Optik – WS 18/19

2. Erinnerung an die Elektrodynamik

Die Maxwellschen Gleichungen

Im Vakuum mit Quellen

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{D} &= \rho \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \end{aligned}$$

$\vec{E}$	elektrische Feldstärke	[E]	=	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$	elektrische Flussdichte	[D]	=	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke	[H]	=	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$	magnetische Flussdichte	[B]	=	T

In Materie

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P} &= \varepsilon_0 \varepsilon\,\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0\,(\vec{H} + \vec{M}) &= \mu_0 \mu\,\vec{H} \end{aligned}$$

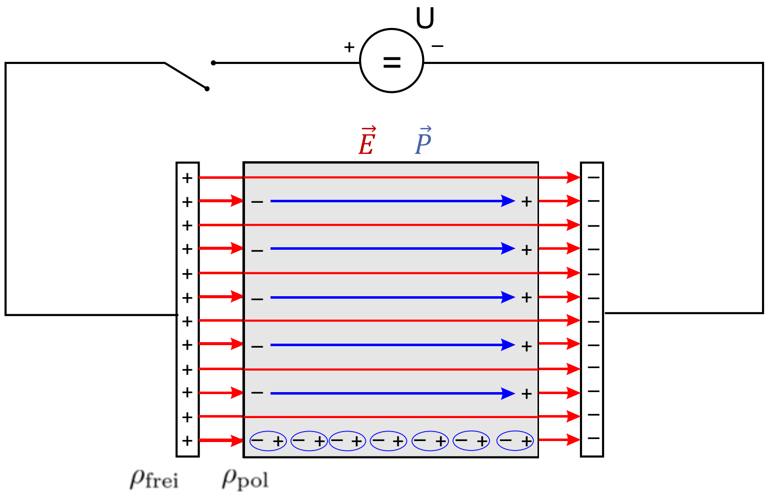
$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$	Polarisation	[P]	=	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$
$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$	Magnetisierung	[M]	=	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$

Beiträge zu ρ und $\vec{j}$ werden in „freie“ und „gebundene“ bzw. „externe“ und „interne“ aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\mathrm{frei}} + \rho_{\mathrm{geb}} \\ \vec{j} &= \vec{j}_{\mathrm{ext}} + \cancel{\vec{j}_{\mathrm{int}}} \end{aligned}$$

(fast) nie von Bedeutung in der Optik

Polarisation



In der Polarisation $\vec{P}$ steckt die gesamte Information über die optischen Eigenschaften eines Materials. Meist verwendet man andere Größen, die dann jedoch die Polarisation enthalten:

$\varepsilon, \chi, n, \alpha, \ldots$

Diese werden wir später diskutieren.

Gemitteltes Feld!

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} &= \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}} \\ \operatorname{div} \vec{P} &:= -\rho_{\text{pol}} \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\operatorname{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)}_{\vec{D}} = \rho_{\text{frei}} \quad ; \quad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\vec{D} - \vec{P}\right)$$

wird meist weggelassen!

Energiedichte und Poynting-Vektor

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) \quad ; \quad [\mathrm{w}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

Zeitliche Änderung von w $\widehat{=}$ Zu- oder Abfluss + Umwandlung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} + \vec{D}\cdot\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{B}}\cdot\vec{H} + \vec{B}\cdot\dot{\vec{H}}\right) \\ &\overset{\text{im Vakuum}}{=} \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_0 \vec{H}\cdot\dot{\vec{H}} && \text{(2. und 4. MG)} \\ &= \vec{E}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j}\right) - \vec{H}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) && \operatorname{div}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = -\vec{a}(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}(\vec{\nabla}\times\vec{a}) \\ &= -\operatorname{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E} \end{aligned}$$

