) \quad (11.27)$$

$$X(f) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L - \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_2^2 \cdot C}{1 + 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot R_2^2 \cdot C^2} \right) \quad (11.28)$$

Für $f = 0$ kann einfach eingesetzt werden. Es ergibt sich:

$$Z(f = 0) = R(f = 0) = R_1 + R_2 = 400 \, \Omega \quad (11.29)$$

Für $f \rightarrow \infty$ erhält man logischerweise:

$$Z(f) = R_1 + i \cdot \omega \cdot L \quad (f \rightarrow \infty) \quad (11.30)$$

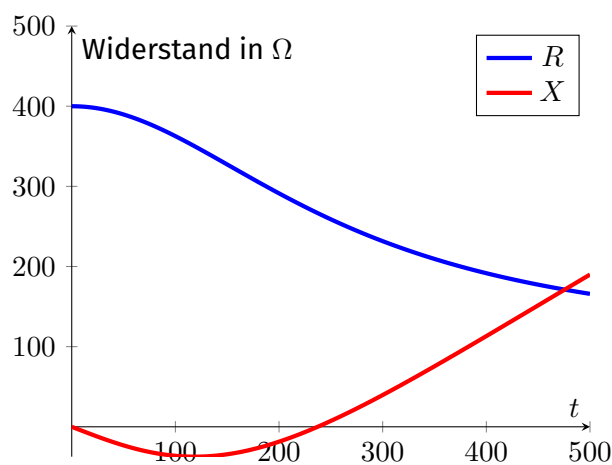


Abbildung 11.1: R und X auf dem Intervall $0 \text{ Hz} \leq f \leq 500 \text{ Hz}$

(c)

Die Phasenverschiebung verschwindet, wenn der Blindwiderstand $X = 0$ ist. So erhalten wir:

$$X(f) \stackrel{(11.28)}{=} 0 \quad (11.31)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} - \frac{1}{R^2 \cdot C^2} \quad (11.32)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{1}{R^2 \cdot C^2}} \quad (11.33)$$

$$\Rightarrow \omega = 1490 \text{ Hz} \quad (11.34)$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 237,14 \text{ Hz} \quad (11.35)$$

11.3 Aufgabe 44

Gegebene Werte: $U_0 = 30 \text{ V}$, $R = 50 \Omega$, $L = 400 \text{ mH}$. Wir betrachten nur die Fälle für $t \geq 0$.

(a)

Mit dem Spannungsgesetz für Reihenschaltungen können wir folgende inhomogene Differentialgleichung aufstellen:

$$U_{\text{ges}}(t) = U_0 = U_{\text{ind}} + U_R \quad (11.36)$$

$$= L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I(t) \quad (11.37)$$

(b)

$$U_0 = L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I(t) \quad | : L \quad (11.38)$$

$$\frac{U_0}{L} = \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I(t) \quad (11.39)$$

Für den homogenen Teil der Differentialgleichung lässt sich mit dem Exponentialansatz folgende Lösung bestimmen, wobei C eine noch zu bestimmende Konstante ist.

$$I_{\text{hom}} = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (11.40)$$

Setzen wir $\frac{dI}{dt} = 0$, so erhalten wir für die spezielle Lösung nach der Termumstellung:

$$I_s = \frac{U_0}{R} \quad (11.41)$$

Somit folgt als zusammengesetzte Lösung:

$$I(t) = I_{\text{hom}} + I_s \quad (11.42)$$

$$= C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R} = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R} \quad (11.43)$$

Da wir zum Zeitpunkt, an dem wir die Spule anschließen, noch keinen Stromfluss haben, so ist $I(t=0) = 0$. Somit ergibt sich dann, dass $0 = C + \frac{U_0}{R}$ ist, sodass die Amplitude $A = C = -\frac{U_0}{R}$ ist. Mit Umformungen ergibt sich:

$$I(t) = I_{\text{hom}} + I_s \quad (11.44)$$

$$= -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R} \quad (11.45)$$

$$= \frac{U_0}{R} \left(-e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + 1 \right) \quad (11.46)$$

$$= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (11.47)$$

Folgende Werte erhalten wir:

$$\text{Amplitude } A = \frac{U_0}{R} = \frac{3}{5} \text{ A} = 0,6 \text{ A} \quad (11.48)$$

$$\text{Zeitkonstante } \tau = \frac{L}{R} = 0,008 \text{ s} = 8 \text{ ms} \quad (11.49)$$

