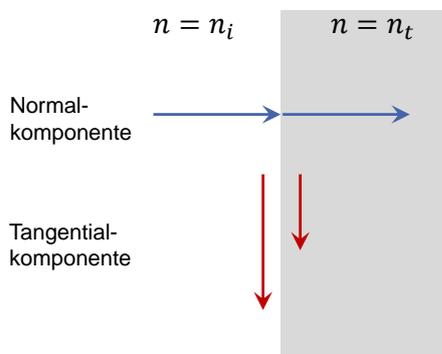


# Optik – WS 18/19

## 3. Wellenoptik

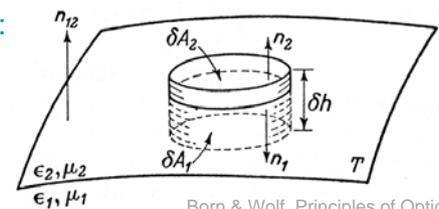
### Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$



An der Grenzfläche zweier Medien sind die Normalkomponenten von  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  stetig.

Beweis für  $\vec{D}$ :



Born & Wolf, Principles of Optics

Grenzfläche ist ohne freie Ladungen:

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

Gaußscher Integralsatz:

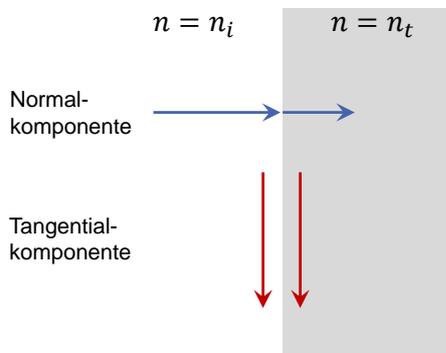
$$\int \text{div } \vec{D} dV = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0$$

Integration über Zylinderfläche mit  $F = \delta A_1 = \delta A_2$  und Höhe  $\delta h$  mit  $\delta h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} &= F \cdot (\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2) \\ &= F \cdot (D_{1,n} - D_{2,n}) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

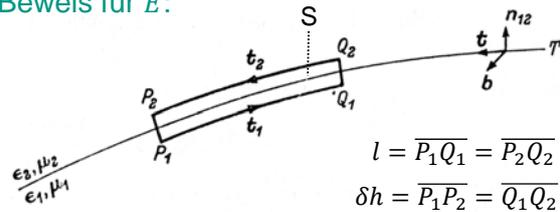
$$\Rightarrow D_{1,n} = D_{2,n} \quad \checkmark$$

## Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$



An der Grenzfläche zweier Medien sind die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  stetig.

## Beweis für $\vec{E}$ :



Born & Wolf, Principles of Optics

Die Fläche  $S$  umfasse die Grenzfläche  $T$ . Mit dem Induktionsgesetz und dem Stokesschen Satz folgt:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} \, d\vec{S} = \oint \vec{E} \, d\vec{r} \stackrel{!}{=} - \int_S \dot{\vec{B}} \, d\vec{S}$$

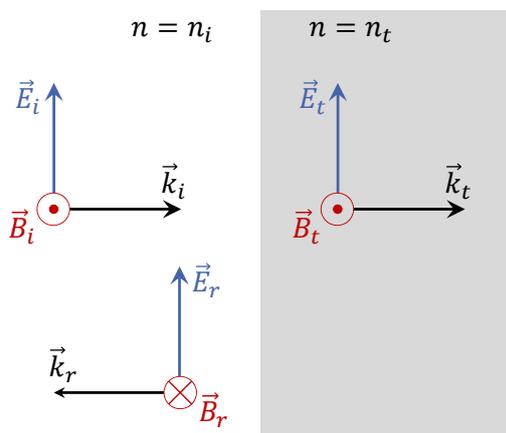
Mit der Annahme, dass  $\dot{\vec{B}}$  in  $S$  endlich ist, erhält man mit  $\delta h \rightarrow 0$

$$(\vec{E}_1 \cdot \vec{t}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{t}_2) l = (E_{1,t} - E_{2,t}) l = 0$$

$$\Rightarrow E_{1,t} = E_{2,t} \quad \checkmark$$

## Reflexion und Brechung von Licht

### Senkrechter Einfall auf einen Halbraum



- Die Felder haben nur Tangentialkomponenten.
- Die Vektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bilden Rechtssystem.

Mit Stetigkeitsbedingungen folgt

$$E_t = E_i + E_r$$

und mit  $\mu = 1$

$$\mu_0 B_t = \mu_0 B_i - \mu_0 B_r \quad | \quad B = \frac{n}{c_0} E$$

$$\Rightarrow E_t = \frac{n_i}{n_t} (E_i - E_r)$$

Damit

$$E_i + E_r = \frac{n_i}{n_t} (E_i - E_r)$$

$$E_r \left( \frac{n_i}{n_t} + 1 \right) = E_i \left( \frac{n_i}{n_t} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \Rightarrow \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

## Fresnelsche Formeln für senkrechten Lichteinfall

Feld-Reflexionskoeffizient

$$r := \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t}$$

Feld-Transmissionskoeffizient

$$t := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_i}{n_i + n_t}$$

Der Koeffizient  $r$  kann sowohl positiv als auch negativ sein!

Phasensprung bei Reflexion	$n_t > n_i$	$n_t < n_i$
$E$	$\pi$	$0$
$B$	$0$	$\pi$

Reflexion an optisch dichten Medien

Reflexion an optisch dünnen Medien

Anmerkung: Es gilt  $t - r = 1$ .

Für die Intensität gilt ( $\mu = 1$ )

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle \quad | \quad B = \frac{n}{c_0} E ; \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$= n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle |\vec{E}|^2 \rangle \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (\text{vgl. Kap. 1})$$

und damit

$$R := \frac{I_r}{I_i} = \frac{n_i E_r^2}{n_i E_i^2} = r^2$$

$$T := \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_t E_t^2}{n_i E_i^2} = t^2 \frac{n_t}{n_i}$$

Intensitäts-Reflexionskoeffizient

$$R = \left( \frac{n_i - n_t}{n_i + n_t} \right)^2$$

Intensitäts-Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{4n_i n_t}{(n_i + n_t)^2}$$

Aufgrund der Energieerhaltung ist  $R + T = 1$ .

**Beispiel:** Luft-Glas-Grenzfläche

$$n_i = 1; n_t = 1.5 \rightarrow R = 4\% \text{ und } T = 96\%$$

## Schräger Einfall auf einen Halbraum

Die  $xy$ -Ebene sei Einfallsebene einer ebenen Welle mit Wellenvektor  $\vec{k}_i$ .

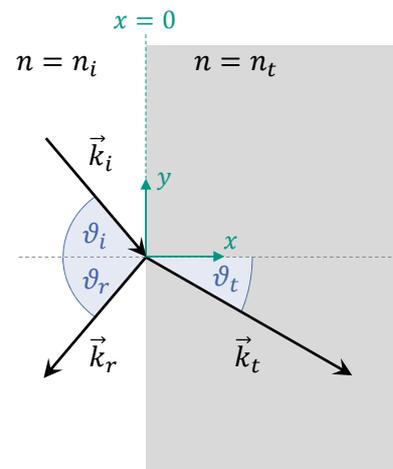
An der Grenzfläche gilt für die Tangentialkomponente (hier im Koordinatensystem):

$$E_{yi} e^{-i\omega_i t} + E_{yr} e^{-i\omega_r t} = E_{yt} e^{-i\omega_t t}$$

Dieses ist für alle Zeiten  $t$  nur erfüllt für

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

Die an der Lichtbrechung beteiligten Wellen haben dieselbe Frequenz  $\omega$ .



Beim Übergang zwischen zwei Medien verschiedener Brechzahl ändert sich nur die Wellenzahl  $k$  bzw. die Wellenlänge  $\lambda$ .

$$k = \frac{\omega}{c_0} n \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{c_0}{n}$$

An allen Punkten der Grenzfläche,  $x = 0$ , müssen die Phasen der Wellen übereinstimmen, d.h.

$$\vec{k}_i \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_t \vec{r}$$

Damit sind die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren gleich

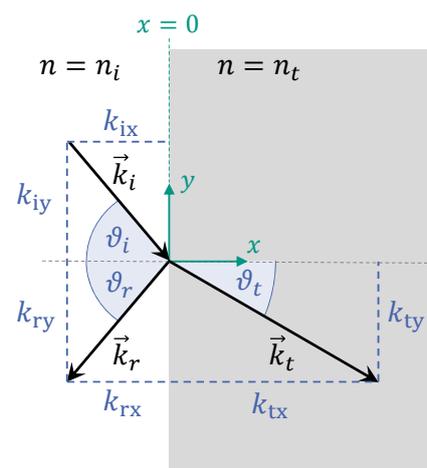
$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Wir folgern mit

$$|\vec{k}_r| = |\vec{k}_i| \quad \Rightarrow \quad \vartheta_r = \vartheta_i$$

$$\left. \begin{aligned} k_{iy} &= |\vec{k}_i| \sin \vartheta_i \\ k_{ty} &= |\vec{k}_t| \sin \vartheta_t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \frac{n_t}{n_i} \quad \text{Brechungsgesetz von Snellius}$$

Das Licht wird im optisch dichteren Medium zum Lot hin gebrochen.



## Spezialfall: Totalreflexion

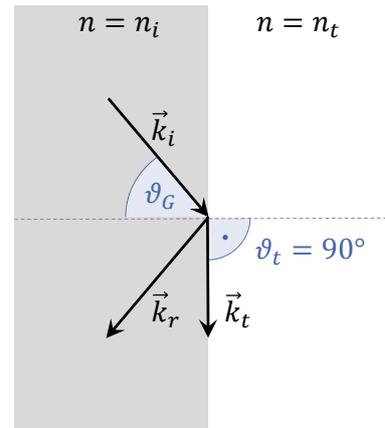
Bei Reflexion an optisch dünneren Medien ( $n_i > n_t$ ) wird das Licht vom Lot weggebrochen, so dass der Winkel  $\vartheta_t$  der transmittierten Welle  $90^\circ$  erreichen kann.

In diesem Fall wird

$$\sin \vartheta_t = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta_G = \frac{n_t}{n_i}$$

mit dem Grenzwinkel  $\vartheta_i = \vartheta_G$  der Totalreflexion.

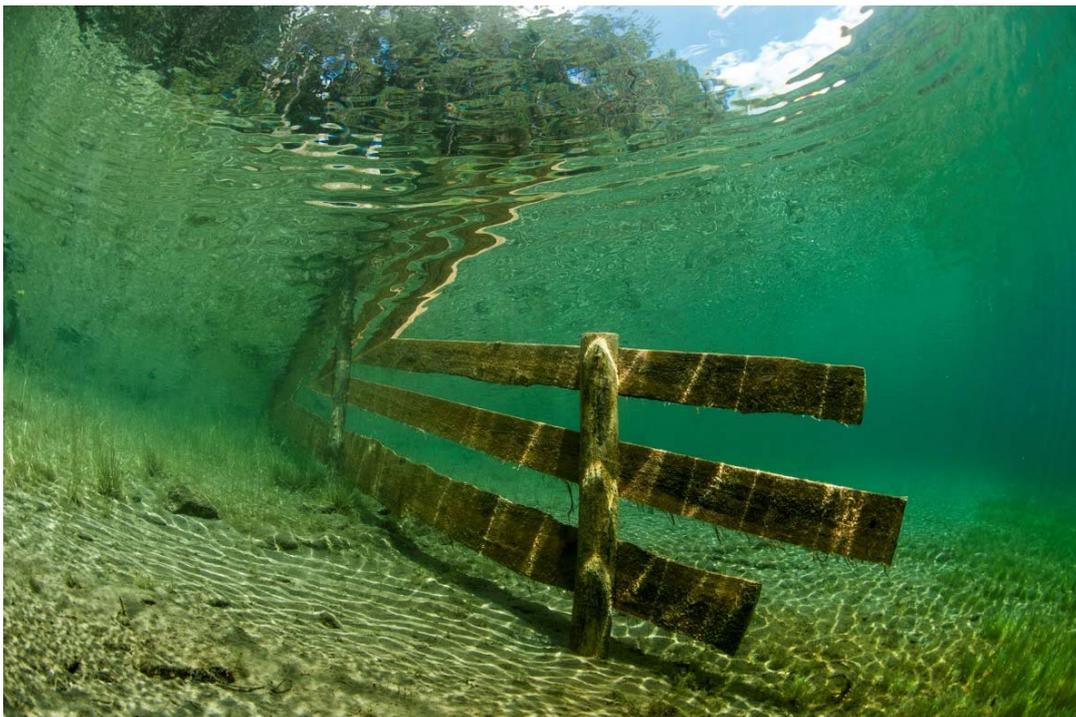
Für  $\vartheta_i \geq \vartheta_G$  wird das Licht vollständig reflektiert.



**Beispiel:** Glas/Luft-Grenzfläche

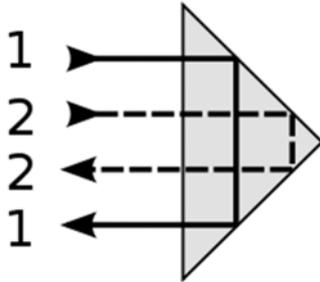
$$n_i = 1.5; n_t = 1 \quad \rightarrow \quad \vartheta_G = 41.8^\circ$$

## Beispiel



## Totalreflexion: Anwendungen

Umlenkprisma



Retroreflektor (Katzenaugen)

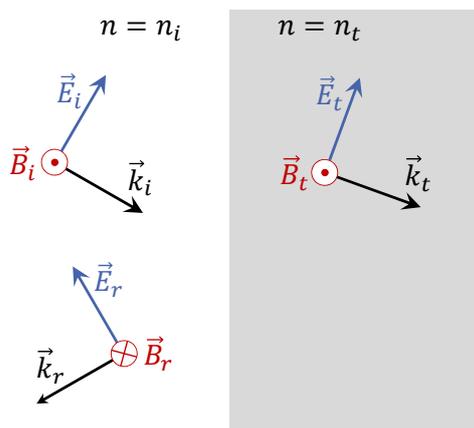


## Amplituden und Intensitäten beim schrägen Einfall

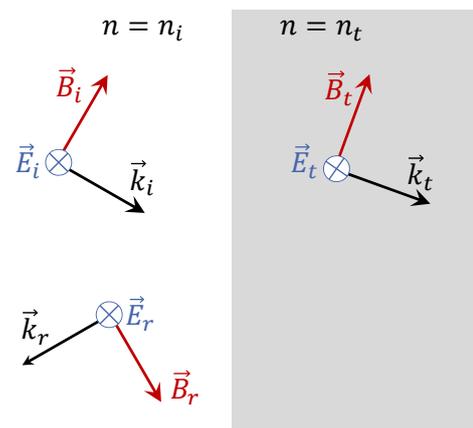
Welche Werte haben die Koeffizienten  $r$ ,  $t$ ,  $R$  und  $T$  als Funktion der Brechzahlen  $n_i$  und  $n_t$  sowie der Winkels  $\vartheta_i$  und  $\vartheta_t$ ?

**Komplikation:** Die Werte hängen von der Richtung des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  bezüglich der Einfallsebene ab.

$p$  – Polarisation:  $\vec{E} \parallel$  Einfallsebene



$s$  – Polarisation:  $\vec{E} \perp$  Einfallsebene



## Ableitung von $r_p$ für die $p$ – Polarisation

Stetigkeitsbedingung bezogen auf die Parallelkomponenten der  $E$ -Feldvektoren:

$$E_t \cos \vartheta_t = (E_i + E_r) \cos \vartheta_i$$

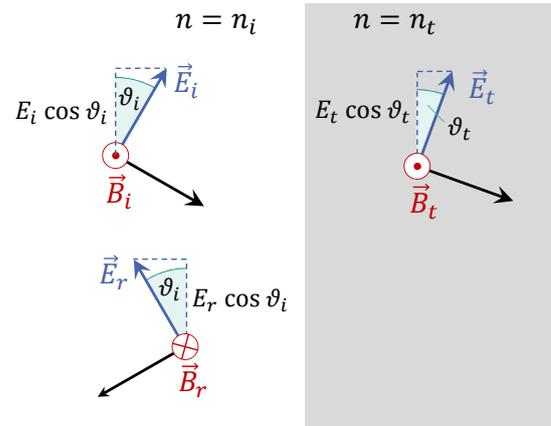
$B$ -Feldvektoren sind tangential:

$$n_t E_t = n_i (E_i - E_r)$$

Damit

$$(E_i + E_r) \cos \vartheta_i = \frac{n_i}{n_t} (E_i - E_r) \cos \vartheta_t$$

$$r_p := \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_i \cos \vartheta_t - n_t \cos \vartheta_i}{n_i \cos \vartheta_t + n_t \cos \vartheta_i}$$



Achtung: das Vorzeichen ist abhängig von der Definition der Feldvektoren (siehe Abbildung)!

## Fresnelsche Formeln für schrägen Lichteinfall

$p$  – Polarisation:  $\vec{E} \parallel$  Einfallsebene

$$r_p = \frac{n_i \cos \vartheta_t - n_t \cos \vartheta_i}{n_i \cos \vartheta_t + n_t \cos \vartheta_i}$$

$$t_p = \frac{2n_i \cos \vartheta_i}{n_i \cos \vartheta_t + n_t \cos \vartheta_i}$$

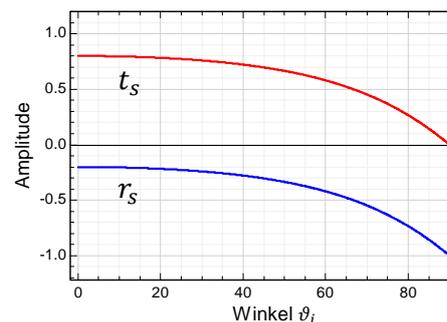
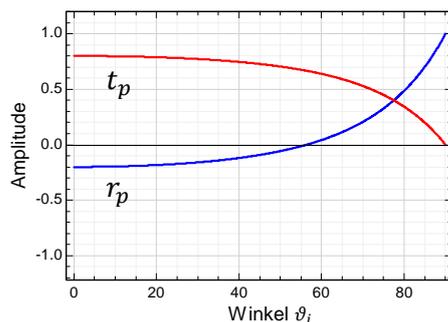
$s$  – Polarisation:  $\vec{E} \perp$  Einfallsebene

$$r_s = \frac{n_i \cos \vartheta_i - n_t \cos \vartheta_t}{n_i \cos \vartheta_i + n_t \cos \vartheta_t}$$

$$t_s = \frac{2n_i \cos \vartheta_i}{n_i \cos \vartheta_i + n_t \cos \vartheta_t}$$

Der Winkel  $\vartheta_t$  ergibt sich aus dem Brechungsgesetz.