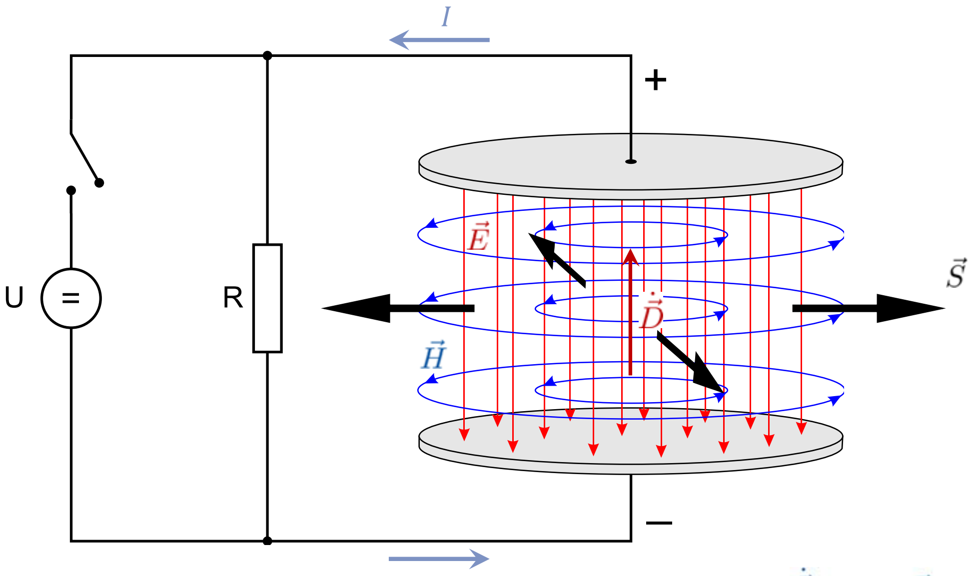
also

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{S} - \vec{j}\cdot\vec{E} \quad ; \quad [\mathrm{S}] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}$$

Abstrahlung

Umwandlung in Wärme (ohmsches Gesetz)

Beispiel



$$\dot{\vec{D}} = \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Wellengleichungen

Maxwellgleichungen ($\rho = 0;\ \vec{j} = 0$)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \qquad \Big| \quad \operatorname{rot}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \qquad \Big| \quad \mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \qquad (\, j_{\text{int}} = 0 \ \rightarrow \mu = 1 \,)$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}}_{\cancel{\operatorname{grad}\operatorname{div}} \,-\, \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}}_{\Delta}} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = 0 \qquad \Big| \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \, \vec{E}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0}$$

Analog:

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} = 0}$$

mit

$$\begin{array}{lll} c := \dfrac{c_0}{n} & ; & \text{Lichtgeschwindigkeit im Medium} \\ c_0 := \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} & ; & \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum} \\ n := \sqrt{\varepsilon \mu} & ; & \text{Brechzahl} \end{array}$$

$$(\, \mu = 1 \rightarrow n = \sqrt{\varepsilon} \,)$$

Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \qquad \Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_x \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_y \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_z \end{pmatrix}$$

Gesucht: $\vec{E}(\vec{r},t)$ das die DGL löst.

Ansatz: (ebene Welle)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)$$

Einsetzen:

$$-\vec{k}^2\,\cancel{\vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)} + \frac{1}{c^2}\,\omega^2\,\cancel{\vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)} = 0$$

Dispersionsrelation des Lichts

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

Allgemein: Jedes $\vec{E}(\vec{r},t)$ mit

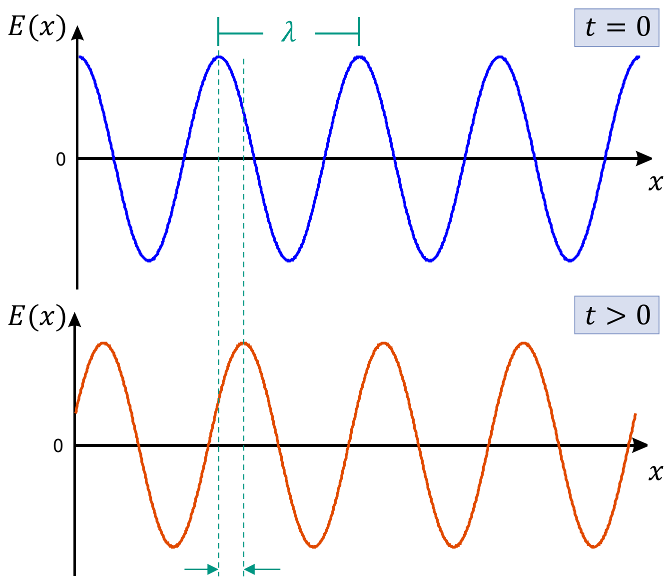
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, f(\vec{k}\vec{r} \pm \omega t)$$