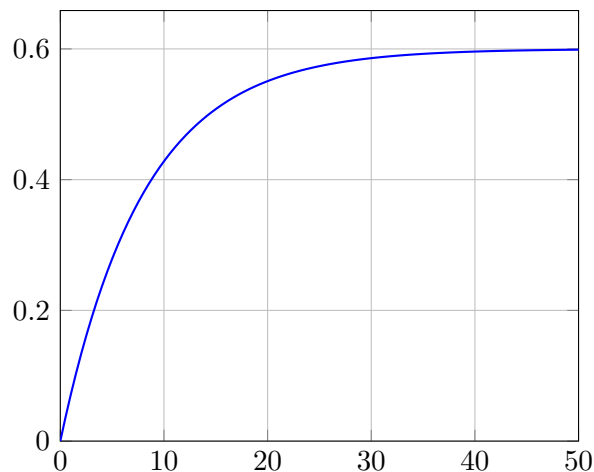


Abbildung 11.2: Skizze von $I(t)$ mit t in ms

11.4 Aufgabe 45

Wir suchen den Verschiebungsstrom I_V .

Zunächst bestimmen wir den elektrischen Fluss:

$$\Phi_{\text{el}} = E \cdot A \quad (11.50)$$

Wir kennen bereits folgende Gleichung für den Plattenkondensator:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \quad (11.51)$$

Dies setzen wir ein:

$$\Phi_{\text{el}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (11.52)$$

Der Verschiebungsstrom ist folgendermaßen definiert:

$$I_V = \varepsilon_0 \cdot \dot{\Phi}_{\text{el}} \quad (11.53)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \Phi_{\text{el}} \quad (11.54)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot \frac{dQ}{dt} \frac{1}{\varepsilon_0} \quad (11.55)$$

$$= \frac{dQ}{dt} \quad (11.56)$$

Dies bedeutet also, dass der Verschiebungsstrom $I_V(t)$ dem zeitabhängigen Strom $I(t)$ entspricht.

Aus einem der vorangegangenen Übungsblätter kennen wir bereits den Entladestrom eines Plattenkondensators:

$$I(t) = -\frac{1}{R} U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11.57)$$

$$= I_V(t) \quad (11.58)$$

12 Blatt 12 (freiwillig)

12.1 Aufgabe 46

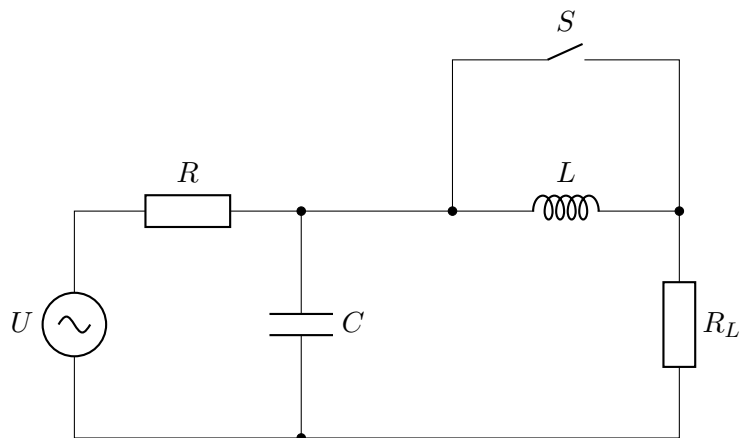


Abbildung 12.1: Schaltkreis der Aufgabe

Gegeben:

$$R = 10 \, \Omega, \quad R_L = 30 \, \Omega, \quad L = 150 \, \text{mH}, \quad C = 8 \, \mu\text{F}, \quad f = 10 \, \text{Hz}, \quad U_0 = 100 \, \text{V}$$

(a)