**Beispiel:** Luft/Glas-Grenzfläche ( $n_i = 1; n_t = 1.5$ )



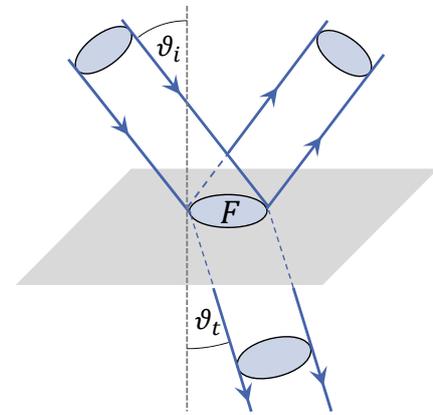
## Intensitätskoeffizienten der Reflexion und Transmission für schrägen Lichteinfall

$$R_{s,p} = r_{s,p}^2$$

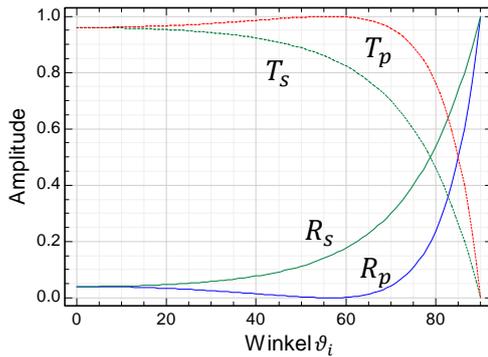
$$T_{s,p} = t_{s,p}^2 \cdot \frac{n_t \cos \vartheta_t}{n_i \cos \vartheta_i}$$

### Querschnittsflächen

einfallender Strahl:  $F \cdot \cos \vartheta_i$   
 gebrochener Strahl:  $F \cdot \cos \vartheta_t$



Beispiel: Luft/Glas-Grenzfläche ( $n_i = 1; n_t = 1.5$ )



04.12.2018

## Brewster-Winkel

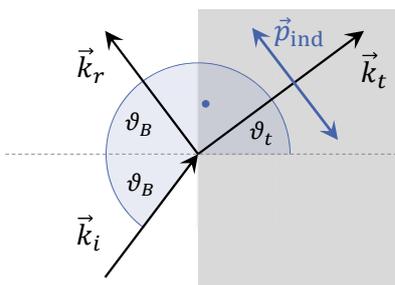
Bei  $p$ -Polarisation verschwindet die Reflexion ( $r_p = 0$ ) für einen bestimmten Einfallswinkel  $\vartheta_i = \vartheta_B$ , dem Brewster-Winkel. Zusammen mit dem Brechungsgesetz erhält man

$$r_p = 0 \quad \Rightarrow \quad n_t \cos \vartheta_B = n_i \cos \vartheta_t$$

$$n_t \sin \vartheta_t = n_i \sin \vartheta_B \quad \Rightarrow \quad n_t \cos(90^\circ - \vartheta_t) = n_i \cos(90^\circ - \vartheta_B)$$

$$\vartheta_t = 90^\circ - \vartheta_B \quad \Rightarrow \quad \tan \vartheta_B = \frac{n_t}{n_i}$$

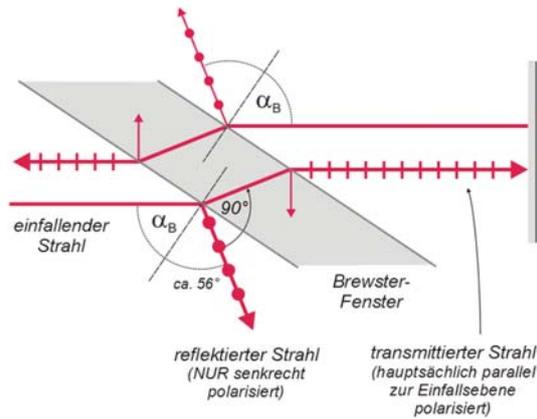
Veranschaulichung: Für den Brewster-Winkel gilt  $\vec{k}_r \perp \vec{k}_t$  !



Die Reflexion wird erzeugt durch die Polarisation des Materials, also von den durch das elektrische Feld induzierten Dipolen  $\vec{p}_{ind}$ .

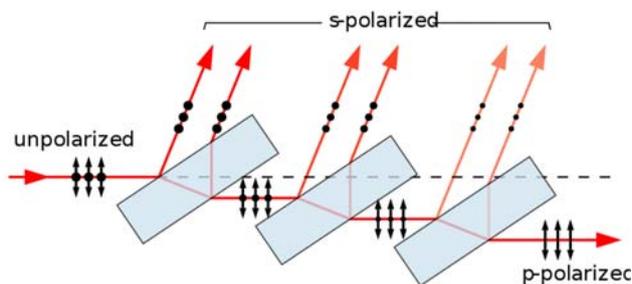
Aber ein Hertzscher Dipol strahlt nicht ab entlang seiner Schwingungsachse!

## Anwendung: Brewster-Fenster



### Fenster für Gaslaser

<https://lp.uni-goettingen.de/get/originalimage/1760>



### Polarisator (mehrere Fenster in Reihe)

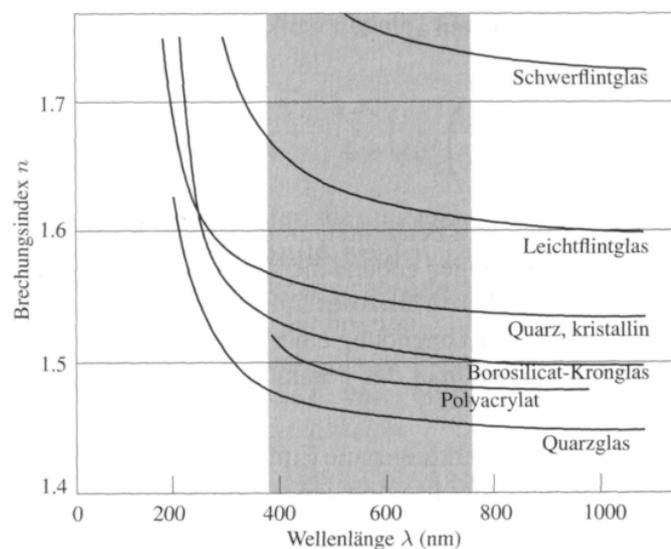
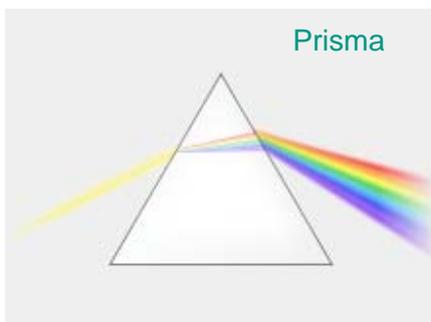
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brewster-polarizer.svg>

## Lichtbrechung in dispersiven Medien

Bislang wurde die Lichtbrechung bei fester Frequenz und konstanten Brechungsindizes betrachtet. Jedoch ist in allen Medien der Brechungsindex eine Funktion der Frequenz.

Normale Dispersion:  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$

Blaues Licht wird in der Regel stärker gebrochen als rotes.



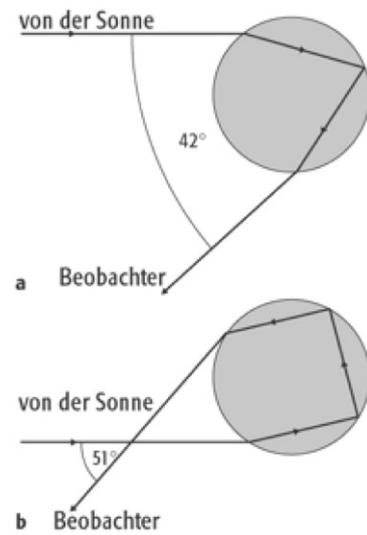
# Beispiel: Wasser

## Regenbogen und Nebenregenbogen



Kurt Flückinger  
<https://zueriost.ch/unter-dem-regenbogen-zum-sieg/890605>

400 nm:  $n = 1.343$   
 700 nm:  $n = 1.330$



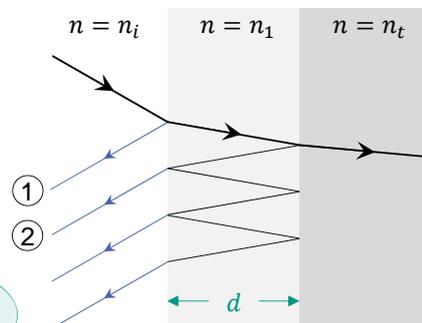
<https://www.spektrum.de/lexikon/geographie/regenbogen/6501>

## Dielektrische Schichtsysteme

Kann man die Reflexion von Licht an einer Oberfläche durch eine dünne Zwischenschicht abschwächen oder verstärken?

### $\lambda/4$ – Antireflexbeschichtung

**Idee:** Reflexion wird vermindert, wenn die reflektierten Partialwellen ① und ② destruktiv miteinander interferieren aufgrund des zusätzlichen „Hin- und Zurück“-Wegs ( $\rightarrow$  Phasenunterschied von  $180^\circ$ ).



Also für senkrechten Einfall ( $n_i < n_1 < n_t$ ):

doppelter Weg

$$\pi + m \cdot 2\pi = 2 \cdot |\vec{k}_1| d = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} d \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$$

mit Wellenlänge im Material

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_1}$$

( $\lambda/4$  – Schicht)

Wie groß muss  $n_1$  gewählt werden, damit Reflexion minimal wird?

→ die Amplituden von ① und ② müssen gleich sein:

$$\left| \frac{n_i - n_1}{n_i + n_1} \right|^2 \stackrel{!}{=} \left| \frac{n_1 - n_t}{n_1 + n_t} \right|^2$$

Also

$$(n_i - n_1)(n_1 + n_t) = (n_1 - n_t)(n_i + n_1)$$

$$\cancel{n_i n_1} + n_i n_t - n_1^2 - \cancel{n_1 n_t} = \cancel{n_1 n_1} + n_1^2 - n_i n_t - \cancel{n_1 n_t}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 = \sqrt{n_i n_t}} \quad \hat{=} \text{geometrisches Mittel}$$

**Beispiel:** Antireflexbeschichtung Glas/Luft

$$n_i = 1, n_t = 1.5 \Rightarrow n_1 = 1.225$$

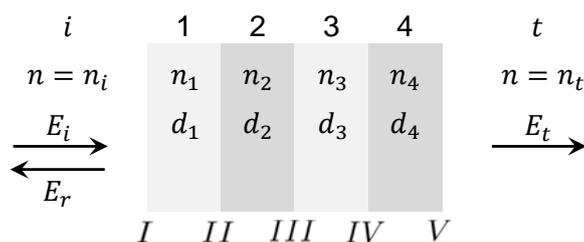
## Schräger Lichteinfall

Für Einfallswinkel  $\vartheta_i > 0$  wird bei gleicher Dicke  $d$  der optische Weg größer und man erhält entsprechend ( $m = 0; n_1 > n_i$ ):

$$d = \frac{\lambda}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{n_i^2}{n_1^2} \sin^2 \vartheta_i}$$

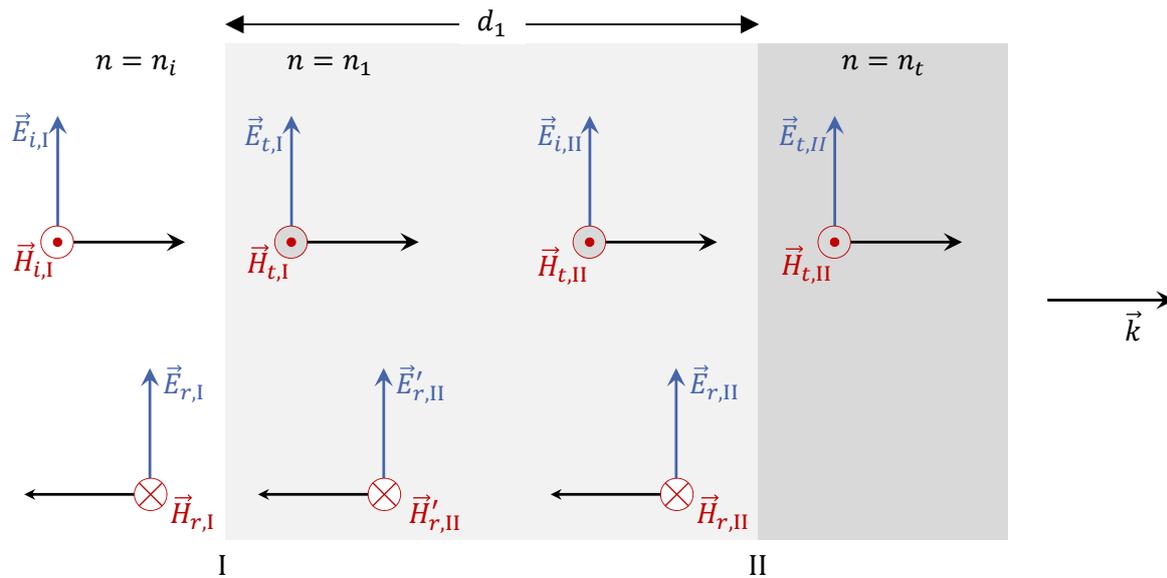
d.h. die Reflexion ist winkelabhängig und wegen Dispersion, also  $n = n(\omega)$ , auch frequenzabhängig.

**Abhilfe:** Verwende komplexes Schichtsystem bestehend aus einer Vielzahl dünner Schichten verschiedener Dicken und Brechungsindizes!



Zur Berechnung wird ein effizientes mathematisches Verfahren eingeführt.

# Transfermatrixmethode



**Idee:** Verknüpfe Gesamtfelder  $\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix}$  an den Grenzschichten über ein lineares Gleichungssystem.

## Stetigkeitsbedingungen für Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$

Mediumimpedanz  $Z$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu_0}} E = n \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = Z^{-1} E \quad \text{mit} \quad Z^{-1} = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

Grenzfläche I :

$$\begin{aligned} E_I &= E_{t,I} + E'_{r,II} \\ H_I &= H_{t,I} - H'_{r,II} \Rightarrow H_I = Z_1^{-1} (E_{t,I} - E'_{r,II}) \end{aligned}$$

Grenzfläche II :

$$\begin{aligned} E_{II} &= E_{i,II} + E_{r,II} \\ H_{II} &= H_{i,II} - H_{r,II} \Rightarrow H_{II} = Z_1^{-1} (E_{i,II} - E_{r,II}) \end{aligned}$$

Phasenverzögerungen:

$$\begin{aligned} E_{i,II} &= E_{t,I} e^{-ik_1 d_1} \\ E'_{r,II} &= E_{r,II} e^{-ik_1 d_1} \quad \text{mit} \quad k_1 = n_1 k_0 = n_1 \frac{\omega}{c_0} \end{aligned}$$

## Transfermatrix

Berechne  $E_I$  und  $H_I$  aus  $E_{II}$  und  $H_{II}$ :

$$\left. \begin{aligned} E_I &= E_{t,I} + E_{r,II} e^{-ik_1 d_1} \\ Z_1 H_I &= E_{t,I} - E_{r,II} e^{-ik_1 d_1} \\ E_{II} &= E_{t,I} e^{-ik_1 d_1} + E_{r,II} \\ Z_1 H_{II} &= E_{t,I} e^{-ik_1 d_1} - E_{r,II} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_I + Z_1 H_I &= 2 E_{t,I} \\ E_I - Z_1 H_I &= 2 E_{r,II} e^{-ik_1 d_1} \\ E_{II} + Z_1 H_{II} &= 2 E_{t,I} e^{-ik_1 d_1} \\ E_{II} - Z_1 H_{II} &= 2 E_{r,II} \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = \tilde{M}_I \cdot \begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tilde{M}_I = \begin{pmatrix} \cos(k_1 d_1) & i Z_1 \sin(k_1 d_1) \\ i Z_1^{-1} \sin(k_1 d_1) & \cos(k_1 d_1) \end{pmatrix}$$

Charakteristische Matrix (Transfermatrix)

Analog können  $N$  Schichten berechnet werden!

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = \underbrace{\tilde{M}_I \cdot \tilde{M}_{II} \dots \tilde{M}_N}_{\tilde{M}} \cdot \begin{pmatrix} E_{N+1} \\ H_{N+1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

## Feldkoeffizienten

Nun können  $r$  und  $t$  leicht bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} E_{i,I} + E_{r,I} \\ Z_i^{-1} (E_{i,I} - E_{r,I}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{t,N+1} \\ Z_t^{-1} E_{t,N+1} \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \div E_{i,I}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1 + r &= m_{11} t + m_{12} Z_t^{-1} t \\ Z_i^{-1} (1 - r) &= m_{21} t + m_{22} Z_t^{-1} t \end{aligned}$$

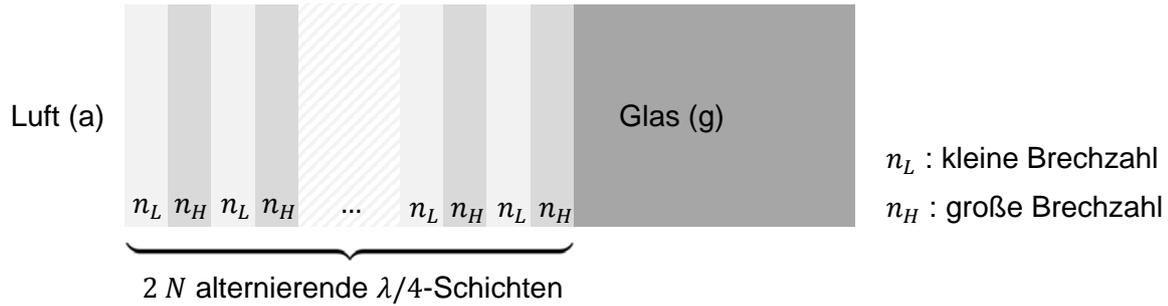
Feld-Reflexionskoeffizient

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_i^{-1} m_{11} + Z_i^{-1} Z_t^{-1} m_{12} - m_{21} - Z_t^{-1} m_{22}}{Z_i^{-1} m_{11} + Z_i^{-1} Z_t^{-1} m_{12} + m_{21} + Z_t^{-1} m_{22}}$$

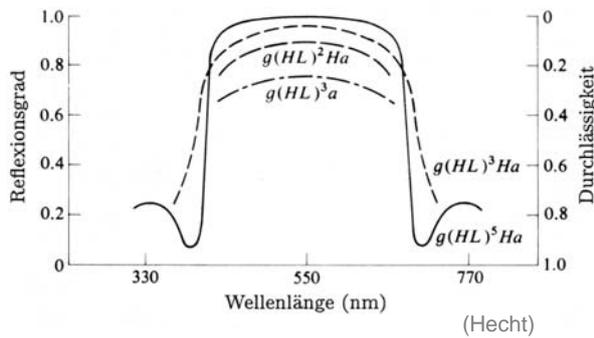
Feld-Transmissionskoeffizient

$$t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 Z_i^{-1}}{Z_i^{-1} m_{11} + Z_i^{-1} Z_t^{-1} m_{12} + m_{21} + Z_t^{-1} m_{22}}$$

