Einschub: Fouriertransformation

Im Allgemeinen hat man es in der Optik mit elektrischen Feldern und Intensitäten zu tun, die beliebig von Zeit und Ort abhängen können,

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t) \quad ; \quad I = I(x,y,z,t)$$

Die Maxwellgleichungen werden aber in der Regel nur gelöst für eine gegebene (Winkel-) Frequenz ω und/oder Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, wie z.B. ebene Wellen

$$\vec{E}(\vec{r},\vec{k},\omega,t) = \vec{E}_0\, \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

Wichtig: Die allgemeine Lösung läßt sich immer vollständig zusammensetzen aus (meist unendlich vielen) ebenen Wellen verschiedener Frequenz! Zwei Arten der „Fourierzerlegung" sind üblich (hier vereinfacht eindimensional):

a) An einem festen Ort: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$ mit Winkelfrequenzen ω

b) Zu einer festen Zeit: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{+ikx}\, \mathrm{d}k$ mit „Raumfrequenzen" k

Die Größen $\tilde{f}(\omega)$ und $\tilde{f}(k)$ bezeichnen die Amplituden der jeweiligen Komponenten. Die Berechnung von $\tilde{f}(\omega)$ aus $f(t)$ wird im Folgenden dargestellt. (ist für $\tilde{f}(k)$ völlig analog.)

Diskrete Fouriertransformation

Die stetig differenzierbare Funktion $f(t)$ sei periodisch mit Periodendauer T. Dann kann sie in eine „diskrete Fourier-Reihe" von Sinus- und Kosinusfunktionen mit diskreten Frequenzen $n\omega_0$, $n \in \mathbb{N}$, entwickelt werden entsprechend

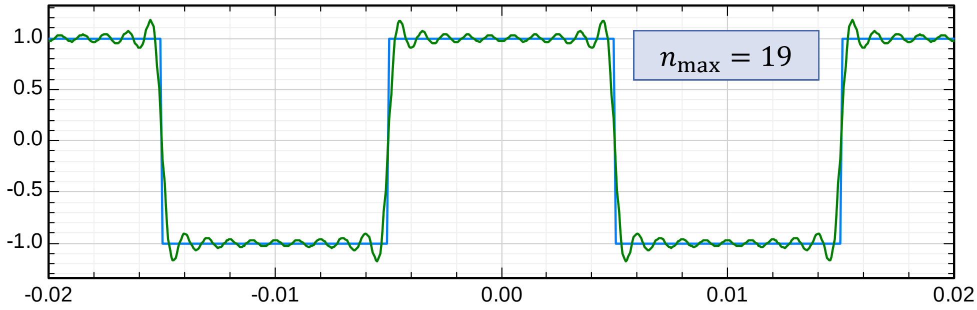
$$f(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \qquad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

und den Amplituden

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t)\, \mathrm{d}t$$

Ist $f(t)$ eine „gerade" Funktion (achsensymmetrisch zum Ursprung), dann verschwinden alle Sinusanteile, $b_n = 0 \;\forall\, n$. Ist $f(t)$ eine „ungerade" Funktion (punktsymmetrisch zum Ursprung), dann verschwinden alle Kosinusanteile, $a_n = 0 \;\forall\, n$.

Beispiel: Periodische Rechteckfunktion



Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \begin{cases} 0 & ;\ n \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{n\,\pi} & ;\ n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad ; \qquad b_n = 0$$

Der Amplitudenwert ist antiproportional zur zugehörigen Frequenz $n\omega_0$.

Diskrete Fouriertransformation (komplex)

Mit $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist dann

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{-in\omega_0 t} \qquad ; \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{+in\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

Die Koeffizienten c_n sind komplex. Ihre Real- und Imaginärteile beinhalten die Kosinus- und Sinusanteile der Fourierzerlegung.