Ist der Schalter geschlossen, so gilt: $X_L = 0$. Der Strom sucht sich immer den einfachsten Weg. C und R_L sind parallel geschaltet. R und R_L sind in Reihe geschaltet. Es gilt die Formel:

$$Z = R + Z_{\text{parallel}} \quad (12.1)$$

Für Z_{parallel} gilt:

$$\frac{1}{Z_{\text{parallel}}} = \frac{1}{iX_C} + \frac{1}{R_L} \quad (12.2)$$

Wir bilden den Kehrwert:

$$Z_{\text{parallel}} = \frac{R_L iX_C}{iX_C + R_L} \quad (12.3)$$

Und erweitern mit $(iX_C - R_L)$, damit nutzen machen wir uns die dritte binomische Formel zu Nutze:

$$Z_{\text{parallel}} = \frac{R_L X_C^2}{X_C^2 - R_L^2} + \frac{R_L^2 iX_C}{X_C^2 - R_L^2} \quad (12.4)$$

12 Blatt 12 (freiwillig)

Für die Kapazität X_C gilt:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (12.5)$$

$$= -\frac{1}{2\pi f C} \quad (12.6)$$

Nach dem Einsetzen ergibt sich Z zu:

$$Z = 40,00682342 \, \Omega - i \cdot 0,4524922369 \, \Omega \quad (12.7)$$

Bilden wir nun den Betrag:

$$|Z| = \sqrt{(40,00682342 \, \Omega)^2 + (0,4524922369 \, \Omega)^2} \quad (12.8)$$

$$= 40,00938227 \, \Omega \quad (12.9)$$

(b)

Bei geöffnetem Schalter fließt der Strom durch die Spule:

$$X_L = 2\pi f L \quad (12.10)$$

R_L und L sind in Reihe geschaltet. Ansonsten gilt selbiges wie oben.

$$Z = R + Z_{parallel} \quad (12.11)$$

$$\frac{1}{Z_{parallel}} = \frac{1}{iX_C} + \frac{1}{iX_L + R_L} \quad (12.12)$$

Kehrwert:

$$Z_{parallel} = \frac{-X_L X_C + iX_C R_L}{R_L + i(X_L + X_C)} \quad (12.13)$$

Wir erweitern mit $(R_L - i(X_L + X_C))$:

$$Z_{parallel} = \frac{-X_L X_C R_L + X_C R_L (X_L X_C)}{R_L^2 + (X_L + X_C)^2} + i \frac{X_C X_L (X_L + X_C) + X_C R_L^2}{R_L^2 + (X_L + X_C)^2} \quad (12.14)$$

So ergibt sich Z zu:

$$Z = 40,27932622 \, \Omega + i \cdot 9,01086464 \, \Omega \quad (12.15)$$

Nun bilden wir den Betrag und es ergibt sich:

$$|Z| = 41,27492946 \, \Omega \quad (12.16)$$

(c)

Nach der zweiten Kirchhoffschen Regel gilt bei geschlossenem Schalter:

$$U - RI = U_{R_L} \quad (12.17)$$

12 Blatt 12 (freiwillig)

Nach dem Ohmschen Gesetz ist:

$$I = \frac{U}{|Z|} \quad (12.18)$$

Für U gilt:

$$U(t) = U_0 \cos(2\pi ft - \phi) \quad (12.19)$$

Den Winkel ϕ berechnen wir mithilfe der Ergebnisse aus (a):

$$\phi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)}\right) \quad (12.20)$$

$$= -0,6480092091^\circ \quad (12.21)$$

Insgesamt ergibt sich so die Formel:

$$U_{RL} = \left(1 - \frac{R}{|Z|}\right) U_0 \cos(2\pi ft - \phi) \quad (12.22)$$

$$= 75,00586254 \text{ V} \cos(20\pi \text{ Hz} \cdot t + 0,6480092091^\circ) \quad (12.23)$$

(d)

Es gilt:

$$U - RI - U_{\text{par}} = 0 \quad (12.24)$$

Wir nutzen das Ohmsche Gesetz und erhalten:

$$I = \frac{U}{|Z|} \quad (12.25)$$

Für die Parallelschaltung erhalten wir:

$$U_{\text{par}} = U_C = U_L + U_{R_L} \quad (12.26)$$

Für U_{par} erhalten wir:

$$U_{\text{par}} = U - I \cdot R = U - \frac{U}{|Z|} \cdot R = U \cdot \left(1 - \frac{R}{|Z|}\right) \quad (12.27)$$