# Beispiel



Oder abgekürzt:  $g (HL)^N a$



## Technisch relevant

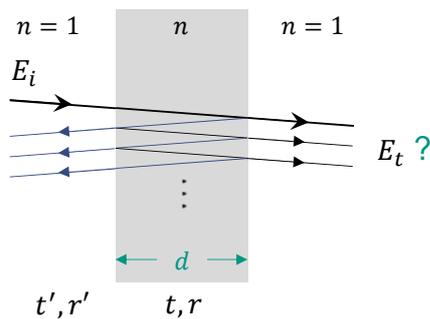
H: Zirkoniumdioxid	n=2.1
Titandioxid	n=2.4
Zinksulfid	n=2.32
L: Magnesiumfluorid	n=1.38
Ceriumfluorid	n=1.63

## Anwendungen

- Spiegel für Laser
- Filter

# Vielstrahl-Interferenz

Planparallele Platte (in Luft)



Phasenverschiebung in Platte (hin und zurück):

$$\delta = k \cdot 2d = 2nk_0d$$

Berechne transmittiertes Feld

$$E_t = E_i t' e^{i\frac{\delta}{2}} t (1 + r^2 e^{i\delta} + (r^2 e^{i\delta})^2 + \dots)$$

$$= E_i e^{i\frac{\delta}{2}} t t' \sum_{m=0}^{\infty} (r^2 e^{i\delta})^m$$

$$\left( \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q} \text{ geometrische Reihe} \right)$$

Senkrechte Inzidenz:

$$t' = \frac{2 \cdot 1}{1+n} \quad ; \quad t = \frac{2n}{n+1}$$

$$r' = \frac{1-n}{1+n} \quad ; \quad r = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\Rightarrow E_t = E_i e^{i\frac{\delta}{2}} t t' \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

Berechne Transmission:  $\frac{I_t}{I_i} = \left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2$  ;  $\frac{E_t}{E_i} = e^{i\frac{\delta}{2}} tt' \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}$

1)  $tt' + r^2 = 1 \Rightarrow |tt'|^2 = (1 - r^2)^2$

2)  $|1 - r^2 e^{i\delta}|^2 = (1 - r^2 e^{i\delta})(1 - r^2 e^{-i\delta})$   
 $= 1 - r^2(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + r^4$  |  $e^{i\delta} + e^{-i\delta} = 2 \cos \delta$   
 $= 1 + r^4 - 2r^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}\right)$  |  $2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 - \cos \delta$   
 $= (1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$

Airy-Formeln:

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad \frac{I_r}{I_i} = \frac{F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

mit Finesse-Faktor  $F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$  ;  $R = |r|^2$

Interferenzmaxima für  $\delta = m \cdot 2\pi$ , also

$$nk_0 d = m \cdot \pi \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(konstruktive Interferenz der Partialwellen)

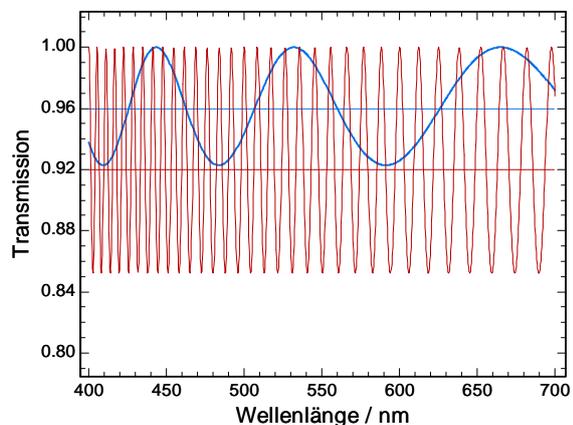
Beispiele

Seifenblase,  $d \approx 1 \mu\text{m}$ ,  $n=1.33$   
 $\rightarrow R=0.02$  und  $F=0.083$

- ohne Interferenz (gestrichelt)
- mit Interferenz (blau)

Polymerfolie,  $d \approx 10 \mu\text{m}$ ,  $n=1.5$   
 $\rightarrow R=0.04$  und  $F=0.174$

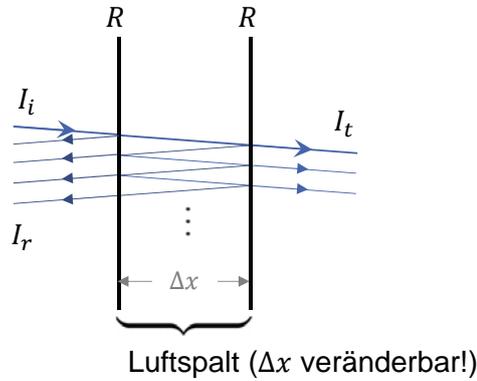
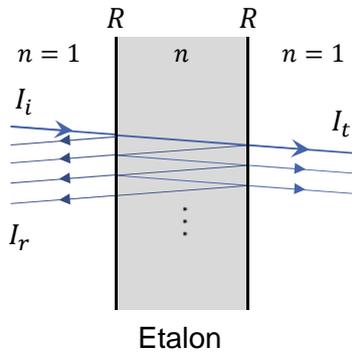
- ohne Interferenz (gestrichelt)
- mit Interferenz (rot)



# Fabry-Pérot-Interferometer

Kann man die Reflexion erhöhen ohne Vergrößerung der Brechzahl  $n$ ?

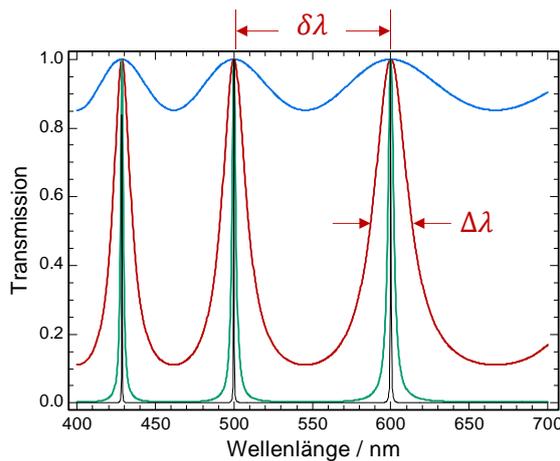
Ja! Bringe dünnen, schwach durchlässigen Spiegel auf die Oberflächen auf. Die Airy-Formeln können ungeändert übernommen werden, da der Finesse-Faktor nur von  $R$  abhängig ist.



Fabry & Pérot  
(1897)

## Anwendungen

- Hochauflösende Spektroskopie
- Filter, Laserresonator



Parameter:

$$d = 1.0 \mu\text{m}$$

$$n = 1.5$$

—  $R = 0.04 \rightarrow F = 0.17$

—  $R = 0.50 \rightarrow F = 8.00$

—  $R = 0.90 \rightarrow F = 360$

—  $R = 0.99 \rightarrow F = 39600$

Freier Spektralbereich (für Frequenzen)

$$\delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c_0}{2nd}$$

Halbwertsbreite

$$\Delta\nu = \frac{c_0}{2nd} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$$

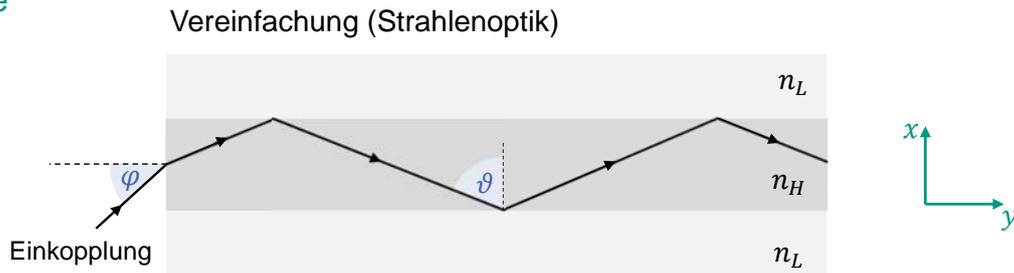
Finesse

$$F^* = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}$$

Begrenzt durch Planparallelität:  
typ. 30; max. ~1000

# Wellenleiter

## Idee



## Notwendige Bedingungen

- Brechzahl des Leiters ist größer Randschichten,  $n_H > n_L$ .
- Einfallswinkel sind größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion,  $\vartheta > \vartheta_G$ .
- Einkopplung geschieht meist an einer Endfläche.

## Fragen

- Ist für alle Winkel  $\vartheta > \vartheta_G$  die Lichtleitung möglich (unendlich viele Lösungen)?
- Spielen Interferenzeffekte eine Rolle (vgl. Fabry-Pérot)?
- Wie klein darf die Dicke der  $n_H$ -Schicht minimal gewählt werden?
- Wie ist das Intensitätsprofil in der Querschnittsfläche (hier  $x$ -Richtung)?
- Dringt das Licht bei der Totalreflexion in die  $n_L$ -Schicht ein?

## Einschub: Oberflächenwellen

Brechungsgesetz für Totalreflexion (zu Luft,  $n_t = 1$ ):

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \frac{1}{n_i} \Rightarrow \sin \vartheta_t = n_i \sin \vartheta_i \geq 1$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta_t = i \sqrt{n_i^2 \sin^2 \vartheta_i - 1}$$

reelle Zahl  $\geq 0$

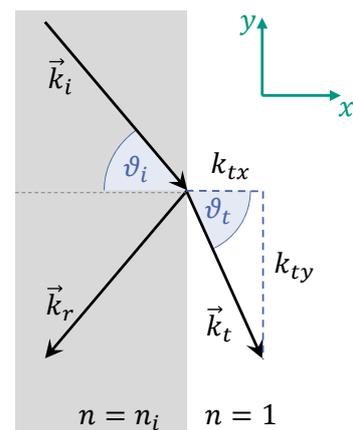
Komponenten des Wellenvektors  $\vec{k}_t$ :

$$k_{ty} = k_0 \sin \vartheta_t = k_0 n_i \sin \vartheta_i$$

$$k_{tx} = k_0 \cos \vartheta_t = k_0 i \sqrt{n_i^2 \sin^2 \vartheta_i - 1}$$

Setze ein in Phase von  $\vec{E}_t$ :

$$\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_{tx} x + k_{ty} y = i \sqrt{n_i^2 \sin^2 \vartheta_i - 1} \cdot k_0 x + n_i \sin \vartheta_i \cdot k_0 y$$



Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}_t$  ist dann eine evaneszente Welle

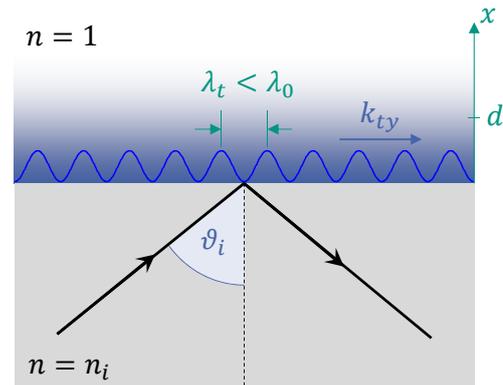
$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \cdot e^{i(\vec{k}_t \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_{t0} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \underbrace{e^{ik_{ty} y}}_{\text{Propagation in y-Richtung}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{d}}}_{\text{Abklingen in x-Richtung}}$$

mit Propagation entlang der Grenzfläche mit

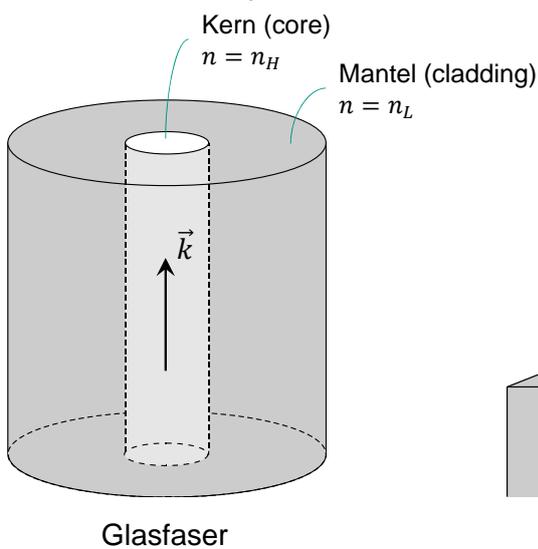
$$k_{ty} = \frac{2\pi}{\lambda_t} ; \quad \lambda_t = \frac{\lambda_0}{n_i \sin \vartheta_i}$$

sowie exponentiellem Abfall in  $x$ -Richtung mit

$$d = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n_i^2 \sin^2 \vartheta_i - 1}}$$



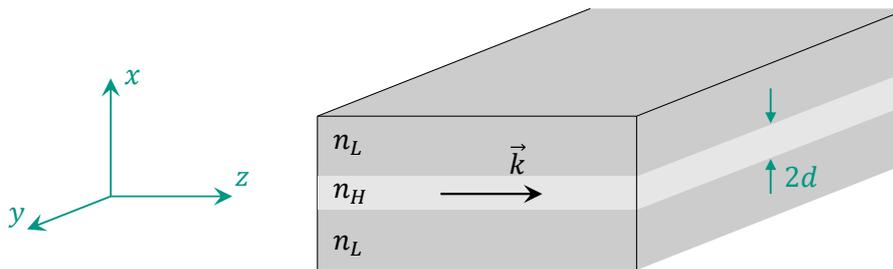
### Wellenleiter: Beispiele



Typisch:

- $n_H = 1.4616; n_L = 1.4571$
- Core  $\varnothing = 5 \mu\text{m}$
- Mantel  $\varnothing = 125 \mu\text{m}$

## Planarer symmetrischer Wellenleiter



### Zwei Polarisationen

$$\begin{array}{l}
 TM: \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \vec{E} \\ \vec{k} \end{array} \\
 TE: \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \vec{k} \\ \vec{E} \end{array}
 \end{array}$$

37 04.12.2018

Wir betrachten hier nur die TE-Polarisation:

### Wellengleichung

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad \left| \quad c = \frac{c_0}{n(x)} ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
 \right.$$

### Ansatz

$$E_y(x, z, t) = \tilde{E}_y(x) e^{i(k_z z - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial x^2} + \underbrace{\left( n^2(x) \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 \right)}_{=: \gamma^2} \tilde{E}_y = 0$$

$\gamma^2 < 0$  oder  $\gamma^2 > 0$  ;  
In einem Medium konstant

### Folgerungen

- Der Betrag des Wellenvektors ist  $k = n\omega/c_0$ . Für dessen Komponente senkrecht zur Schicht gilt somit  $k_x^2 = k^2 - k_z^2 = \gamma^2$ .
- Wir erwarten für eine geführte Welle
  - innerhalb der  $n_H$ -Schicht eine Propagation mit reellem  $\gamma$ , also  $\gamma^2 = \gamma_H^2 > 0$ .
  - außerhalb der  $n_H$ -Schicht evaneszente Felder (imaginäres  $\gamma$ ), also  $\gamma^2 = \gamma_L^2 < 0$ .

38 04.12.2018

1. Teillösung:  $\gamma^2 = \gamma_H^2 > 0$  für  $n = n_H$ , also  $-d \leq x \leq d$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial x^2} + \gamma_H^2 \tilde{E}_y = 0 \quad \text{Ansatz: } \tilde{E}_y(x) = A \sin(\gamma_H x) + B \cos(\gamma_H x)$$

2. und 3. Teillösung:  $\gamma^2 = -\gamma_L^2 < 0$  für  $n = n_L$ , für  $x \leq -d$  und  $d \leq x$

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial x^2} - \gamma_L^2 \tilde{E}_y = 0 \quad \text{Ansatz: } \tilde{E}_y(x) = C e^{-\gamma_L x} + D e^{+\gamma_L x}$$

Forderungen:

- Die Felder der 2. und 3. Teillösung verschwinden für  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow +\infty$ .
- Die Teillösungen gehen bei  $x = \pm d$  stetig ineinander über.
- Die Ableitungen der Teillösungen gehen bei  $x = \pm d$  stetig ineinander über.
- Das Intensitätsprofil  $I_y(x) \sim |\tilde{E}_y|^2$  ist wegen der Symmetrie der Schichtenanordnung achsensymmetrisch.

Wegen (d) gibt es symmetrische Lösungen,  $\tilde{E}_y(x) = \tilde{E}_y(-x)$ , und antisymmetrische Lösungen,  $\tilde{E}_y(x) = -\tilde{E}_y(-x)$ . Wir betrachten hier nur die symmetrischen Lösungen, also

$$A = 0$$

Dann gilt mit (a) für die Teillösungen 2 und 3

$$\tilde{E}_y(x) = C e^{-\gamma_L |x|}$$

und folglich aufgrund (b) und (c)

$$\left. \begin{aligned} B \cos(\gamma_H d) &= C e^{-\gamma_L d} \\ -\gamma_H B \sin(\gamma_H d) &= -\gamma_L C e^{-\gamma_L d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma_H \tan(\gamma_H d) = \gamma_L$$

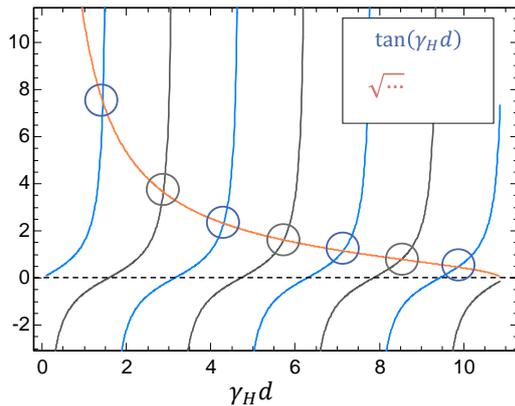
Mit den Definitionen von  $\gamma_H^2$  und  $\gamma_L^2$  gilt zudem

$$\left. \begin{aligned} n_H^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 &= +\gamma_H^2 \\ n_L^2 \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_z^2 &= -\gamma_L^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma_L = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} (n_H^2 - n_L^2) - \gamma_H^2}$$

Durch Eliminierung von  $\gamma_L$  erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für  $\gamma_H$ :

$$\tan(\gamma_H d) = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{c_0^2} (n_H^2 - n_L^2) d^2}{(\gamma_H d)^2} - 1}$$

Lösung für  $\gamma_H$  entweder graphisch oder numerisch möglich.



— symmetrische Lösungen  
— antisymmetrische Lösungen

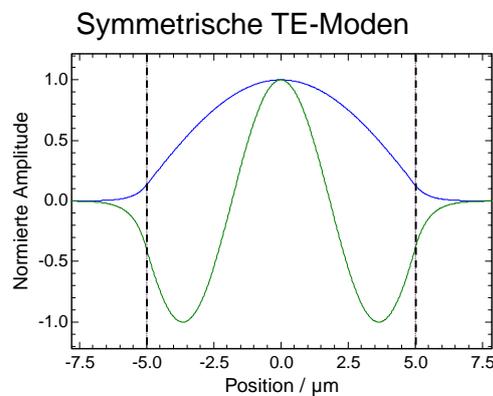
Es gibt ...