Beweis für $f(t) \in \mathbb{R}$: $c_n = \frac{1}{2}\left(c'_n + ic''_n\right)$

$$c'_n = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}_{\text{symmetrisch in } n} = c'_{-n} \qquad ; \quad c''_n = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}_{\text{antisymmetrisch in } n} = -c''_{-n}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\{c'_n\cos(n\omega_0 t) + c''_n\sin(n\omega_0 t)\}}_{\text{symmetrisch in } n} - i\,\cancel{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\{c'_n\sin(n\omega_0 t) - c''_n\cos(n\omega_0 t)\}}_{\text{antisymmetrisch in } n}}$$

$$= \frac{c'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n\cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} c''_n\sin(n\omega_0 t)$$

Deltafunktion

Definierende Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = 1$$

(Einheit ist $\left[\frac{1}{x}\right]$!)

$$\delta(x-x_0) = 0 \quad \forall x \neq x_0$$

Ersatzfunktionen ($\gamma \to 0$)

$$\delta_\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\gamma}} \quad ; \quad \delta_\gamma(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2} \quad ; \quad \delta_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$$

Spektrum

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k$$

(Beweis mittels $f(k) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma^2}{2}k^2} \to 1$ für $\gamma \to 0$)

Beweis

mittels $\tilde{f}(k) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma^2}{2}k^2} \to 1$ für $\gamma \to 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\gamma^2}{2}k^2+ikx}\,\mathrm{d}k && \Big|\ \text{nachschlagen: } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-az^2+ibz}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\gamma}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} && \Big|\ \text{Gauss: Ersatzfunktion für } \delta-\text{Funktion !} \\ &\overset{\gamma\to 0}{=} \delta(x) \end{aligned}$$

Damit

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}k$$

Kontinuierliche Fouriertransformation

Verallgemeinerung auf beliebige (auch nichtperiodische) Funktionen $f(t)$ mit kontinuierlichen Frequenzen ω (beachte Konvention bzgl. Vorzeichen):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{+i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{+ikx}\, \mathrm{d}k \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-ikx}\, \mathrm{d}x$$

Die gewählten Vorfaktoren $1/\sqrt{2\pi}$ haben den Vorteil einer symmetrischen Darstellung. Beachte, dass $\tilde{f}(\omega)$ eine „spektrale Dichtefunktion“ ist (Einheit!).

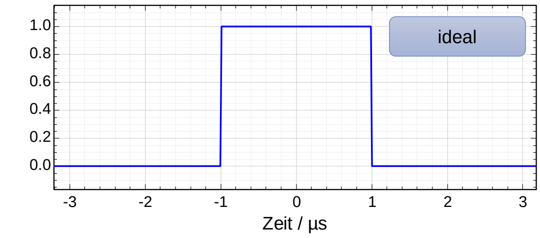
Beweis durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\, \mathrm{e}^{+i\omega t'}\, \mathrm{d}t' \right\} \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega(t-t')}\, \mathrm{d}\omega \right\} \mathrm{d}t' \qquad \Big| \; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega(t-t')}\, \mathrm{d}\omega = 2\pi\, \delta(t-t') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\, \delta(t-t')\, \mathrm{d}t' \quad \stackrel{!}{=} \quad f(t)
\end{aligned}$$

Beispiel: Endliche Bandbreite

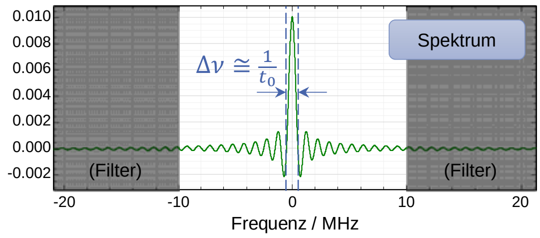
Einmaliger Rechteckpuls

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-t_0, +t_0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



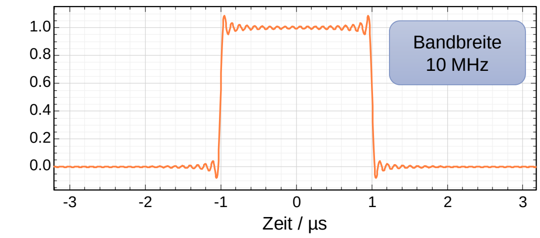
Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_0}^{+t_0} \mathrm{e}^{+i\omega t}\, \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin \omega t_0}{\omega}
\end{aligned}$$