und zweifach differenzierbarer Funktion $f(\vec{r},t)$ ist Lösung der Wellengleichung sofern

$$\omega = c\,|\vec{k}|$$

Ebene Wellen - Diskussion

$$\boxed{E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)}$$



$$\Delta x = +c\,\Delta t$$
$$\Delta x = -c\,\Delta t \text{ für } \cos(kx + \omega t)$$

$$k \cdot \lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(Wellenzahl)

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 2\pi\,\nu \\ \omega &= c\,k \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c = \lambda\,\nu$$

Die Größe c ist die **Phasengeschwindigkeit**

Ebene Wellen - Diskussion

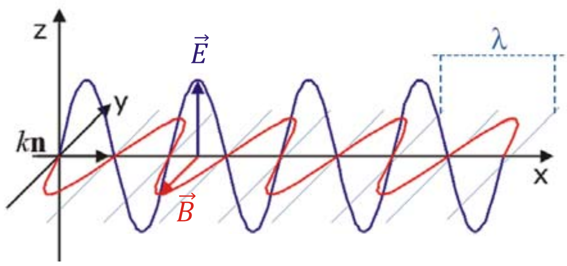
In welcher Beziehung stehen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ hinsichtlich ihrer Richtung?

Aus Wellengleichungen :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Induktionsgesetz: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} &= \omega \cdot \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}} \qquad (\, E = c \cdot B \,)$$



Die Vektoren $\vec{k}, \vec{E}$ und $\vec{B}$ bilden ein **Rechtssystem**

Weitere Lösung (mit Quelle): Hertzscher Dipol

Dipolmoment

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t)$$

Fernfeld

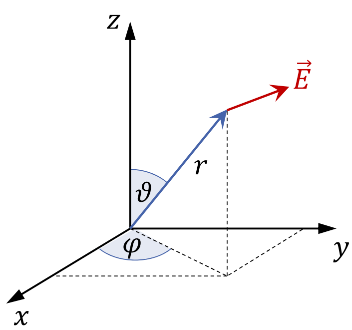
erzeugt zeitabhängiges elektrisches Feld (Kugelkoordinaten!)

Nahfeld

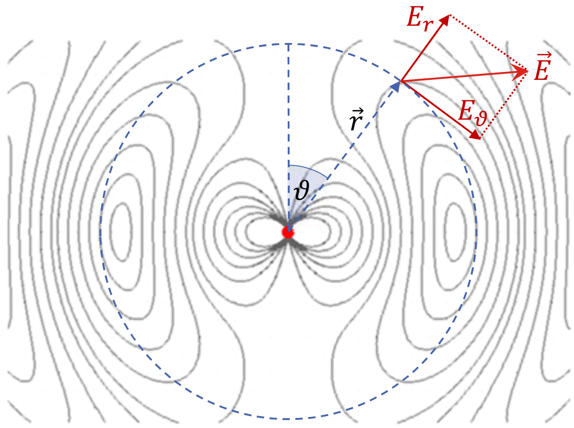
$$\vec{E}(r,\vartheta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\vartheta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \frac{p_0 k^3}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \left(-\frac{2i}{(kr)^2} + \frac{2}{(kr)^3} \right) \cos\vartheta \\ \left(-\frac{1}{kr} - \frac{i}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right) \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kr - \omega t)$$