- nur Lösungen wenn  $n_H > n_L$
- immer mindestens eine Lösung
- endlich viele Lösungen abhängig von  $(n_H^2 - n_L^2) d^2$

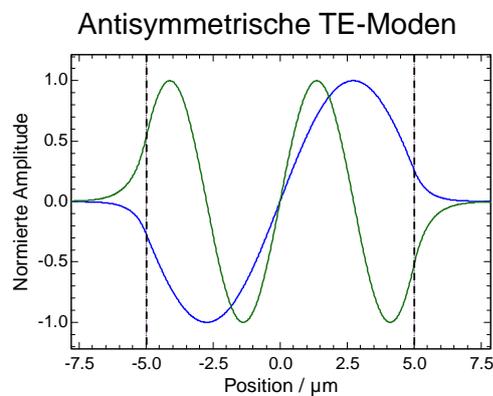
## Modenprofile - Beispiel

### Werte

$n_H = 1.50$ ;  $n_L = 1.49$ ;  $d = 5 \mu\text{m}$ ;  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$



—  $\text{TE}_0$  ( $\gamma_H d = 1.440$ )  
—  $\text{TE}_2$  ( $\gamma_H d = 4.305$ )



—  $\text{TE}_1$  ( $\gamma_H d = 2.875$ )  
—  $\text{TE}_3$  ( $\gamma_H d = 5.730$ )

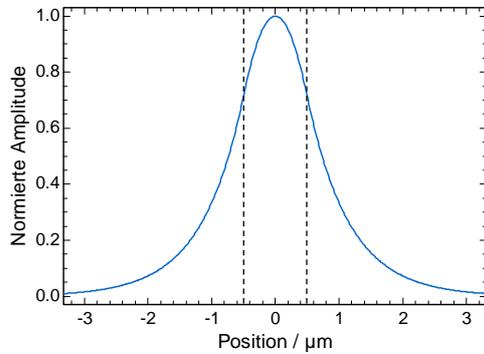
(Insgesamt 7 Moden)

## Modenprofile - Beispiel

### Werte

$$n_H = 1.50; n_L = 1.49; d = 0.5 \mu\text{m}; \lambda_0 = 500 \text{ nm}$$

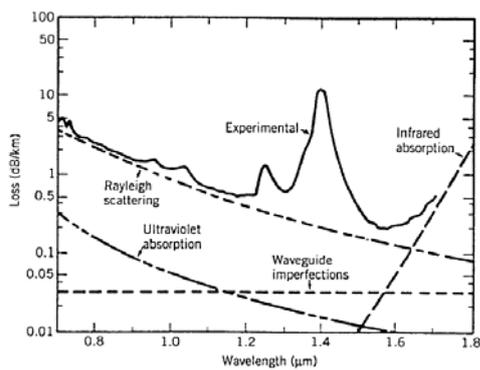
### Symmetrische TE-Mode



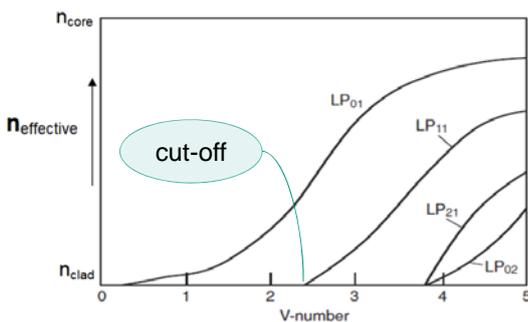
—  $\text{TE}_0$  ( $\gamma_H d = 0.7755$ ) („single mode“)

43 04.12.2018

## Glasfasern : Dämpfung und „Cut-off“ - Wellenlänge



G.P. Agrawal, *Fiber-Optic Communication Systems*, J. Wiley & Sons, 2002.



Normalisierte Frequenz (oder V-Zahl) und Numerische Apertur (NA)

$$V = \frac{2\pi r}{\lambda} NA; \quad NA = \sin \varphi = \sqrt{n_H^2 - n_L^2}$$

mit Kernradius  $r$  und Einkoppelwinkel  $\varphi$ .

Newport, Photonics Technical Note #21, Fiber Optics

44 04.12.2018

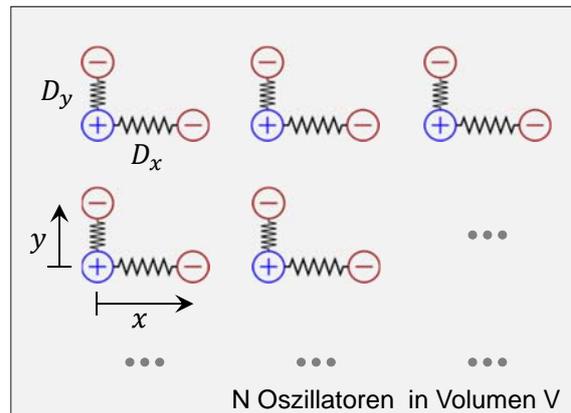
## Optisch anisotrope Materialien (vgl. Kap. 2)

- Rückstellkraft beim Lorentz-Oszillator hängt von der Schwingungsrichtung ab.
- Schwingungsrichtung der Oszillatoren ist in der Regel nicht mehr parallel zu  $\vec{E}$ .
- Suszeptibilität und Brechzahl  $n$  sind von Polarisation und Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  der Welle abhängig, so dass

$$\vec{P} \nparallel \vec{E} ; \quad \vec{D} \nparallel \vec{E}$$

Wir verallgemeinern daher

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \tilde{\chi} \vec{E} \quad \text{mit Suszeptibilitätstensor} \quad \tilde{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$



## Doppelbrechung

Es ist

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \vec{E}$$

In anisotropen Materialien ist wegen  $n = \sqrt{\varepsilon}$  auch der Brechungsindex von der Richtung im Medium abhängig und somit ebenfalls ein Tensor:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} n_{xx} & n_{xy} & n_{xz} \\ n_{yx} & n_{yy} & n_{yz} \\ n_{zx} & n_{zy} & n_{zz} \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten des Tensors hängen ab vom gewählten Koordinatensystem. Wird dieses entlang der Symmetrieachsen des Mediums ausgerichtet, findet man in vielen Fällen (reeller, symmetrischer Tensor)

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix}$$

mit Brechungsindizes  $n_1, n_2$  und  $n_3$  entlang der „optischen Hauptachsen“.

Ein Material mit  $n_1 = n_2 \neq n_3$  heißt „optisch einachsig“.

Der allgemeine Fall  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$  heißt „optisch zweiachsig“.

Wie verhalten sich der Wellenvektor  $\vec{k}$  und der Poynting-Vektor  $\vec{S}$  ?

Mit

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad ; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

folgt sofort

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{D} \perp \vec{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} \not\perp \vec{k}} \quad !$$

Entsprechend

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{B} \quad ; \quad \vec{k} \perp \vec{H} \quad (\text{wegen } \vec{B} = \mu_0 \vec{H})$$

Weiter gilt

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{k} \not\parallel \vec{S}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{S} \perp \vec{E}}$$

d.h. der Wellenvektor  $\vec{k}$  kann nicht mehr als Strahlrichtung interpretiert werden.

In anisotropen Kristallen sind im Allgemeinen Ausbreitungsrichtung der Lichtwelle und Energielflussrichtung voneinander verschieden.

Wie wird die Phasengeschwindigkeit  $\vec{c} \parallel \vec{k}$  (und damit  $n$ ) für eine gegebene Richtung von  $\vec{D}$  bestimmt?

Die Energiedichte ist im Hauptachsensystem gegeben durch

$$w = \langle \vec{E} \cdot \vec{D} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} \right)$$

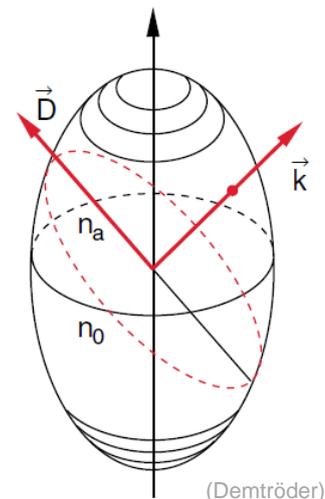
d.h. die Fläche konstanter Energiedichte ist ein Ellipsoid mit den Halbachsen  $n_1, n_2$  und  $n_3$ .

Das **Indexellipsoid** ist definiert als

$$\frac{n_x^2}{n_1^2} + \frac{n_y^2}{n_2^2} + \frac{n_z^2}{n_3^2} = 1$$

Der Vektor  $\vec{n}_s = \{n_{xs}, n_{ys}, n_{zs}\}$  ist sein Schnittpunkt mit  $\vec{D}$ . Der Betrag von  $\vec{n}_s$  legt die Phasengeschwindigkeit fest,  $c = c_0/n_s$ .

Für eine gegebene Richtung von  $\vec{k}$  hängt  $n$  von der Polarisationsrichtung ab. Ergeben alle Polarisierungen für ein  $\vec{k}$  denselben Index  $n = n_o$ , heißt diese Richtung „**optische Achse**“.



## Beispiel

Kalkspat ( $\text{CaCO}_3$ ) ist ein optisch einachsiger Kristall mit einer ausgezeichneten kristallographischen Achse, die  $\vec{c}$ -Achse.

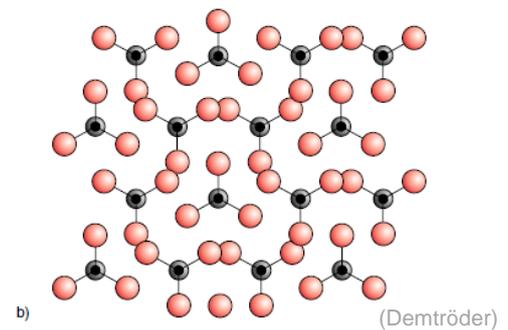
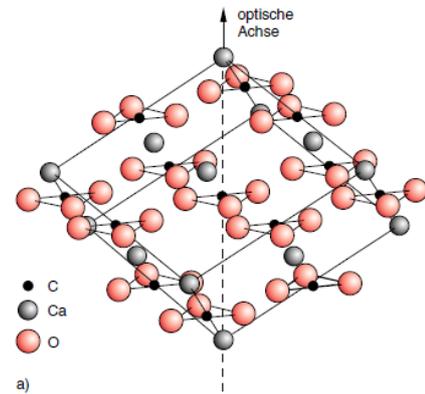
$$\vec{E} \perp \vec{c} : n_{\perp} = n_o \quad \text{ordentliche Polarisation}$$

$$\vec{E} \parallel \vec{c} : n_{\parallel} = n_a \quad \text{außerordentliche Pol.}$$

Für Na-D-Linie ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ):

$$n_{\perp} = 1.658 \quad \text{'langsame Achse'}$$

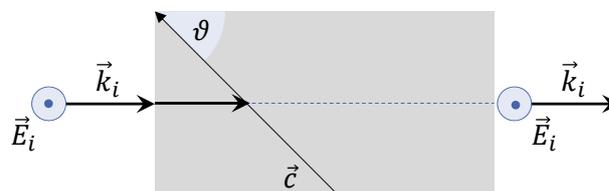
$$n_{\parallel} = 1.489 \quad \text{'schnelle Achse'}$$



## Polarisation durch Doppelbrechung

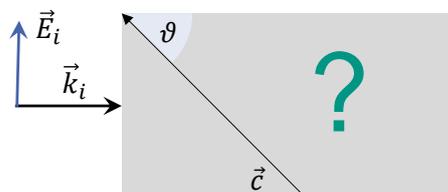
Wir betrachten die Brechung des Lichts an einem doppelbrechenden Kristall für den Spezialfall, dass die Hauptachse  $\vec{c}$  in der Einfallsebene liegt und um  $\vartheta$  gegenüber der Eintrittsfläche geneigt ist.

a)  $\vec{E}_i$  ist s-polarisiert



Einfach: Der Strahl verhält sich wie bei isotropen Medien, da immer  $\vec{E}_i \perp \vec{c} \rightarrow$  ordentlicher Strahl.

b)  $\vec{E}_i$  ist p-polarisiert



Komplizierter:  $\vec{E}_i$  hat Komponenten sowohl parallel als auch senkrecht zu  $\vec{c}$ .

### Folgerungen aus Diskussion:

1) Die Normalkomponente von  $\vec{D}$  ist stetig. Da diese bei senkrechter Inzidenz Null ist, ist sie auch im Medium Null.

Die Richtung von  $\vec{D}$  ändert sich nicht beim Übergang ins Medium.

2) Vor und im Medium gilt  $\vec{k} \perp \vec{D}$ .

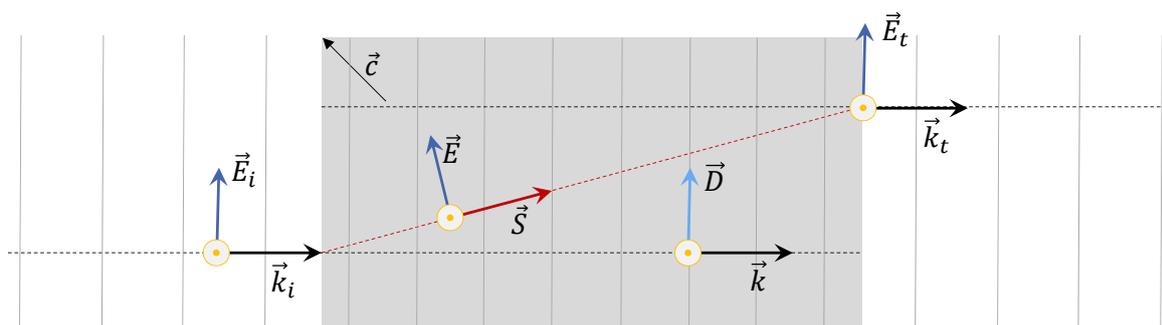
Die Richtung von  $\vec{k}$  ändert sich nicht beim Übergang ins Medium.

3) Im Allgemeinen sind  $\vec{E}$  und  $\vec{S}$  nicht senkrecht zu  $\vec{k}$ .

Die Richtungen von  $\vec{E}$  und  $\vec{S}$  ändern sich beim Übergang ins Medium.

51 04.12.2018

### Schematisch: außerordentlicher Strahl



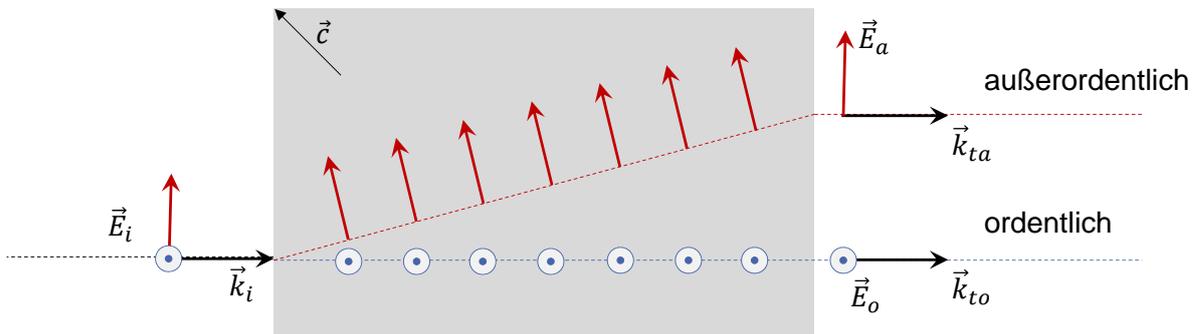
$$\odot \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \parallel \vec{H}$$

Flächen konstanter Phase

(z.B. Maxima für  $\vec{k}\vec{r} - \omega t_0 = \text{const}$  zur Zeit  $t = t_0$ )

52 04.12.2018

c) Beliebige Polarisation von  $\vec{E}_i$



Ein beliebig polarisierter Strahl wird in zwei orthogonale Komponenten zerlegt, von denen eine immer senkrecht zur Hauptachse  $\vec{c}$  gewählt werden kann. Dieser Teilstrahl verhält sich bei der Brechung wie in einem isotropen Material (ordentlicher Strahl). Die andere Komponente hat Beiträge sowohl senkrecht als auch parallel zu  $\vec{c}$  und bildet den außerordentlichen Strahl.

Isofrequenzkurve

Bestimme Brechwinkel für  $\vec{k}$  und  $\vec{S}$  (ordentlicher und außerordentlicher Strahl).

**Prinzip:** Bei der Brechung bleibt die Tangentialkomponente  $k_y$  von  $\vec{k}$  und die Frequenz  $\omega$  (bzw.  $k_0 = \omega/c_0$ ) erhalten. Zeichne  $k_0$  für alle Winkel (Isofrequenzkurve) und bestimme Schnittpunkt mit  $k_y$ .

Ordentlicher Strahl

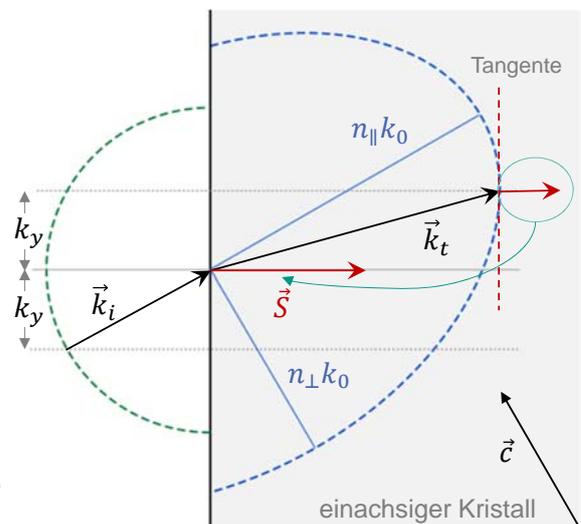
Wegen  $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$  erhält man

$$k_0^2 = \frac{k_{\parallel}^2}{n_{\perp}^2} + \frac{k_{\perp}^2}{n_{\parallel}^2}$$

worin  $k_{\parallel}$  und  $k_{\perp}$  die gesuchten Komponenten parallel und senkrecht zur Achse  $\vec{c}$  darstellen.

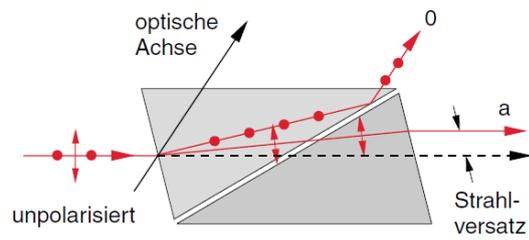
Außerordentlicher Strahl

Man kann zeigen, dass das elektrische Feld in Richtung der Tangente an der Isofrequenzkurve im Schnittpunkt zeigt. Damit ist die Richtung des Poynting-Vektors  $\vec{S}$  senkrecht zur Tangente.