Inverse Fouriertransformation (mit Filter)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \tilde{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$



Parsevalsches Theorem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

Bezogen auf das elektrische Feld, $f(t) = E(t)$, ist das gleichbedeutend mit der Aussage, dass seine Gesamtenergie berechnet werden kann sowohl durch Integration seiner Intensität $I(t)$ über die Zeit als auch durch Integration seiner spektralen Energieflussdichte $I(\omega)$ über die Frequenz.

Faltungssatz

Die Funktion $f(t)$ sei gegeben durch

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t')\, h(t')\, \mathrm{d}t' \quad =: \quad (g \otimes h)(t)$$

Faltung (oder Konvolution)

Dann gilt der **Faltungssatz** (ohne Beweis)

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, \tilde{g}(\omega) \cdot \tilde{h}(\omega)}$$

einfaches Produkt der Fouriertransformierten

Beispiel: Faltung mit Deltafunktion

Periodische Deltafunktion

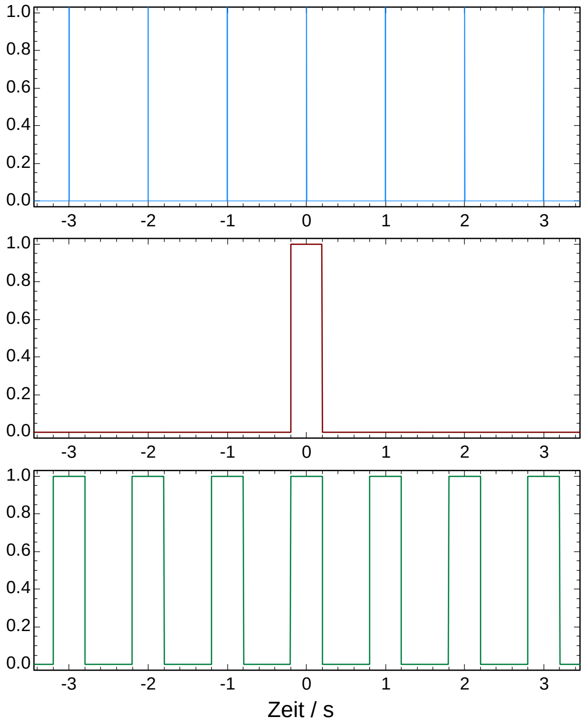
$$g(t) = \sum_n \delta(t - n \cdot 1.0) \quad ; \; n \in \mathbb{Z}$$

Rechteckfunktion

$$h(t) = \begin{cases} 1 & ; \; -0.2 < t < 0.2 \\ 0 & ; \; \text{sonst} \end{cases}$$

Faltung

$$f(t) = (g \otimes h)(t)$$

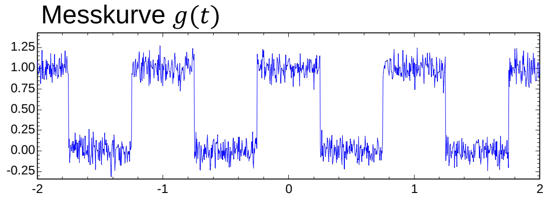


Beispiel: Glättung von Messwerten (I)