Abstrahlung ins Fernfeld

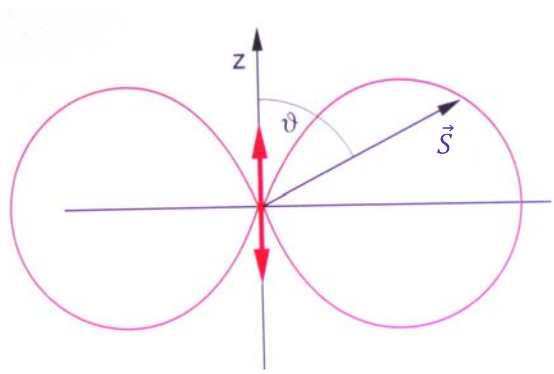
$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$$



Elektrisches Feld



Abstrahlung ins Fernfeld (Polardiagramm)

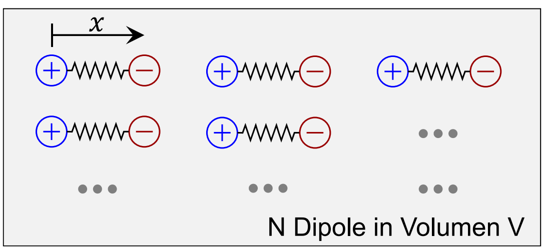


Licht in Materie

Lorentz-Modell (eindimensional)

Vereinfacht: Materie besteht aus schweren Ionenrümpfen mit Ladung $+Q$ und leichten Elektronen mit Ladung $-Q$. Das elektrische Feld $\vec{E}$ induziert ein elektrisches Dipolmoment $\vec{p}$ durch Auslenkung der Elektronen (vgl. „Elektrodynamik").

$$p = -Q \cdot x$$



Polarisation

$$P = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{N}{V} \cdot p$$

Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + (D_1 x + \cancel{D_2 x^2 + D_3 x^3 + \ldots}) = -Q\,E$$

mit Masse m und Kraftkonstanten D_1, D_2, D_3, etc.

Näherung: E ist klein → x ist klein → Hookesches Gesetz → harmonischer Oszillator.

(Abweichungen, siehe nichtlineare Optik)

Polarisation und Suszeptibilität

Also

$$m\ddot{x} + Dx = -Q\,E \qquad ; \quad E(t) = E_0\,\cos(\omega t)$$

Lösungsansatz: $x(t) = x_0\,\cos(\omega t)$

$$x_0 = -\frac{Q}{m}\frac{E_0}{\Omega^2-\omega^2} \qquad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$ (Eigenfrequenz)

Polarisation

$$P = \frac{N}{V}(-Q\,x) = \frac{NQ^2}{Vm}\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\cdot E \qquad =: \quad \varepsilon_0\chi\cdot E$$

Optische Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0}\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}$$

Optische dielektrische Funktion

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon_0 E + P \\ &= \varepsilon_0 E + \varepsilon_0\chi\,E \\ &= \varepsilon_0(1+\chi)\,E \qquad =: \qquad \varepsilon_0\varepsilon_r\,E \end{aligned}$$

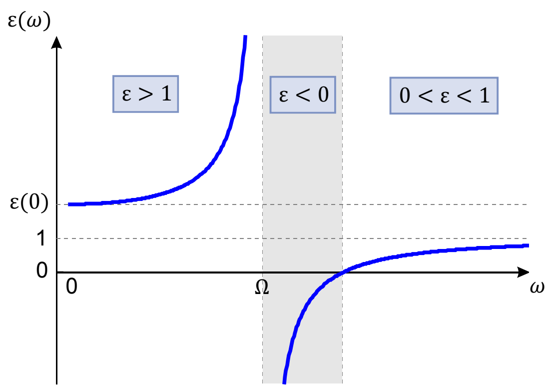
(der Index „r“ wird meist weggelassen)