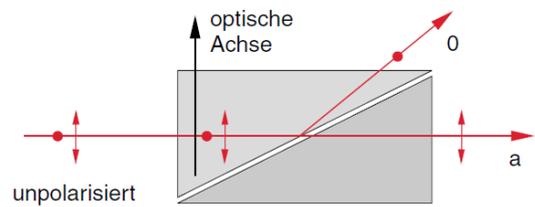
# Doppelbrechende Polarisatoren

## Nicolsches Prisma



Material: negativ optisch einachsiger Kristall

## Glan-Thompson-Polarisator



(Demtröder)

Material : CaCO<sub>3</sub>

**Prinzip:** Das Prisma wird schräg geschnitten und mit einem Kleber (oder bei sehr dünnem Luftspalt) wieder zusammengefügt. Dessen Brechungsindex wird so gewählt, dass für den ordentlichen Strahl Totalreflexion auftritt, der außerordentliche Strahl aber (teilweise) hindurchtreten kann.

Im **Ergebnis** ist der transmittierte Strahl vollständig polarisiert. Ein Vorteil des GT-Polarisators ist, dass er keinen Strahlversatz erzeugt.

## Verzögerungsplättchen

Die  $\vec{c}$  - Achse liegt in der Ebene des Plättchens.

Für die Polarisationen

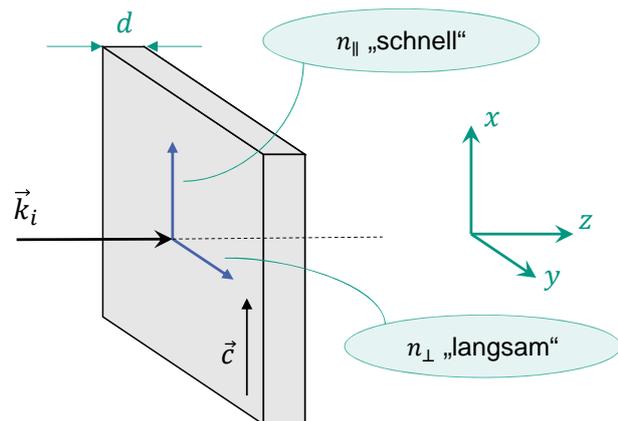
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

ändert sich offenbar nichts im Vergleich zu isotropen Materialien.

Interessant ist dagegen

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_0 z - \omega t)}$$

vor Eintritt in das Plättchen.



z.B. aus Glimmer (Schichtsilikat)

Wir definieren

- $z = 0$ : Frontseite des Plättchens
- $z = d$ : Hinterseite des Plättchens

(Reflexionen werden im Folgenden vernachlässigt.)

Dann wird

$$\vec{E}(z = d) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i n_{\parallel} k_0 d} \\ e^{i n_{\perp} k_0 d} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i n_{\parallel} k_0 d} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i (n_{\perp} - n_{\parallel}) k_0 d} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

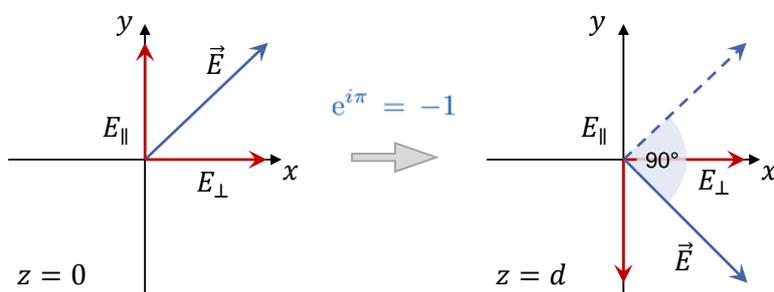
also

$$\vec{E}(z = d) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i n_{\parallel} k_0 d} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \quad ; \quad \varphi = (n_{\perp} - n_{\parallel}) k_0 d$$

Nach Austritt der Welle aus dem Plättchen hat sich die Phase der  $x$ -Komponente gegenüber der  $y$ -Komponente um  $\varphi$  verschoben.

## Anwendungen

a) Halbwellenplättchen,  $\varphi = \pi \hat{=} 180^\circ$



Hinter dem Plättchen ist die lineare Polarisation um  $90^\circ$  gedreht!

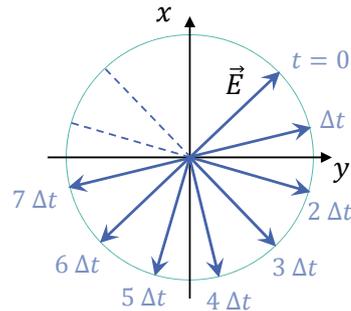
b) Viertelwellenplättchen,  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \hat{=} \pm 90^\circ$

z.B.  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ :  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} + i \cos \frac{\pi}{2} = +i$

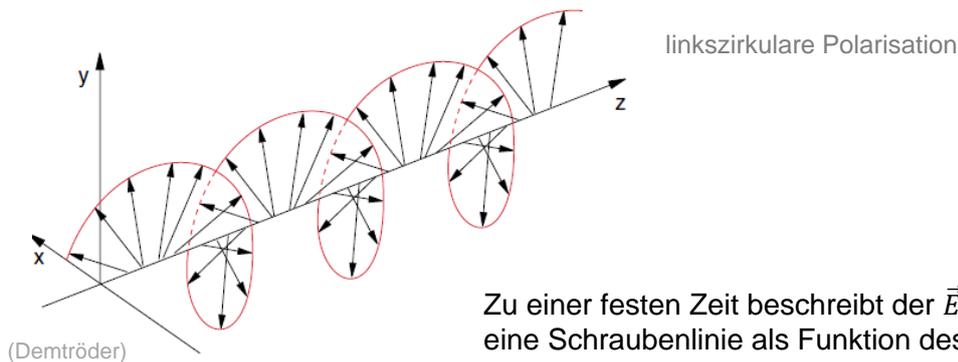
$$\vec{E}(d) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(n_\perp k_0 d - \omega t)} \Rightarrow \Re(\vec{E}(d)) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +\cos(n_\perp k_0 d - \omega t) \\ -\sin(n_\perp k_0 d - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ zirkulare Polarisation

An einem festen Ort hinter dem Plättchen dreht sich der  $\vec{E}$ -Vektor bei fester Amplitude mit konstanter Winkelfrequenz.



### Zirkulare Polarisation



Zu einer festen Zeit beschreibt der  $\vec{E}$ -Vektor eine Schraubenlinie als Funktion des Ortes  $z$ .

Eine Welle hat eine zirkulare Polarisation, wenn bei Propagation in  $z$ -Richtung die Komponenten  $E_x$  und  $E_y$  des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  immer gleiche Beträge haben, aber ihre Phasen um  $+90^\circ$  oder  $-90^\circ$  gegeneinander verschoben sind.

$$\frac{E_y}{E_x} = i \quad : \text{ linkszirkular } (\sigma^+) \qquad \frac{E_y}{E_x} = -i \quad : \text{ rechtszirkular } (\sigma^-)$$

**Rechte-Hand-Regel:** Zeigt der Daumen entgegen der Propagationsrichtung, dann zeigen die Finger den Umlaufsinn einer rechtszirkularen Welle an.

## Optische Aktivität

Die Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht wird bei Durchgang durch ein „optisch aktives“ Medium um einen Winkel  $\alpha$  gedreht, der abhängig vom Drehvermögen  $\alpha_s$  des Mediums mit der Dicke  $d$  zunimmt:  $\alpha = \alpha_s d$ .

### Auftreten in

- Festkörpern mit chiraler Symmetrie (z. B. Quarz),
- Lösungen chiraler Moleküle (Zucker, DNA, Proteine).

### Modell

Linear polarisiertes Licht kann stets in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen zerlegt werden:

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} = \underbrace{\frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}}_{\vec{E}^+} + \underbrace{\frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}}_{\vec{E}^-}$$

Im optisch aktiven Medium haben  $\vec{E}^+$  und  $\vec{E}^-$  verschiedene Brechzahlen  $n^+$  und  $n^-$  und drehen die Polarisations Ebene um

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda_0} (n^- - n^+) \cdot d$$

04.12.2018

### Beweis

Nach Durchgang durch das Medium mit Dicke  $d$  ist der Phasenunterschied der Wellen  $\vec{E}^+$  und  $\vec{E}^-$

$$\varphi = (n^+ - n^-) k_0 d$$

also

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{E_0}{2} e^{i(kz-\omega t)} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right] \\ &= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \begin{pmatrix} +\cos\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wegen

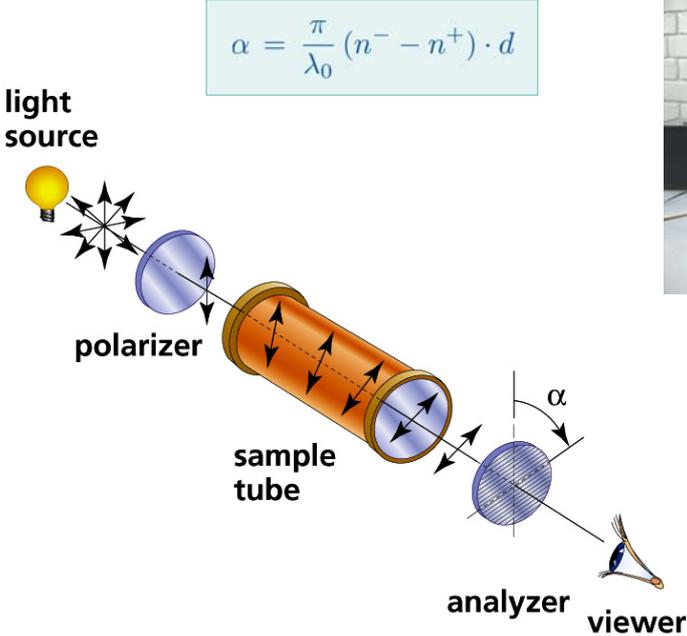
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

entspricht das gerade einer Drehung um  $\alpha = -\frac{\varphi}{2}$ .

$$\alpha = -\frac{k_0 d}{2} (n^+ - n^-) = \frac{\pi}{\lambda_0} (n^- - n^+) \cdot d$$

# Optische Aktivität: Anwendung

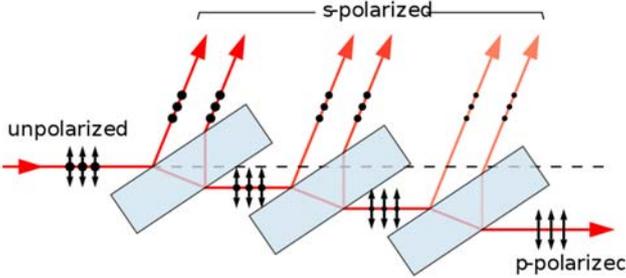
Bestimmung der Konzentration von Zuckerlösungen



04.12.2018

# Polarisatoren

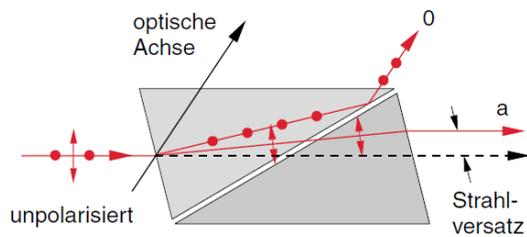
Mehrere Brewster-Fenster in Reihe



<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brewster-polarizer.svg>

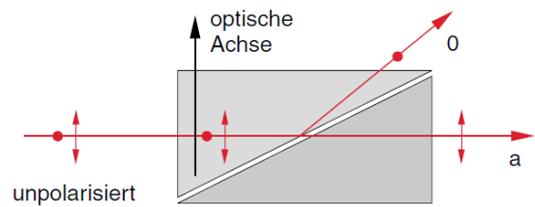
# Doppelbrechende Polarisatoren

## Nicolsches Prisma



Material: negativ optisch einachsiger Kristall

## Glan-Thompson-Polarisator



(Demtröder)

Material :  $\text{CaCO}_3$

**Prinzip:** Das Prisma wird schräg geschnitten und mit einem Kleber (oder bei sehr dünnem Luftspalt) wieder zusammengefügt. Dessen Brechungsindex wird so gewählt, dass für den ordentlichen Strahl Totalreflexion auftritt, der außerordentliche Strahl aber (teilweise) hindurchtreten kann.

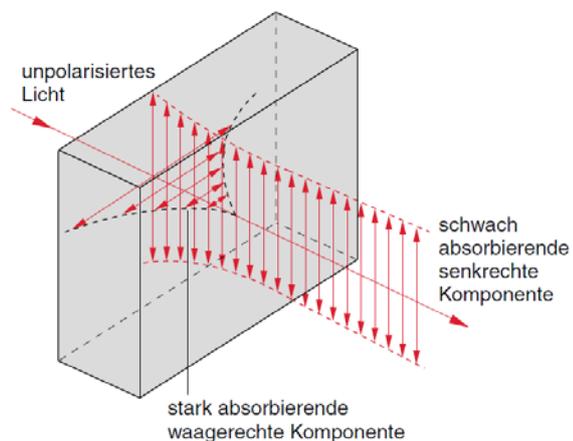
Im **Ergebnis** ist der transmittierte Strahl vollständig polarisiert. Ein Vorteil des GT-Polarisators ist, dass er keinen Strahlversatz erzeugt.

# Dichroitische Polarisatoren

Bei dichroitischen Kristallen oder Folien ist die Lichtabsorption polarisationsabhängig.

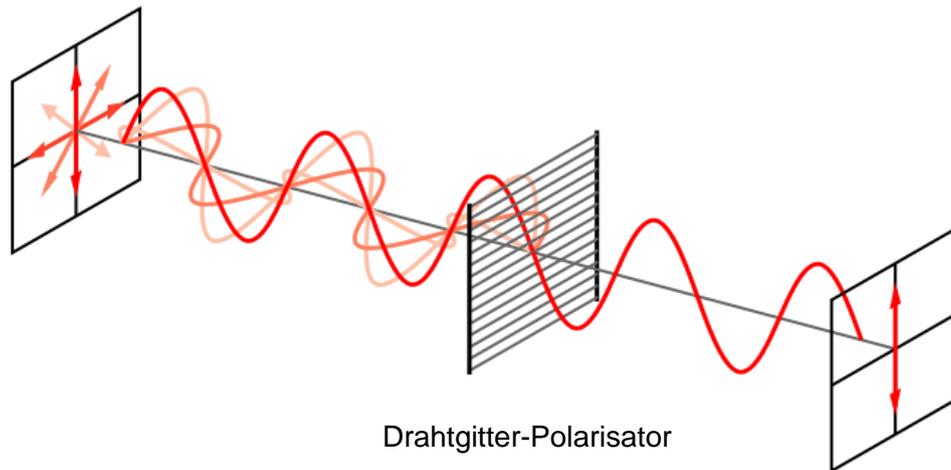
## Nachteil

Auch die gewünschte Polarisationskomponente wird geschwächt. Hohe Intensitäten führen zu thermischen Schäden des Polarisators.



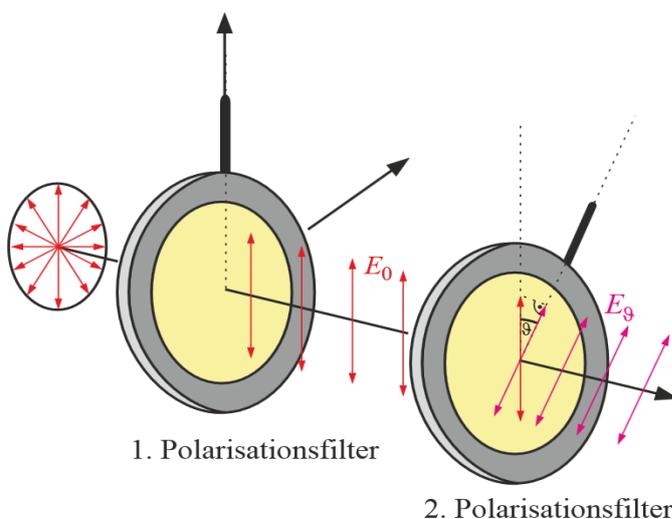
## Dichroitische Polarisatoren

Ein **Polaroid-Filter** entspricht in seiner Funktionsweise einem Drahtgitter-Polarisator für langwellige EM-Wellen. Es besteht aus Iod-dotierten (Leitfähigkeit!) Polyvinylalkohol-Ketten (PVA), die durch Streckung eines Films orientiert werden. Licht, das parallel zu den PVA-Ketten polarisiert ist, wird absorbiert.



04.12.2018

## Anwendung: Regelung der Lichtintensität



Das erste Polarisationsfilter erzeugt aus unpolarisiertem Licht linear polarisiertes Licht mit Feldstärke  $E_0$ .

Hinter dem zweiten Filter ist dann

$$E(\vartheta) = E_0 \cos \vartheta$$

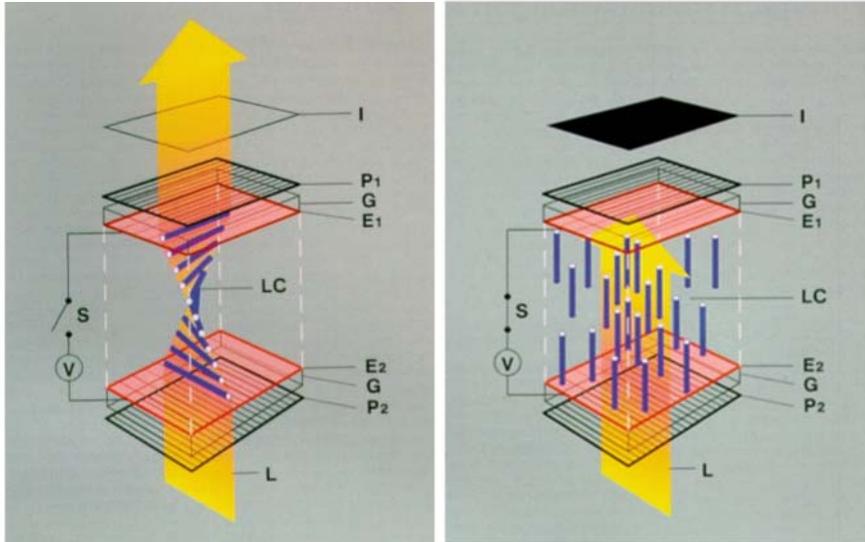
Für die Intensität gilt das **Gesetz von Malus**:

$$I(\vartheta) = I_0 \cos^2 \vartheta$$

## Anwendung: Flüssigkristallanzeige

Abhängig von Temperatur, Randbedingungen an der Oberfläche und einer angelegten Spannung ändern Flüssigkristalle ihre Symmetrie (→ Doppelbrechung, optische Aktivität).

- **Spannung aus** : Die Oberflächen richten die stäbchenförmigen Moleküle aus.
- **Spannung an** : Die Stäbchen drehen sich in die Richtung des angelegten Feldes.