Ortsraum

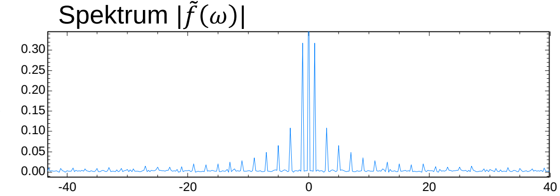
Frequenzraum

Messkurve $g(t)$

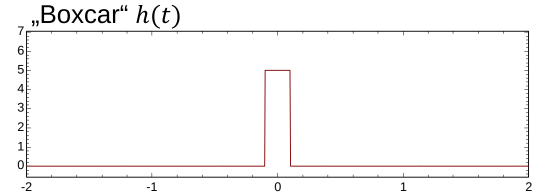


FT

Spektrum $|\tilde{f}(\omega)|$

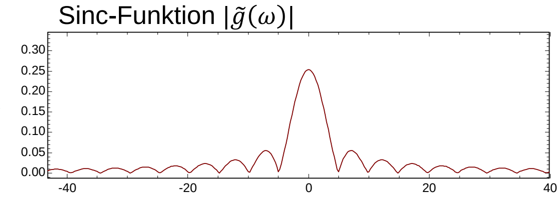


„Boxcar" $h(t)$

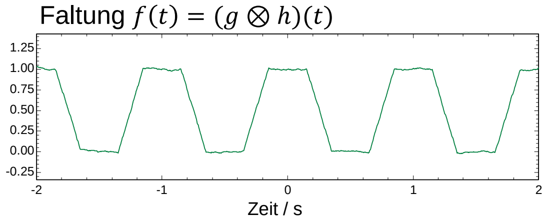


FT

Sinc-Funktion $|\tilde{g}(\omega)|$

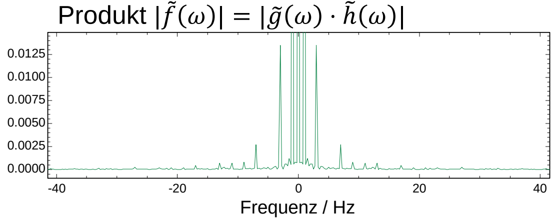


Faltung $f(t) = (g \otimes h)(t)$

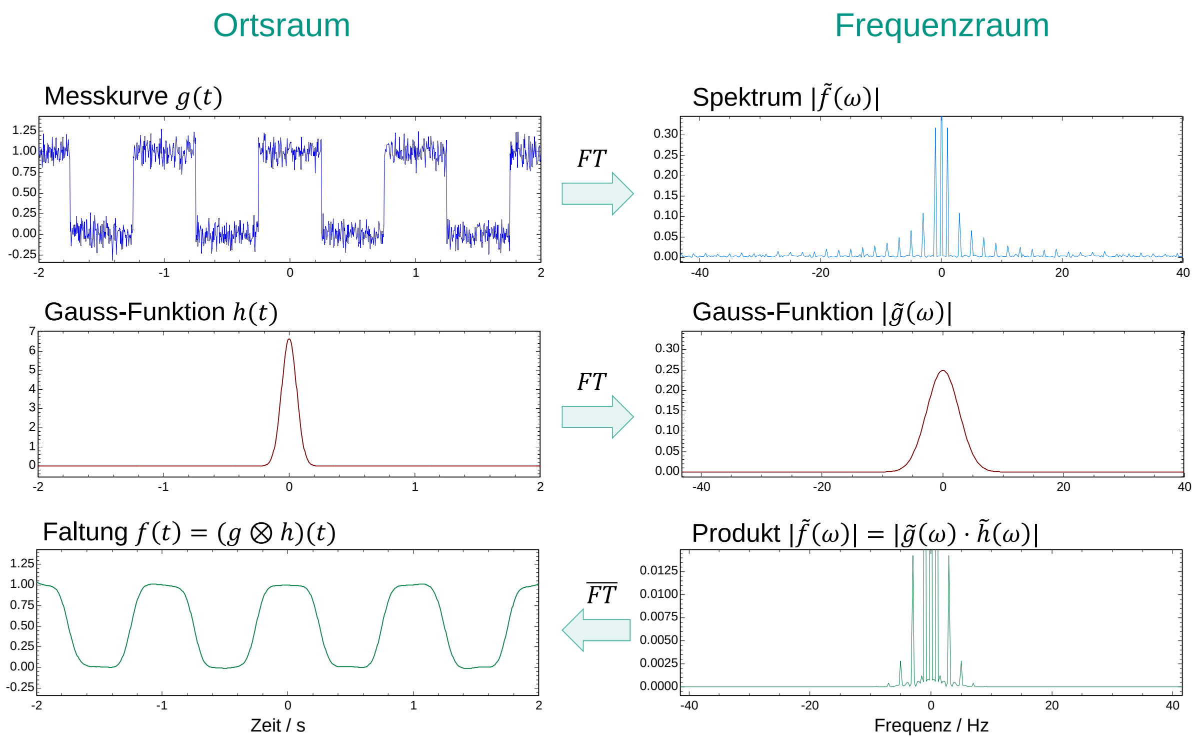


$\overline{FT}$

Produkt $|\tilde{f}(\omega)| = |\tilde{g}(\omega) \cdot \tilde{h}(\omega)|$



Beispiel: Glättung von Messwerten (II)



Kreuzkorrelationssatz

Die Funktion $f(t)$ sei gegeben durch

komplex-konjugiert

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t+t')\, h^*(t')\, \mathrm{d}t' \quad =: \quad (g \star h)(t)$$

Kreuzkorrelation

Dann gilt der **Kreuzkorrelationssatz** (ohne Beweis)

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, \tilde{g}(\omega) \cdot \tilde{h}^*(\omega)}$$

einfaches Produkt der Fouriertransformierten

Insbesondere gilt für die Autokorrelation mit $h(t) = g(t)$ der **Satz von Wiener-Khinchin**

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, |\tilde{g}(\omega)|^2}$$

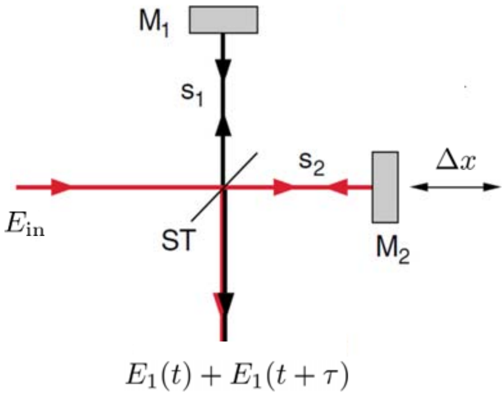
Beispiel: Michelson-Interferometer

Der Detektor misst das Interferogramm