Da wir uns in einer Parallelschaltung befinden, wissen wir:

$$I_{\text{par}} = I = I_C + I_L \quad (12.28)$$

Für I_C erhalten wir mit dem Ohmschen Gesetz:

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = \frac{U_{\text{par}}}{-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}} \quad (12.29)$$

Somit erhalten wir:

$$U_{R_L} = R_L \cdot I_L \quad (12.30)$$

$$= R_L \cdot (I - I_C) \quad (12.31)$$

$$= R_L \cdot \left(\frac{U}{|Z|} - \frac{U \cdot \left(1 - \frac{R}{|Z|}\right)}{-\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}} \right) \quad (12.32)$$

$$= 73,83 \text{ V} \cdot \cos(20\pi \text{ Hz} \cdot t - 12,60998227^\circ) \quad (12.33)$$

12.2 Aufgabe 47

Gegeben:

$$\vec{j} = 0, \quad \rho = 0$$

Gesucht: Herleitung der Wellengleichung des $\vec{E}$ -Feldes aus den Maxwellschen Gleichungen.

Die 3. Maxwellsche Gleichung lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (12.34)$$

Beidseitiges bilden der Rotation liefert:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (12.35)$$

Einsetzen von $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (12.36)$$

Mit der 4. Maxwellschen Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ und $\vec{j} = 0$ folgt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (12.37)$$

Die linke Seite lässt sich auch umschreiben als:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (12.38)$$

Nach der 1. Maxwellschen Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ und $\rho = 0$ folgt:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\Delta \vec{E} \quad (12.39)$$

Eingesetzt ergibt sich dann die Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (12.40)$$

12.3 Aufgabe 48

Gegeben:

$$P = 1,5 \text{ mW}, \quad d \approx 100 \text{ } \mu\text{m}, \quad \vec{E} \perp \vec{H}, \quad \mu_r(\text{Auge}) \approx 1$$

Für den Poynting-Vektor gilt:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (12.41)$$

Der Poynting-Vektor ist senkrecht zur elektrischen Feldstärke E , wenn $H = \frac{B}{\mu_0}$ und $E = cB$ gilt. So gilt, nach dem entsprechendem einsetzen:

$$S = E \cdot \frac{E}{c \cdot \mu_0} \quad (12.42)$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{c \cdot \mu_0 \cdot S} \quad (12.43)$$

Mit dem Zusammenhang der Leistung und der Fläche als Leistungsdichte S , so können wir sagen:

$$S = \frac{P}{A} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{\pi \cdot (50 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2} = 190985 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (12.44)$$

So folgt für die elektrische Feldstärke:

$$E = 8482,325 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (12.45)$$

12.4 Aufgabe 49

(a)

Allgemein kennen wir für die magnetische Flussdichte:

$$B = \mu_0(H + M) \quad (12.46)$$

Analog kennen wir für die elektrische Flussdichte:

$$D = \epsilon_0 \cdot E + P \quad (12.47)$$

Wir wissen, dass für ein Objekt ohne elektrisches Feld, die elektrische Flussdichte D gleich null sein muss. Somit erhalten wir den Zusammenhang, dass die $\epsilon_0 \cdot E = -P$ gilt. Dieses Konzept wenden wir nun analog zum elektrischen Feld an. Das Magnetfeld außen muss überall gleich sein. Das führt dazu, dass wir $B = 0$ erhalten, womit wir dann in der Lage sind folgenden Zusammenhang zu finden: $M = -H$. Daher entspricht die Magnetisierung der negativen magnetischen Feldstärke.

(b)

Für die Magnetisierung kennen wir folgenden experimentell entdeckten Zusammenhang:

$$M = \chi \cdot H \quad (12.48)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der von uns aufgestellten Gleichung aus dem Aufgabenteil a), so können wir sehr schnell feststellen, dass die magnetische Suszeptibilität $\chi = -1$ sein muss.