Schadt-Helfrich Zelle (1970)

<http://de.wikipedia.org/wiki/Schadt-Helfrich-Zelle>

04.12.2018

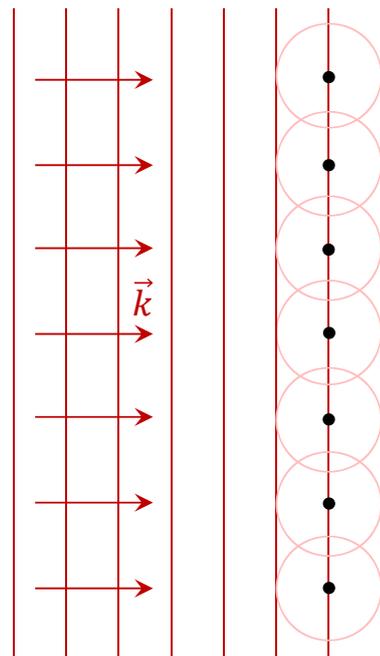
## Beugung von Licht

### Das Fresnel-Huygenssche Prinzip

Zu einer gegebenen Zeit ist jeder Punkt einer Wellenfront Ausgangspunkt einer sekundären Elementarwelle ( $\cong$  Kugelwelle) derselben Frequenz wie die der primären Welle. Die neue Lage der Wellenfront ergibt sich durch Überlagerung all dieser Elementarwellen.

Huygens (1678); Fresnel (1816)

Welche Konsequenzen hat dieses Prinzip für die notwendigen Eigenschaften der Elementarwellen, wenn es mit den Maxwell'schen Gleichungen in Einklang gebracht wird?



## Fresnelsche Zonen

Von L gehe eine Kugelwelle aus. Die Wellenfront habe den Abstand  $R$  von L.

Wie groß ist dann das Feld  $E$  im Punkt P, wenn über alle Elementarwellen der Wellenfront summiert wird?

Beitrag von Flächenelement  $dS$  ist

$$dE = E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \cdot A(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

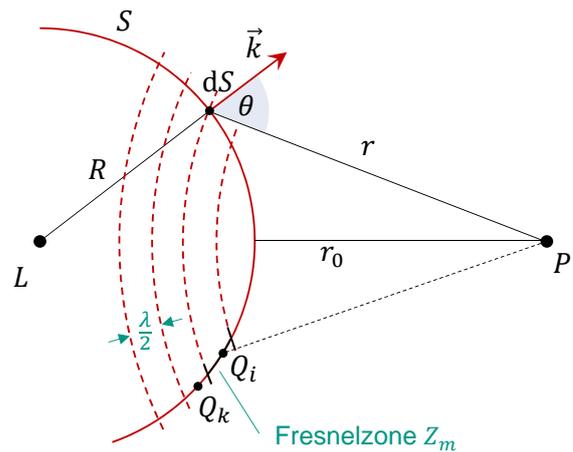
mit der Amplitude  $A(\theta)$  und Beugungswinkel  $\theta$ .

Auf der Wellenfront werden **Fresnelzonen**  $Z_m$  definiert durch Kugelflächen um P mit Radien

$$r_m = r_0 + m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$$

Zu jedem Punkt  $Q_i$  einer Fresnelzone gibt es einen Punkt  $Q_k$  in der benachbarten Zone, dessen Entfernung zu P sich um genau  $\lambda/2$  unterscheidet.

Die Beiträge ihrer Elementarwellen sind nur wenig verschieden, so dass sie sich durch Interferenz größtenteils auslöschen (vgl. *Demtröder* oder *Born & Wolf: Principles of Optics*).



## Gesamtfeld $E$ in P

Das Ergebnis der Summation aller Beiträge der Fresnelzonen  $Z_m$  der Wellenfront ist, dass die Gesamtamplitude  $E(P)$  im Punkt P gerade die Hälfte vom Beitrag  $E_1$  der Fresnelzone  $Z_1$  wird.

$$E(P) = \frac{1}{2} E_1$$

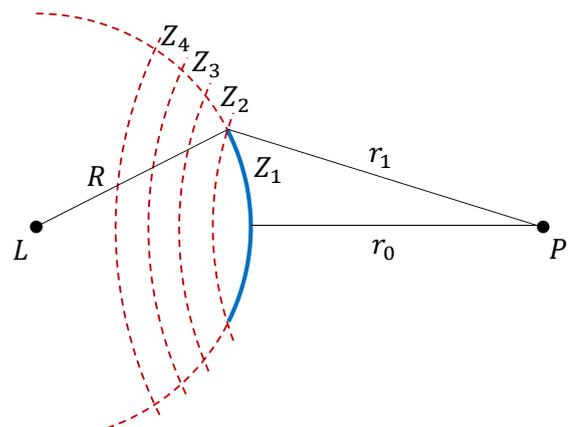
$$E_1 = 2iA_1\lambda \frac{E_0 e^{ik(R+r_0)}}{R+r_0}$$

so dass folgt  $A_1 = -i/\lambda$  (wegen notwendiger Übereinstimmung mit „direkter“ Kugelwelle).

**Interpretation:** Die Elementarwellen schwingen mit  $90^\circ$  Phasenverschiebung zur primären Welle (ohne physikalische Begründung!).

Den allgemeinen Ausdruck für die Amplitude der Elementarwelle als Funktion des Winkels erhält man erst mit der Theorie von Kirchhoff (1882),

$$A(\theta) = -\frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \theta)$$



# Ausblendung Fresnelscher Zonen

**Fall a)** Eine Blende erlaube nur den Durchtritt der ersten Fresnelzone  $Z_1$ . Allein diese kann damit zum  $E$ -Feld in  $P$  beitragen.

Dann wird die Amplitude in  $P$  doppelt so groß wie im Fall ohne Blende!

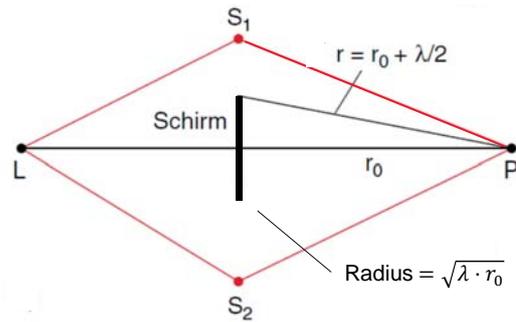
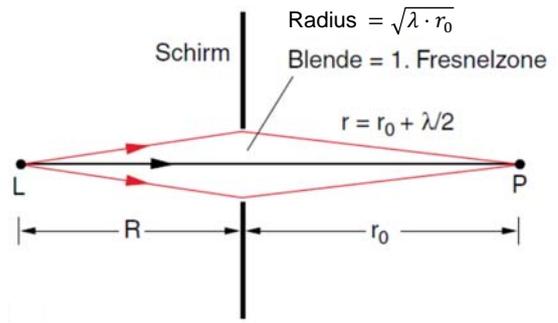
$$E(P) = E_1$$

Die Blende verhindert die destruktive Interferenz von  $Z_1$  mit Beiträgen höherer Fresnelzonen.

**Fall b)** Eine Scheibe verhindere allein den Durchtritt der ersten Fresnelzone  $Z_1$ . Nur die Zonen  $m > 1$  können zum  $E$ -Feld in  $P$  beitragen.

Dann wird der Betrag der Amplitude in  $P$  genauso groß wie im Fall ohne Scheibe.

$$E(P) = \frac{1}{2} E_1$$



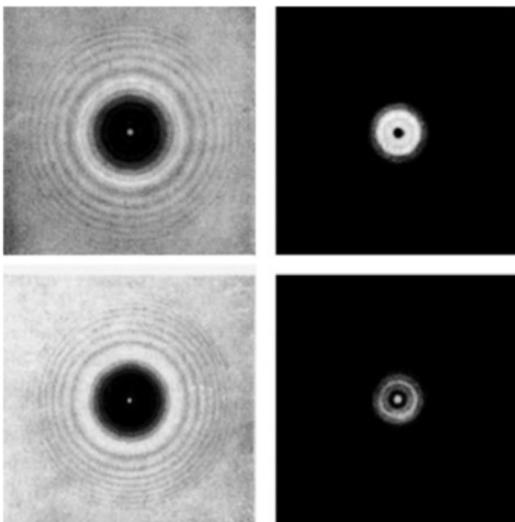
(Demtröder)

# Poissonscher Fleck

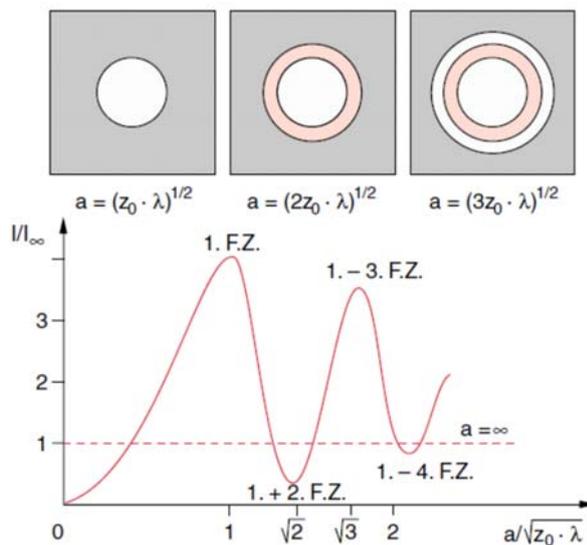
Fresnelbeugung an ...

Kreisscheibe

Kreisöffnung



(für zwei verschiedene Entfernungen)



(Demtröder)

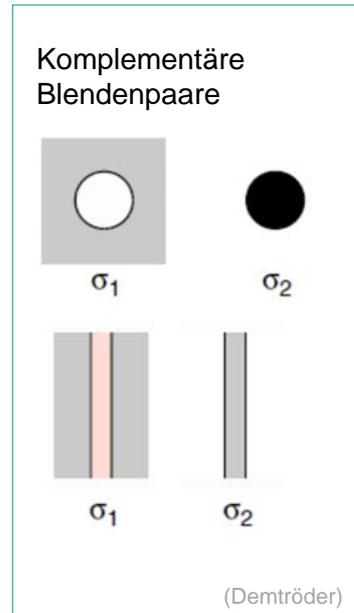
# Babinet'sches Prinzip

Im Punkt  $P$  sei

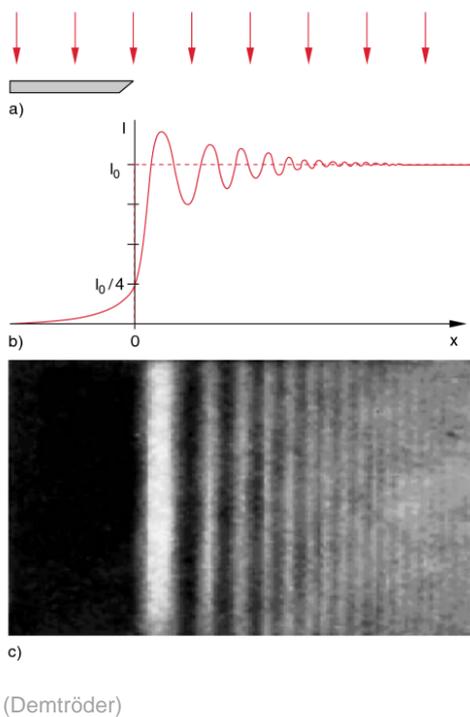
- $E(\sigma_1)$  das Feld für eine Blende  $\sigma_1$
- $E(\sigma_2)$  das Feld für eine zu  $\sigma_1$  komplementäre Blende  $\sigma_2$
- $E_0$  das Feld ohne Blende

Dann gilt

$$E(\sigma_1) + E(\sigma_2) = E_0$$



# Fresnelbeugung an Kante



# Fresnelsche Zonenplatte

Durch Ausblenden höherer Fresnelzonen kann man die Intensität weiter steigern. Blendet man jede zweite Fresnelzone aus (z.B. alle mit geradem  $m$ ), dann haben alle Beiträge zum  $E$ -Feld in  $P$  das gleiche Vorzeichen und interferieren konstruktiv.

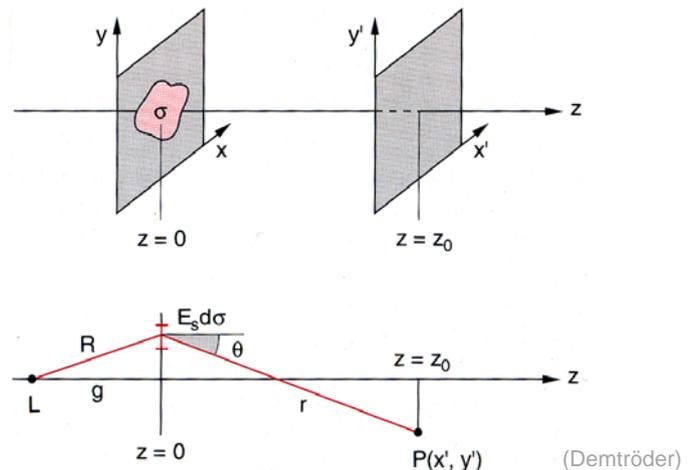
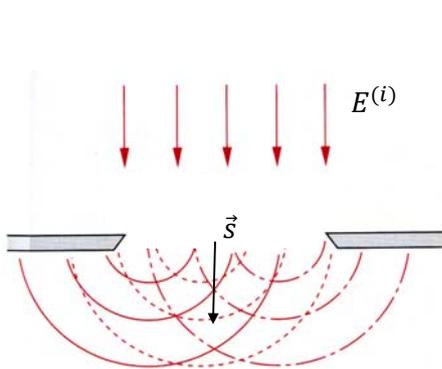


Bei Beleuchtung mit parallelem Licht der Wellenlänge  $\lambda$  ist die Brennweite  $f$  der Zonenplatte gegeben durch den Radius  $\rho_1$  der zentralen Öffnung (oder Scheibe),

$$f = \frac{\rho_1^2}{\lambda}$$

Anwendung: „Fokussierung“ von Röntgenstrahlung oder Materiewellen (z.B. Atomen).

# Kirchhoff-Fresnel Beugungsintegral



Randbedingungen (Näherungen):

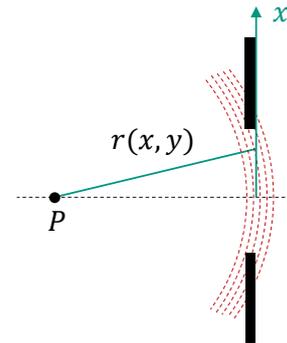
$$\left. \begin{array}{l} \text{Im Spalt: } E = E^{(i)} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial s} = \frac{\partial E^{(i)}}{\partial s} \\ \text{An Blende: } E = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial s} = 0 \end{array} \right\} E_P(x', y') = \iint_{\sigma} E_S(x, y) A(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} dx dy$$

Für den Integralwert ist die rasche Änderung der Phase  $kr$  mit  $r$  maßgeblich. Die amplitudenabhängigen Änderungen sind vergleichsweise klein. Mit den mittleren Größen  $x_0, y_0, r_0$  und  $\theta_0$  nähert man das Integral zu (etwas vereinfacht)

$$E_P(x', y') \cong \frac{A(\theta_0) E_S(x_0, y_0)}{r_0} \iint_{\sigma} e^{-ikr(x,y)} dx dy$$

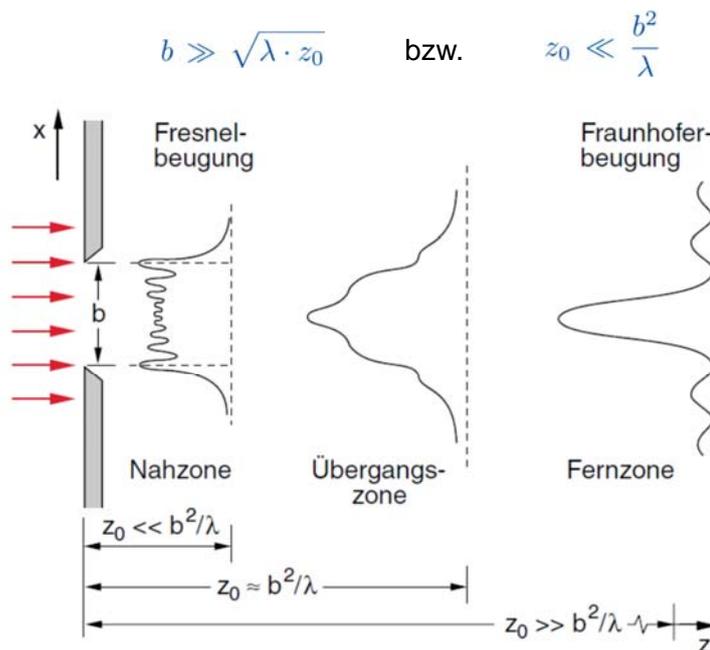
Die Funktion  $r(x, y)$  wird in lineare und quadratische Glieder in  $x$  und  $y$  zerlegt (Taylorentwicklung). Die quadratischen Glieder bestimmen die Krümmung der Phasenfronten.

- Für kleine  $r$  ist die Krümmung groß und viele Fresnelzonen liegen in der Apertur  $\sigma$   
→ Fresnelbeugung
- Für große  $r$  ist die Krümmung vernachlässigbar klein und nur eine Fresnelzone liegt in der Apertur  $\sigma$ . Die Phasenfronten sind ebene Wellen.  
→ Fraunhoferbeugung



## Entfernungszonen bei der Beugung

Man beobachtet Fresnelbeugung, wenn der Durchmesser  $b$  der Apertur bei der Entfernung  $z_0$  viele Fresnelzonen  $Z_m$  erfasst,



# Fraunhofer-Beugung

Für sehr große Abstände  $r$  von  $P$  zur Öffnung  $\sigma$  können die Phasenflächen der Elementarwellen bei  $P$  als eben betrachtet werden, so dass

$$E_P(k_x, k_y) = E_0 \underbrace{\iint_S T(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy}_{\text{Fouriertransformierte von } T(x, y)}; \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Die komplexe Funktion  $T(x, y)$  gibt die Transmission der Öffnung an (für Amplitude und Phase). Die Intensität der Beugung in Richtung  $\vec{k}$  ist dann gegeben durch

$$\frac{I'(k_x, k_y)}{I_0} = \left| \iint_S T(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \right|^2$$

## Fraunhofer-Beugung

Das Beugungsbild des von einer begrenzten Öffnung transmittierten Lichts ist das Betragsquadrat seiner Fouriertransformierten.