$$I(t) \;\propto\; 2\,\langle E_1^2(t)\rangle_T + \frac{1}{T}\int_0^T E_1(t+t')E_1(t')\,\mathrm{d}t'$$

Damit wird mit dem Satz von Wiener-Khinchin
für $\omega > 0$

$$\tilde{I}(\omega) \;\propto\; |\tilde{E}_1(\omega)|^2$$



(nach Demtröder)

Das Farbspektrum des einfallenden Lichts ist die
Fouriertransformierte $\tilde{I}(\omega)$ des Interferogramms $I(t)$

$$|\tilde{E}_{\rm in}(\omega)|^2 \;\propto\; \tilde{I}(\omega)$$

Poynting-Vektor (komplex)

Bisher

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

mit reelen Größen $\vec{E}$ und $\vec{H}$. Bei komplex definierten Feldern, z.B. $\vec{E}' = \vec{E}_0'\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$, wurde bisher $\vec{E} = \Re(\vec{E}')$ benutzt.

Für komplexe Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ mit harmonischer Zeitabhängigkeit ($\sim e^{-i\omega t}$) ist es praktisch, auch $\vec{S}$ komplex zu definieren:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\,\vec{E}\times\vec{H}^*$$

Damit ist der Realteil von $\vec{S}$ die zeitlich gemittelte Energieflussdichte,

$$I = \Re[\vec{S}] = \frac{1}{2}\left\langle \Re[\vec{E}]\times\Re[\vec{H}]\right\rangle_T$$

Wegen $\vec{H} = n\vec{E}/Z_0$ wird (vgl. Wellenoptik, S. 6)

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{n}{Z_0}\,\vec{E}\times\vec{E}^* = \frac{1}{2}\,\frac{n}{Z_0}\,|\vec{E}|^2$$