Also

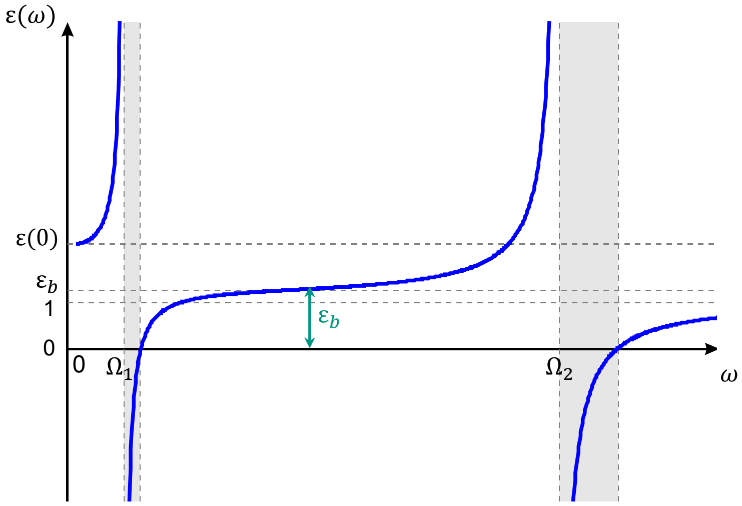
$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$$

und damit

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0}\frac{1}{\Omega^2-\omega^2}$$



Mehrere Resonanzen



Höherfrequente Anteile der dielektrischen Funktion (hier nur Ω_2) fasst man oft zusammen mittels der **Hintergrund-Dielektrizitätskonstanten $\boldsymbol{\varepsilon_b}$**:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_b + \chi}$$

(gilt nur für niederfrequente Anteile)

Beispiel

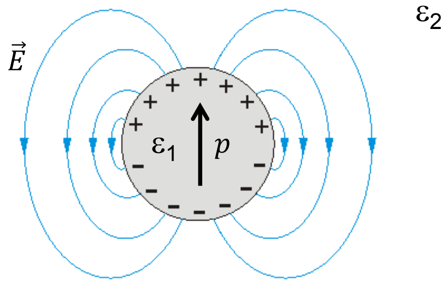
Lichtstreuung eines sphärischen Partikels (Radius $r \ll \lambda$)

Induziertes Dipolmoment

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E}$$

mit Polarisierbarkeit (ohne Beweis)

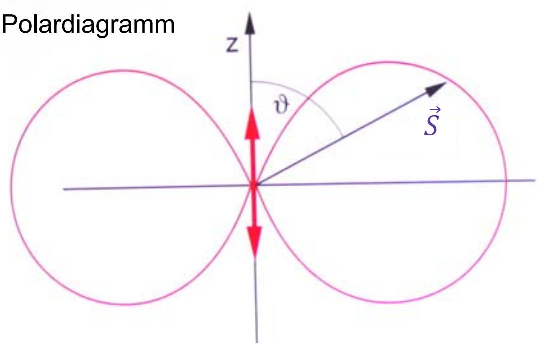
$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \cdot \frac{\varepsilon_1(\omega) - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\omega) + 2\varepsilon_2}$$



Abstrahlung ins Fernfeld

$$\langle|\vec{S}|\rangle = \frac{\omega^4 p^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\,\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$$