## Beispiel: Beugung am Einzelspalt

Spalt mit Breite  $b$  in  $x$ -Richtung; in  $y$ -Richtung translationsinvariant

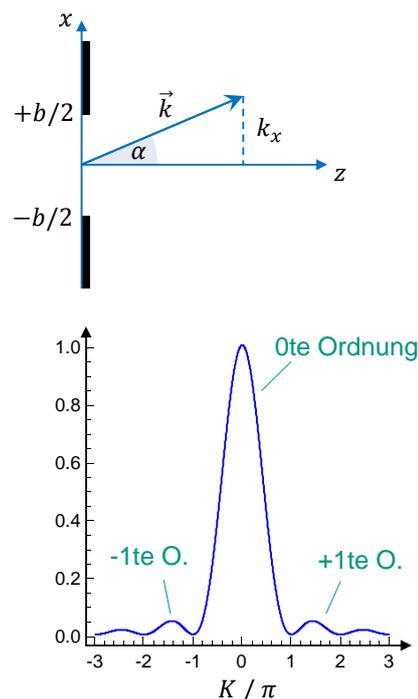
$$T_1(x) = \begin{cases} 1 & ; -\frac{b}{2} \leq x \leq +\frac{b}{2} \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{I'_1}{I_0} = \left| \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-ik_x x} dx \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{ik_x} (e^{-ik_x \frac{b}{2}} - e^{+ik_x \frac{b}{2}}) \right|^2$$

$$= b^2 \left| \frac{2}{k_x b} \sin \left( k_x \frac{b}{2} \right) \right|^2$$

$$\frac{I'_1}{I_0} = b^2 \left( \frac{\sin K}{K} \right)^2; \quad K = \frac{k_x b}{2}$$



Wie hängt  $X$  mit dem Beugungswinkel  $\alpha$  zusammen?

$$\sin \alpha = \frac{k_x}{k} \Rightarrow k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \Rightarrow K = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

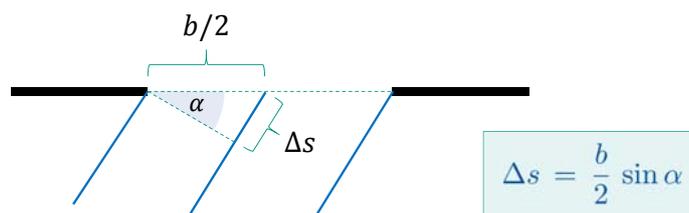
Für welche Winkel treten Beugungsminima oder –maxima auf?

Mit der Näherung  $\sin \alpha \cong \alpha$  sowie  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  folgt

$$\text{Minima: } K = m \cdot \pi \Rightarrow \alpha \cong m \cdot \frac{\lambda}{b}$$

$$\text{Maxima: } K = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \Rightarrow \alpha \cong \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{b}$$

Anschaulich

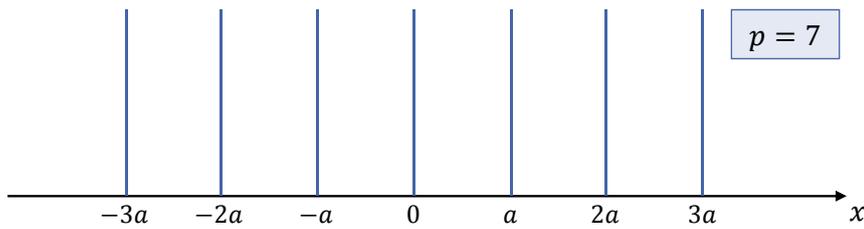


Minima: Teile Strahl in gerade Anzahl von Teilbündel auf, so dass benachbarte in Richtung  $\alpha$  destruktiv interferieren.

$$\Delta s = m \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \alpha \cong m \cdot \frac{\lambda}{b}$$

Maxima: Wähle ungerade Anzahl von Bündel, dann bleibt immer eines, dass nicht „weginterferiert“ wird.

## Beispiel: Beugung an $p$ Spalten (I)



Wir berechnen den Fall für Spalten verschwindender Breite  $b \rightarrow 0$  und gleichen Abständen  $a$ . Zudem sei der Einfachheit halber  $T_p(x)$  eine gerade Funktion mit Spalt bei  $x = 0$  und damit ungerader Anzahl von Spalten  $p$ .

Somit

$$T_p(x) = \delta(x) + \sum_{m=1}^n (\delta(x+ma) + \delta(x-ma)) \quad ; \quad p = 2n + 1$$

85 04.12.2018

$$T_p(x) = \delta(x) + \sum_{m=1}^n (\delta(x+ma) + \delta(x-ma)) \quad ; \quad p = 2n + 1$$

Dann ist die Fouriertransformierte (ohne Vorfaktor)

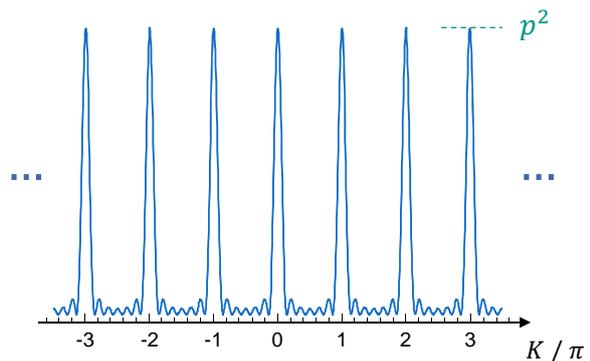
$$\begin{aligned} \tilde{T}_p(k_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} T_p(x) e^{-ik_x x} dx \\ &= 1 + \sum_{m=1}^n (e^{+ik_x ma} + e^{-ik_x ma}) \stackrel{!}{=} \frac{\sin\left(p \cdot k_x \frac{a}{2}\right)}{\sin\left(k_x \frac{a}{2}\right)} \end{aligned}$$

Damit wird

$$\frac{I_p}{I_0} = \frac{\sin^2(pK)}{\sin^2(K)} ; \quad K = k_x \frac{a}{2}$$

Maxima:

$$\alpha \cong m \cdot \frac{\lambda}{a}$$



86 04.12.2018

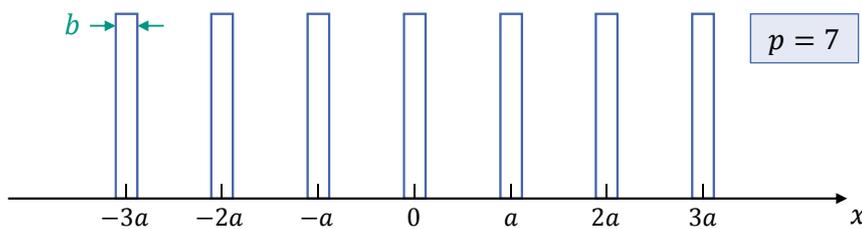
## Beweis

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_p(k_x) &= 1 + \sum_{m=1}^n (e^{+ik_x ma} + e^{-ik_x ma}) \\
 &= \sum_{m=0}^n (e^{+ik_x a})^m + \sum_{m=0}^n (e^{-ik_x a})^m - 1 \quad \left| \quad \sum_{m=0}^n q^m = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right. \\
 &= \frac{1 - e^{+ik_x(n+1)a}}{1 - e^{+ik_x a}} + \frac{1 - e^{-ik_x(n+1)a}}{1 - e^{-ik_x a}} - 1 \\
 &= \frac{e^{-ik_x \frac{a}{2}} - e^{+ik_x(2n+1)\frac{a}{2}}}{e^{-ik_x \frac{a}{2}} - e^{+ik_x \frac{a}{2}}} + \frac{e^{ik_x \frac{a}{2}} - e^{-ik_x(2n+1)\frac{a}{2}}}{e^{ik_x \frac{a}{2}} - e^{-ik_x \frac{a}{2}}} - 1 \\
 &= \frac{e^{+ik_x(2n+1)\frac{a}{2}} - e^{-ik_x(2n+1)\frac{a}{2}}}{e^{ik_x \frac{a}{2}} - e^{-ik_x \frac{a}{2}}} \\
 &= \frac{\sin(p k_x \frac{a}{2})}{\sin(k_x \frac{a}{2})} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

87 04.12.2018

## Beispiel: Beugung an $p$ Spalten (II)

Die Spalten haben eine endliche Breite  $b$



Die Transmissionsfunktion wird erzeugt durch die Faltung der Funktionen vom Einzelspalt  $T_1(x)$  und der  $p$  Deltafunktionen  $T_p(x)$ .

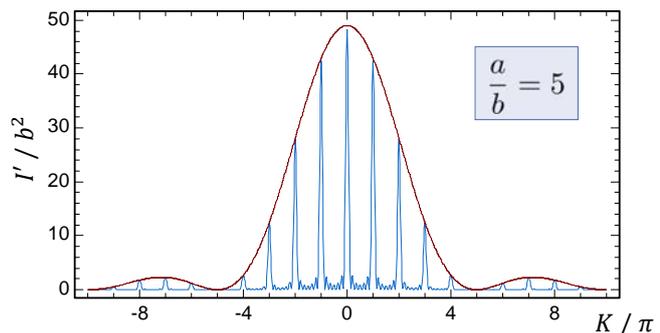
$$T(x) = (T_p \otimes T_1)(x)$$

Dann ist (Faltungssatz!)

$$\tilde{T}(k_x) = \tilde{T}_p(k_x) \cdot \tilde{T}_1(k_x)$$

also

$$\frac{I'}{I_0} = |\tilde{T}(k_x)|^2 = I_1'(k_x) \cdot I_p(k_x)$$



88 04.12.2018

# Gaußförmiges Transmissionsprofil

Zweidimensionale Gaußfunktion

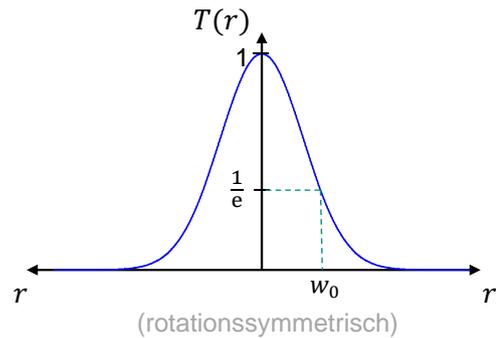
$$T(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}} = e^{-\left(\frac{r}{w_0}\right)^2}$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{E'(k_x, k_y)}{E_0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{w_0^2} - i k_x x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{w_0^2} - i k_y y} dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{E'(k_x, k_y)}{E_0} = \pi w_0^2 e^{-\frac{w_0^2}{4} (k_x^2 + k_y^2)}}$$



(vgl. E1, S. 6)

Das gebeugte Lichtbündel behält ein gaußförmiges Profil!

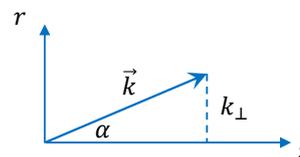
Mit wachsender Entfernung  $z$  zur Blende wird es breiter. Wir berechnen das Strahlprofil für die Ebene im Abstand  $z$ .

Mit

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$$

gilt für den Beugungswinkel  $\alpha$

$$\sin \alpha = \frac{k_{\perp}}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} k_{\perp}$$



Für das in den Winkel  $\alpha$  gebeugte Licht in der Ebene  $z$  mit Abstand  $r$  von der optischen Achse gilt

$$\tan \alpha = \frac{r}{z}$$

Für kleine Winkel ist  $\sin \alpha \cong \tan \alpha$  und damit

$$k_{\perp} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r}{z}$$

Damit wird (nach Koordinatentransformation)

$$\frac{E(r)}{E_0} = \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$$

$$\frac{I(r)}{I_0} = \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}}$$

mit  $w(z) = \frac{\lambda z}{\pi w_0}$  für  $z \rightarrow \infty$  (Fraunhofer-Näherung)

Genaue Rechnung liefert:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}$$

für beliebiges  $z$

## Kenngrößen des gaußschen Strahls

Strahltaile  $w_0$

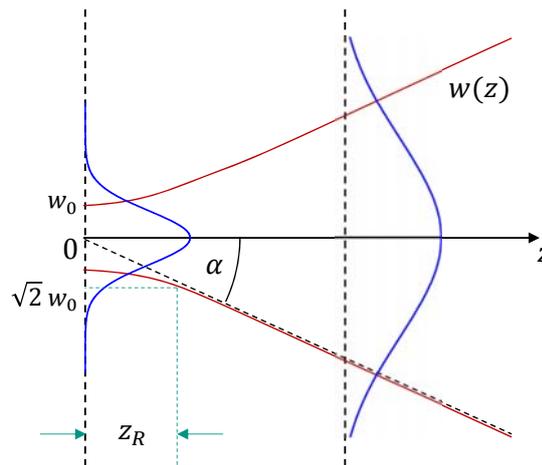
Öffnungswinkel

$$\alpha \simeq \frac{w}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Rayleigh-Länge

$$w(z_R) = \sqrt{2} w_0 \quad (\text{willk. Definition})$$

$$\Rightarrow z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \left( = \frac{w_0}{\alpha} \right)$$



Das Strahlprofil von Laserlicht oder des aus Single-Mode-Fasern austretenden Lichts kann oft als gaußförmig angenommen werden. Zur Berechnung optischer Strahlengänge werden gaußsche Strahlen benutzt, da sie auf einfache Weise sowohl strahlenoptisch als auch wellenoptisch behandelt werden können.

## Fokussierung gaußscher Strahlen

Anstatt der Beugung an einer Öffnung betrachten wir das Problem „umgekehrt“:

Ein gaußscher Strahl (z.B. aus einem Laser) werde fokussiert. Was ist dann die kleinste erreichbare Fokusbildungsdurchmesser  $2w_0$ ?

Mit dem gegebenen Öffnungswinkel  $\alpha$  folgt

$$w_0 \simeq \frac{\lambda}{\pi\alpha}$$

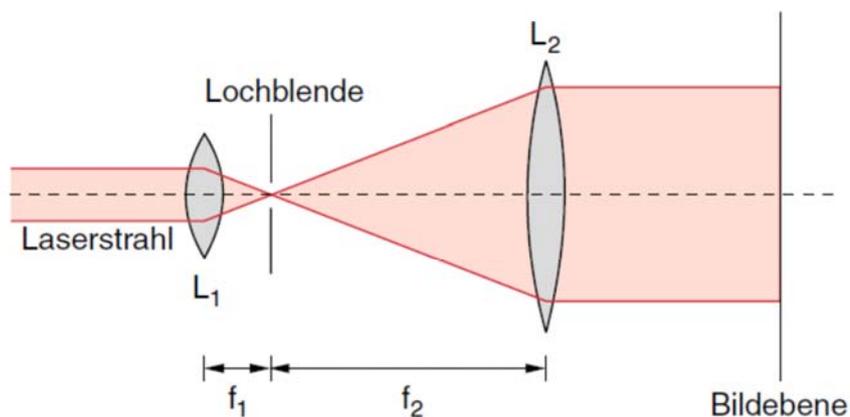
Genauere Rechnung liefert

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi \sin \alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha}$$

$$w_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_0}{NA} ; NA = n \sin \alpha$$

Wegen  $NA \leq n$  entspricht der kleinste erreichbare Fokusbildungsdurchmesser  $2w_0$  etwa der Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts (im Medium).

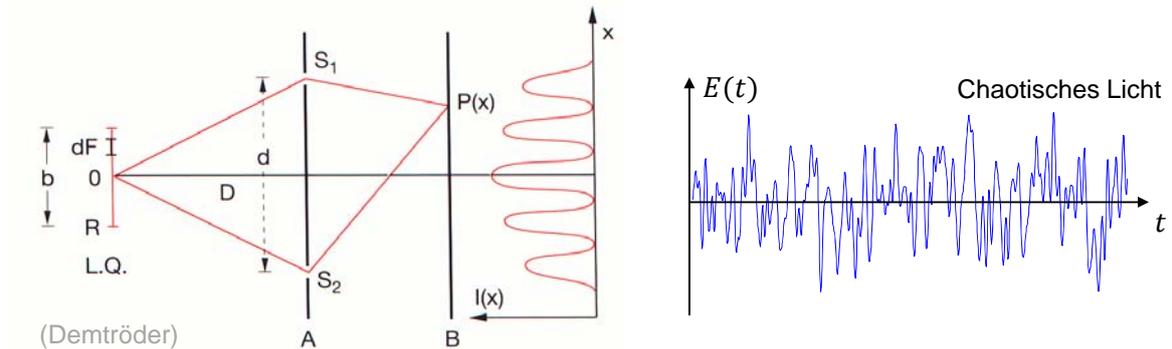
## „Cleaning“ und Aufweitung Gaußscher Strahlen



**Abb. 12.29.** Punktlochblende als Tiefpass-Raumfrequenzfilter bei der Aufweitung eines Laserstrahls

# Räumliche Kohärenz

Doppelspaltexperiment mit ausgedehnter Lichtquelle *endlicher spektraler Breite*



- Amplitude und Phase des Lichts in jeder der beiden Spalte resultiert aus Überlagerung aller Teilwellen, die von den Flächenelementen  $dF$  ausgehen.
- Die Emission der Flächenelemente  $dF$  typischer Lichtquellen ist voneinander unabhängig und erzeugt bei Überlagerung „chaotisches“ Licht.
- Die Gesamtfeldstärke ändert sich beliebig, wenn die Überlagerung zweier Teilwellen sich um Wege  $\Delta s \geq \lambda/2$  ändert (z.B. durch Winkeländerung).
- Die Korrelation der Feldstärken bei  $S_1$  und  $S_2$  verschwindet für  $\Delta s \geq \lambda/2$ .

## Kohärenz bei ausgedehnten Lichtquellen

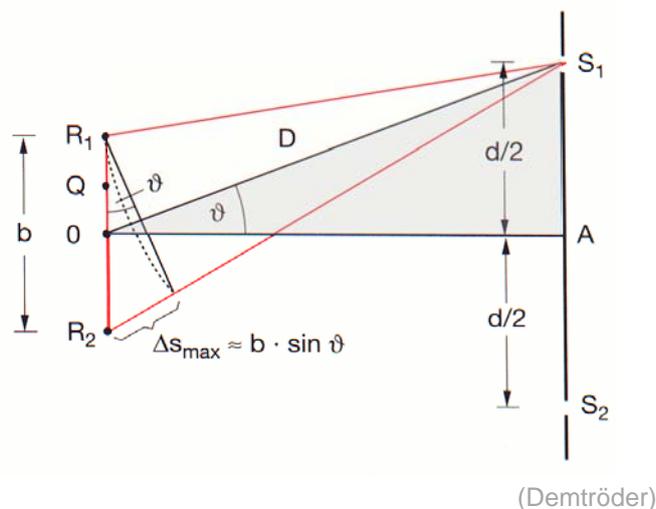
Bedingung für sichtbare Interferenzen

- Wegdifferenz der Teilwellen zum gleichen Spalt ist kleiner als  $\lambda/2$ .

$$\Delta s_{\max} = b \sin \vartheta$$

$$\cong b \cdot \frac{d}{2D} < \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{D} < \frac{\lambda}{d}$$



Beispiele:  $\lambda = 500 \text{ nm}$

- Sonne:  $b \approx 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ ,  $D = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$   $\Rightarrow d < 0.1 \text{ mm}$
- Proxima Centauri:  $b \approx 10^7 \text{ km}$ ,  $D = 4.3 \text{ LJ} \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ km}$   $\Rightarrow d < 2 \text{ m}$

## Allgemeines Ergebnis (Theorie teilweise kohärenten Lichts)

### Van-Cittert-Zernike-Theorem

Die räumliche Helligkeitsverteilung eines entfernten Objekts kann aus der vom gegenseitigen Abstand abhängigen Kohärenz der elektrischen Felder an den Orten  $S_1$  und  $S_2$  berechnet werden!