(Formel wie bisher, aber nun für komplexes $\vec{E}$)

Beweis

Gegeben sind zwei komplexe Größen $\vec{A} = \vec{a}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ und $\vec{B} = \vec{b}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Re[\vec{A}] \times \Re[\vec{B}] &= \frac{1}{2}\left(\vec{a}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \vec{a}^*\,\mathrm{e}^{+i\omega t}\right) \times \frac{1}{2}\left(\vec{b}\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + \vec{b}^*\,\mathrm{e}^{+i\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\vec{a} \times \vec{b}^* + \vec{a}^* \times \vec{b}\right) + \frac{1}{4}\left(\vec{a} \times \vec{b}\,\mathrm{e}^{-i2\omega t} + \vec{a}^* \times \vec{b}^*\,\mathrm{e}^{+i2\omega t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Re\left[\vec{a} \times \vec{b}^* + \vec{a} \times \vec{b}\,\mathrm{e}^{-i2\omega t}\right]
\end{aligned}$$

Bei zeitlicher Mittelung wird der zweite Term identisch Null, also

$$\left\langle \Re[\vec{A}] \times \Re[\vec{B}] \right\rangle_T = \frac{1}{2}\Re\left[\vec{A} \times \vec{B}^*\right]$$

Anmerkung

Entsprechend dem komplexen Poynting-Vektor werden auch die elektrische und magnetische Energiedichte als komplexe Größen definiert

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{4}\vec{E} \cdot \vec{D}^* \qquad w_\mathrm{m} = \frac{1}{4}\vec{B} \cdot \vec{H}^*$$

Welche Einheit hat die Amplitude $\tilde{f}(\omega)$?

Annahme: $f(t)$ sei Ergebnis einer Intensitätsmessung als Funktion der Zeit t, also

$$[f(t)] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Dann ist das Spektrum von $f(t)$ gegeben durch die Fouriertransformation

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{+i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Die Amplitude $\tilde{f}(\omega)$ bei der (Winkel-) Frequenz ω hat offenbar die Einheit

$$[\tilde{f}(\omega)] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{s} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{Hz}}$$

Die Amplitude wird bestimmt als „pro Frequenzintervall“. Solche Größen werden als „Spektrale Dichten“ bezeichnet, hier also „Spektrale Intensitätsdichte“.

Warum „Spektrale Dichte“?

Die Gesamtintensität des Lichts verteilt sich auf einen kontinuierlichen Frequenzbereich. Die Intensität $\tilde{g}(\omega_0)$ (in $\mathrm{W/m^2}$) an einer singulären Frequenz ω_0 ist daher infinitesmal klein, $\tilde{g}(\omega_0) \rightarrow \mathrm{d}\tilde{g}(\omega_0)$.

Erst durch Integration über ein endliches Frequenzintervall $\Delta\omega$ erhält man einen endlichen (messbaren) Wert:

$$\tilde{G}(\omega, \omega + \Delta\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega+\Delta\omega} \mathrm{d}\tilde{g}(\omega)$$

Für ein genügend kleines Intervall $\Delta\omega$ wird $\tilde{G}$ linear mit $\Delta\omega$ wachsen, so dass wir definieren

$$\mathrm{d}\tilde{g}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{f}(\omega) = \frac{\mathrm{d}\tilde{g}(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

mit

$$\tilde{G}(\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega+\Delta\omega} \tilde{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \tilde{f}(\omega_0)\Delta\omega$$

Die spektrale Dichte $\tilde{f}(\omega_0)$ hat bei ω_0 einen endlichen Wert und durch Multiplikation mit einem Frequenzintervall $\Delta\omega$ liefert sie die gesuchte Intensität $\tilde{G}$.

Bei der Messung eines Spektrums ist $\Delta\omega$ die gewählte spektrale Auflösung und $\tilde{G}(\omega, \omega + \Delta\omega)$ die bei der Frequenz ω gemessene Intensität.