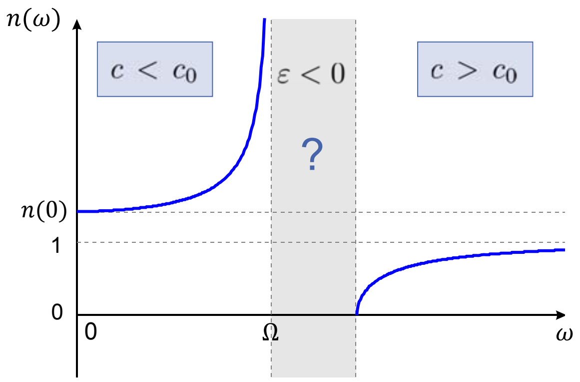
Polardiagramm



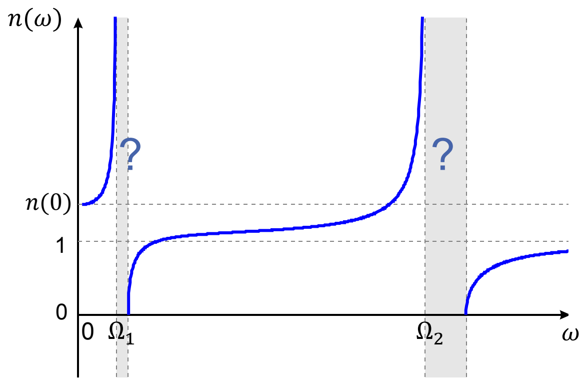
Brechungsindex Lorentz-Oszillator

$$\boxed{n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}}$$

Eine Resonanz



Mehrere Resonanzenen



Ebene Welle (komplex)

$$E(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) + i\, E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$= E_0\, \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} \qquad ; \quad c = \frac{c_0}{n} = \frac{\omega}{k} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\omega}{c_0}\, n$$

$(\; n \text{ ist komplex: } n = n' + in'' \;)$

Einsetzen:

$$E(x,t) = E_0\, \mathrm{e}^{i(\frac{\omega}{c_0} n x - \omega t)} = E_0\, \mathrm{e}^{i(\frac{\omega}{c_0} n' x - \omega t)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\omega}{c_0} n'' x}$$

Realteil:

$$\Re\{E(x,t)\} = E_0 \cdot \underbrace{\cos(k_0\, n' x - \omega t)}_{\text{laufende Welle}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-k_0\, n'' x}}_{\text{abklingend}} \qquad ; \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

In einem Raumbereich mit negativer Dielektrizitätszahl und damit imaginärer Brechzahl klingt die Amplitude einer elektromagnetischen Welle exponentiell ab [$\sim\exp(-\frac{\alpha}{2}x)$]. Die **Eindringtiefe d** des Feldes ist:

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{c_0}{2\omega\, n''} = \frac{1}{4\pi}\, \frac{\lambda_0}{n''}$$

Imaginärteil der Brechzahl

Eine negative Dielektrizitätszahl und damit eine imaginäre Brechzahl kann zwei verschiedene physikalische Gründe haben:

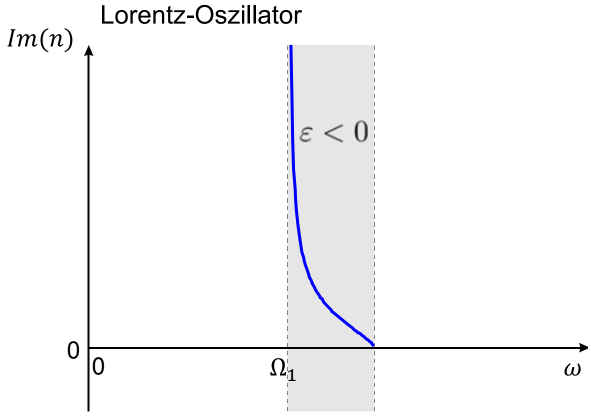
1) Absorption

Dann wird α als **Absorptionskoeffizienz** bezeichnet und es gilt

$$S(x) = S(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

2) Vollständige Reflexion

Dies ist der Fall beim diskutierten Lorentz-Oszillator (ohne Dämpfung!). Die abklingende Welle wird als **evaneszentes Feld** bezeichnet.



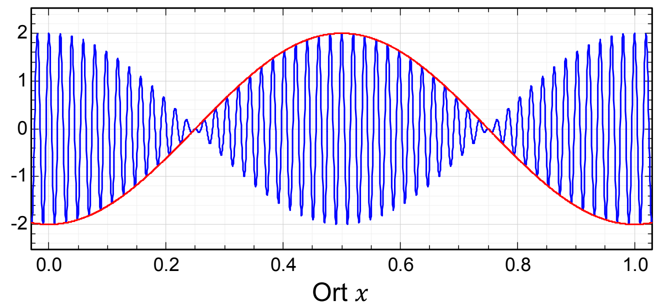
Gruppengeschwindigkeit

Betrachte „Wellenpaket“ bestehend aus zwei ebenen Wellen verschiedener Frequenz und Wellenzahl

$$E_1(t) = E_0\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$E_2(t) = E_0\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$
$$k_2 = k_1 + \delta k \quad ; \quad \omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$$

mit Phasengeschwindigkeiten

$$c_1 = \frac{\omega_1}{k_1} \quad ; \quad c_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$$



Mit welcher „Gruppengeschwindigkeit“ v_g bewegt sich die Einhüllende des Wellenpakets?

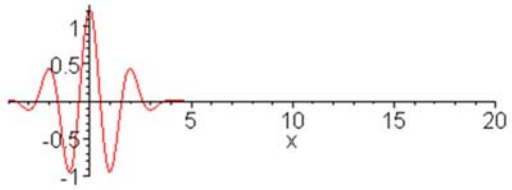
a) Trivial wenn $v_{ph} = c_1 = c_2$: $v_g = v_{ph}$

b) $c_1 \neq c_2$: Maximum tritt auf, wenn die Phase beider Wellen gleich ist.

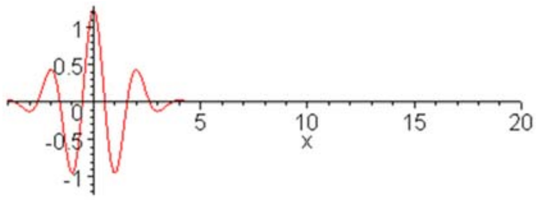
$$k_1 x - \omega_1 t = k_2 x - \omega_2 t \quad \Rightarrow \quad \delta\omega \cdot t = \delta k \cdot x \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\delta\omega}{\delta k}}$$

Beispiel: kurzer Lichtpuls

Ohne Dispersion ($c_2 = c_1$):



Mit Dispersion ($c_2 > c_1$):



http://physics.usask.ca/~hirose/ep225/animation/dispersion/anim-dispersion.html

In Materie ist n meist komplex, v_g aber nicht. Wie kann man hier die Gruppengeschwindigkeit definieren?

$$k = \frac{\omega}{c_0} n \quad ; \; n \in \mathbb{C} \;\; \Rightarrow \;\; k \in \mathbb{C}$$

also $\quad k = k' + ik''$

Definiere daher $\quad \boxed{v_g := \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}}$

Es folgt

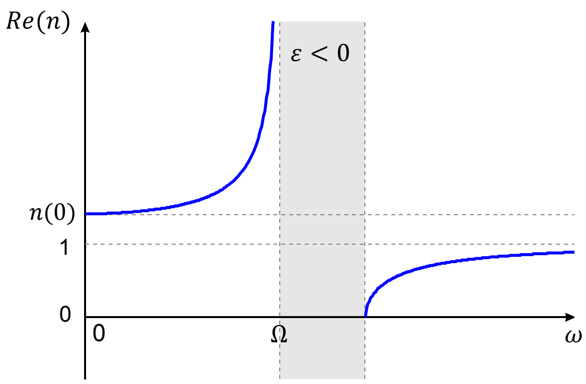
$$v_g = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}\omega}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\omega}{c_0} \cdot n'\right)} = \frac{1}{\frac{1}{c_0} n' + \frac{\omega}{c_0} \frac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\omega}}$$

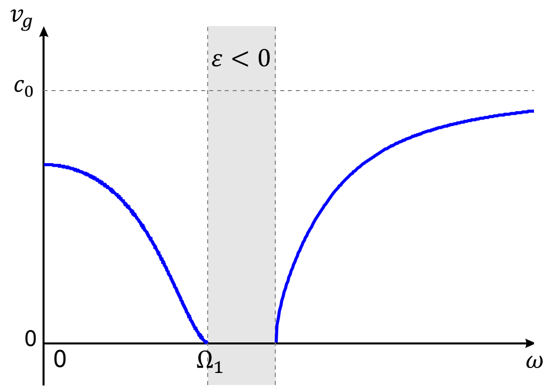
$$\boxed{v_g = \frac{c_0}{n' + \omega \frac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\omega}}}$$

Ist das Ergebnis konsistent?

n' konstant $\;\Rightarrow\; v_g = \frac{c_0}{n'} = v_{ph}$ ✓

Gruppengeschwindigkeit im Lorentz-Modell (ohne Dämpfung)





Lorentz-Oszillator mit Dämpfung

Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + Dx = -QE$$

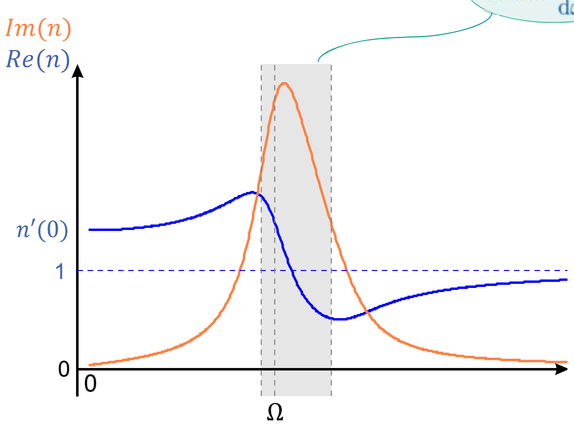
Stokessche Reibung

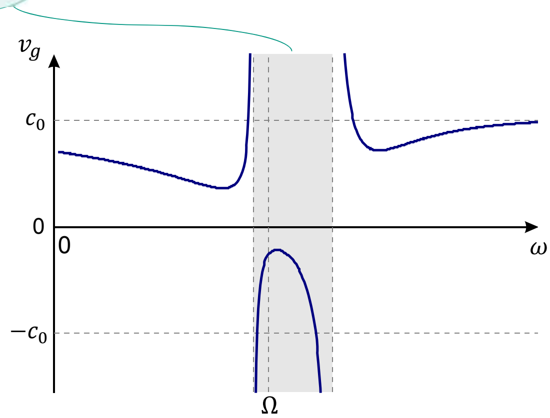
....

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\varepsilon_0}\frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$\Rightarrow \;\; \varepsilon \in \mathbb{C} \;\; \Rightarrow \;\; n = \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{C}$

$n' + \omega \frac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\omega} < 0$

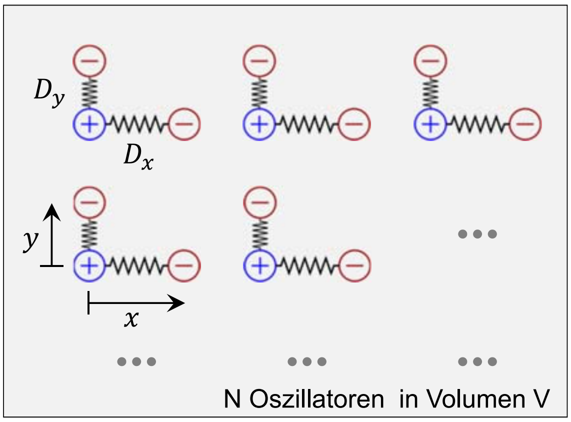




Optisch anisotrope Materialien

- Rückstellkraft beim Lorentz-Oszillator hängt von der Schwingungsrichtung ab.
- Schwingungsrichtung der Oszillatoren ist in der Regel nicht mehr parallel zu $\vec{E}$.
- Suszeptibilität und Brechzahl n sind von Polarisation und Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ der Welle abhängig, so dass

$$\vec{P} \nparallel \vec{E} \quad ; \quad \vec{D} \nparallel \vec{E}$$



Wir verallgemeinern daher

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi}}\, \vec{E}}$$ mit Suszeptibilitätstensor $$\underline{\underline{\chi}} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

In isotropen und auch in kubischen Systemen gilt aber wieder $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi\, \vec{E}$

(Im Kap. 3.3 besprechen wir diesbezügliche Effekte, wie z.B. Doppelbrechung)