Die Kohärenz wird bestimmt mittels der abstandsabhängigen Korrelationsfunktion der Felder bei  $S_1$  und  $S_2$ . Diese wird durch das von den Spalten bei  $S_1$  und  $S_2$  erzeugte Beugungsbild und der daraus bestimmten *Sichtbarkeit* der Interferenzen direkt gemessen.

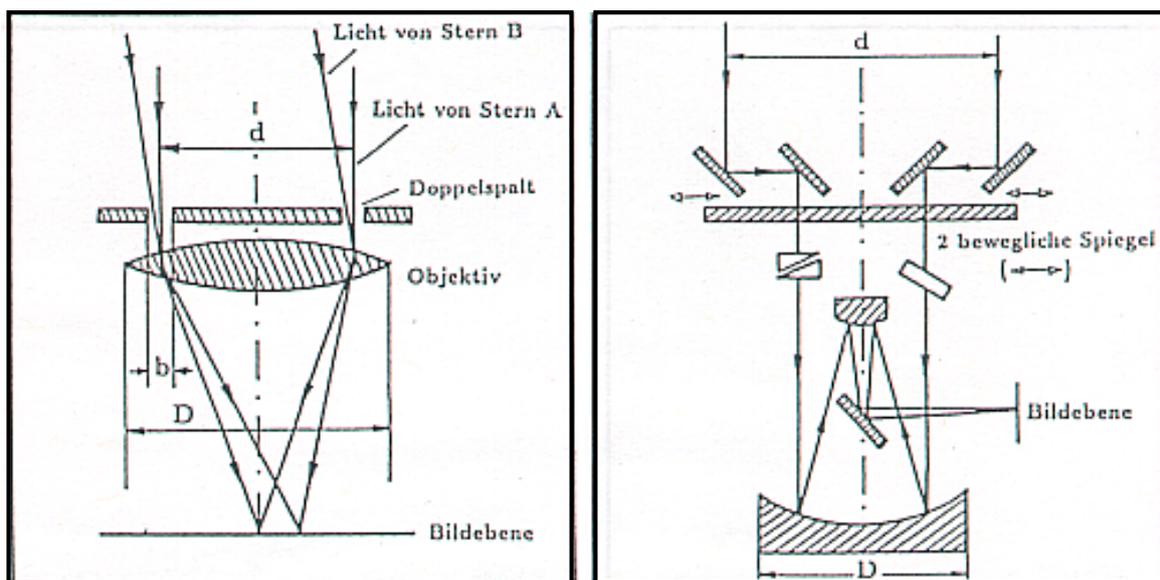
(vgl. Kohärenzfunktion, Kap. 1, S. 24 )

→ Methode zur Messung von Sterndurchmessern oder Doppelsternsystemen!

Born & Wolf, Principles of Optics, p. 508

97 04.12.2018

## Michelson-Sterninterferometer



<https://www.astro.uni-jena.de/Teaching/Praktikum/pra2002/node103.html>

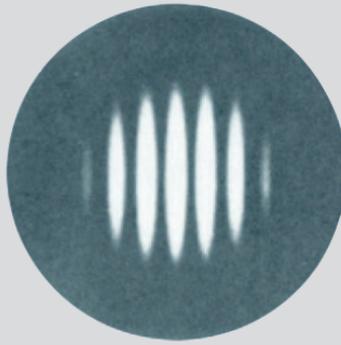
98 04.12.2018

## »Sichtbarkeit« oder »Visibility«

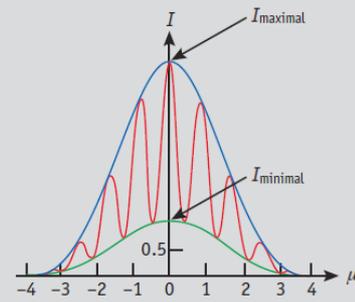
Die Messgröße der Interferometrie ist der Kontrast (die »Sichtbarkeit«) des bei der Interferenz entstehenden Streifenmusters, gemessen als:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (1)$$

Die Visibility kann daher Werte zwischen 0 ( $I_{\max} = I_{\min}$ , keine Streifen) und 1 ( $I_{\min} = 0$ , maximal möglicher Kontrast) annehmen. Physikalisch gesehen ist sie gleich dem Kohärenzgrad der Wellenfrontausschnitte, die von den beiden – vom Stern aus gesehen im Abstand  $\bar{B}_{\perp}$  stehenden – Teleskopen aufgenommen werden. Sie ist außerdem gleich der Fouriertransformierten der Helligkeitsverteilung des Objekts bei der Fourierkoordinate  $\bar{B}_{\perp}/\lambda$  (van Cittert-Zernicke-Theorem). Qualitativ bedeutet das, dass für kleine  $|\bar{B}_{\perp}|$  die Visibility gegen 1 geht. Bei festem, nicht zu großem  $|\bar{B}_{\perp}|$  gilt: kleine Quellen haben hohe, ausgedehntere Quellen geringere Visibility. Die Visibility dient daher meist als Maß für die Größe eines Objekts. Quantitativ



▲ Bild eines Sterns, von Interferenzstreifen durchzogen.



▲ Horizontaler Schnitt durch die Abbildung links.

gilt für eine gleichmäßig helle Sternscheibe mit Winkeldurchmesser  $\vartheta$ :

$$V = 2 \frac{J_1(\pi \vartheta |\bar{B}_{\perp}/\lambda|)}{|\bar{B}_{\perp}/\lambda|} \quad (2)$$

Dieser Ausdruck wird zu Null, wenn  $\vartheta = 1.22 |\lambda/\bar{B}_{\perp}|$  ist, z. B. für eine Wellenlänge von 10  $\mu\text{m}$  und 100 m Basislänge bei  $\vartheta = 25.2$  Millibogensekunden. Genau ge-

nommen ist die Visibility als komplexe Größe  $V \cdot e^{i\varphi}$  zu beschreiben. Die Phase  $\varphi$  (anschaulich einer durch die Struktur des Objekts bedingten Verschiebung des Streifenmusters entsprechend) ist für unsymmetrische Objekte von Null verschieden und daher unabdingbar zur Rekonstruktion von Bildern aus interferometrischen Messungen.

STERNE UND WELTRAUM November 2004

99 04.12.2018

## Michelson-Interferometer

- FTIR-Spektroskopie (FTIR = Fourier-Transform-Infrared) (vgl. Kap. 1, S. 21; E1, S.15)
- Sehr genaue Messung der Wellenlänge (relative Genauigkeit bis  $\sim 10^{-8}$ )
- Ultra-präzise Abstandsmessungen (z.B. Gravitationswellendetektor GEO 600); Messung von Längenänderungen  $\sim 10^{-19}$  !

Geplant (2034): LISA – Laser Interferometer Space Antenna  
(Armlänge  $2,5 \cdot 10^6$  km)



GEO 600

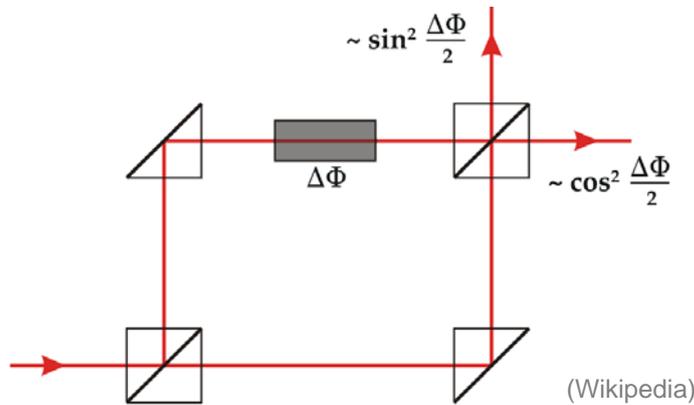
100 04.12.2018

## Mach-Zehnder-Interferometer

Ein Teilstrahl läuft durch Medium (z.B. Gas) mit Brechzahl  $n$  und Länge  $L$ .  
Der optische Weg  $n \cdot L$  beeinflusst die Wegdifferenz der Teilstrahlen:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n L$$

Der Gasdruck verändert die Brechzahl  $n \rightarrow$  präzise Druckmessung.



Die Phasendifferenzen an den Detektoren resultieren aus Reflexion am optisch dichteren Medium.

## Sagnac-Interferometer

Nach dem Strahlteiler durchlaufen zwei Teilwellen mit Intensitäten  $I_1$  und  $I_2 = I_1$  die gleiche Wegstrecke, aber mit unterschiedlichem Drehsinn.

Das Interferometer rotiere im Uhrzeigersinn. Dann durchläuft Teilwelle 1 den längeren Weg und die Gesamtintensität hinter dem Austrittsspiegel wird:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \cos \Delta\varphi \\ &= \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos \Delta\varphi) \end{aligned}$$

mit Phasendifferenz

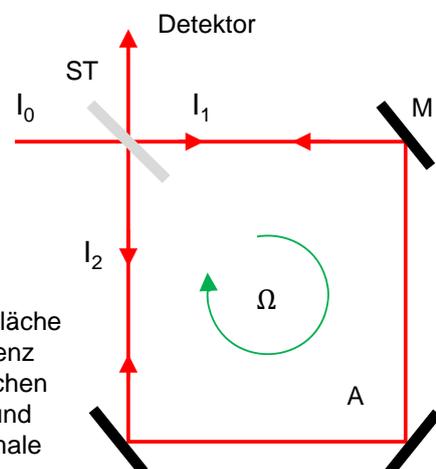
$$\Delta\varphi = \frac{8\pi A}{\lambda c} \Omega \cos \theta$$

### Messung der Erdrotation

(Michelson & Gale, 1925)

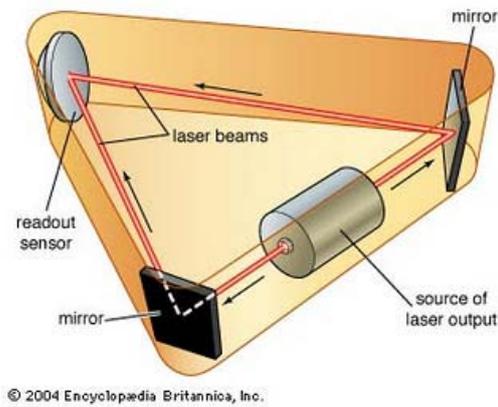
$A = 20105 \text{ m}^2$ ;  $\Delta\varphi = 1.45 \text{ rad}$   
(Astronomie: 1.48 rad)

$A$ : umlaufene Fläche  
 $\Omega$ : Winkelfrequenz  
 $\theta$ : Winkel zwischen Drehachse und Flächennormale



# Sagnac-Interferometer: Laser-Kreisel

„Laser-Kreisel“ zur Navigation von Flugzeugen  
(3 zueinander senkrecht stehende Sagnac-Interferometer)

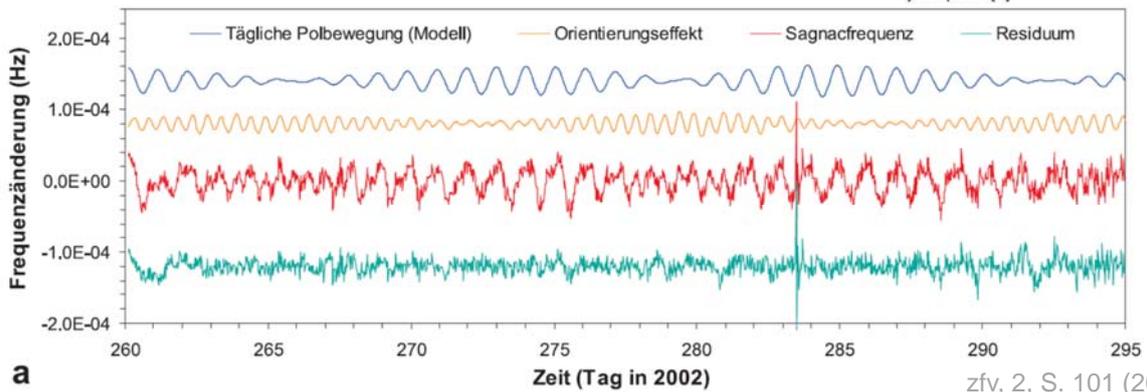
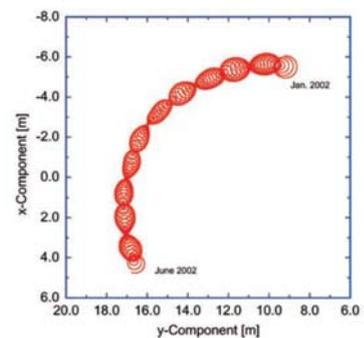


[193.196.117.25/.../standertechnik.html](http://193.196.117.25/.../standertechnik.html)

# Großringlaser Wettzell



Spur der Erdrotationsachse



zfv, 2, S. 101 (2005)

# Spektrometrie

## Messung des Farbspektrums $I(\lambda)$ einer Lichtquelle

- Interferometer: wellenlängenabhängige Transmission (z.B. Fabry-Pérot)
- Spektrometer: räumliche Trennung von Licht unterschiedlicher Wellenlänge (Prismen- oder Gitterspektrometer)

## Prinzipielle Funktionsweise des Spektrometers

Das Licht wird durch einen Eingangsspalt geschickt und über ein wellenlängenabhängiges Element auf eine Beobachtungsebene abgebildet. Die Intensitätsmessung  $I(\lambda)$  erfolgt

- mit einem einzelnen Detektor hinter einem Spalt der Breite  $\Delta x$ , oder
- mit einer Vielzahl von Detektoren (Detektorzeile) in der Beobachtungsebene.

## Messung optischer Materialeigenschaften

- Bestimme als Referenz die Intensität der Lichtquelle  $I_S(\lambda)$ .
- Platziere die Probe in den Strahlengang vor Eintrittsspalt und messe die Intensität  $I_P(\lambda)$ .
- Berechne die Transmissionsfunktion  $T(\lambda) = I_P(\lambda)/I_S(\lambda)$ . Darin wird die *optische Extinktion* der Probe wiedergegeben, aber nicht mehr die Eigenschaften der Quelle.

04.12.2018

# Prismenspektrometer

## Vorteile

- kompakter Aufbau
- Hohe Transmission
- eindeutige Wellenlängenzuordnung

## Nachteile

- geringe, nichtlineare Dispersion
- Prisma muss transparent sein

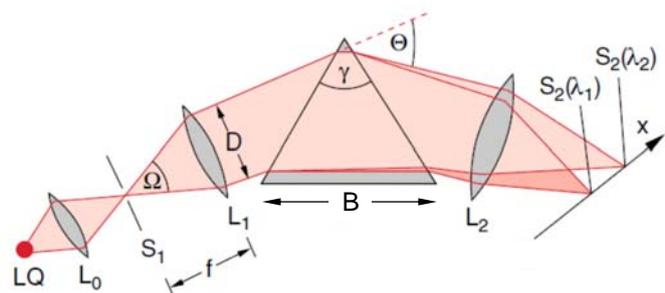
## Beispiel: Quarzprisma

- Spektralbereich 180 nm – 3  $\mu\text{m}$ .

## Winkeldispersion

Der Ablenkwinkel  $\theta$  ist abhängig von der Eintrittspupille  $D$ , der Basis  $B$  und der Dispersion des Prismas.

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d\theta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{B}{D} \frac{dn}{d\lambda}$$



## Räumliche Trennung der Spektrallinien

Die räumliche Trennung  $\Delta s$  verschiedener Wellenlängen hängt von der Brennweite  $f$  der Linsen  $L_1$  und  $L_2$  und der Winkeldispersion ab.

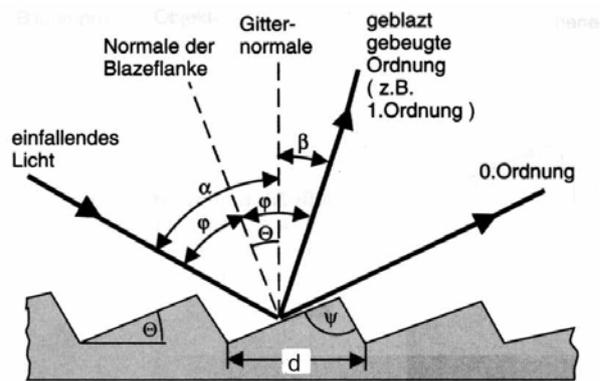
$$\Delta s = f \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta \lambda$$

04.12.2018

# Beugungsgitter

Typisch einige 100 bis ~2000 Spalte / mm (für hohe spektrale Auflösung)

- Reflexionsgitter (Furchen in ebener Glasplatte)
- Herstellung mechanisch durch Ritzen oder optisch mittels Holographie
- „geblaztes“ Gitter für hohe Beugungseffizienz in höherer Ordnung (Richtung der gebeugten Ordnung ist identisch mit der Richtung des Lichtes, das an der Flanke gespiegelt wird.)

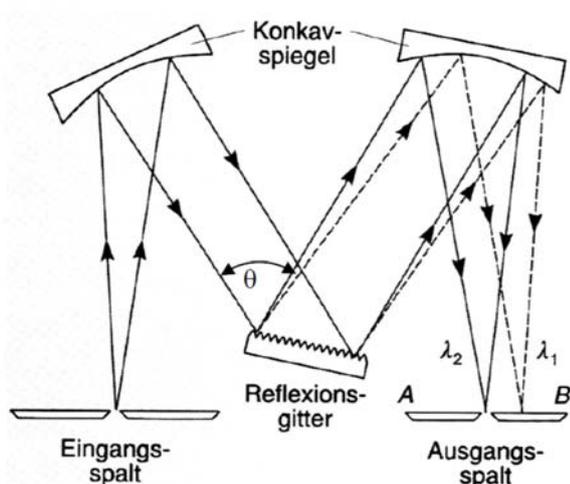


**Geblaztes Gitter:** An einer Profilflanke erfolgt Reflexion in die gebeugte Ordnung.  $\theta$  Blazewinkel,  $\psi$  Apexwinkel.

# Gitterspektrometer

z.B. Czerny-Turner-Gitterspektrometer

- Symmetrischer Strahlengang
- Eingangsspalt wird auf Ausgangsspalt abgebildet (typ. gleiche Spaltbreite)



[http://dodo.fb06.fh-muenchen.de/maier/analytik/Blaetter/N05\\_Monochromatoren\\_d\\_BAneu.pdf](http://dodo.fb06.fh-muenchen.de/maier/analytik/Blaetter/N05_Monochromatoren_d_BAneu.pdf)

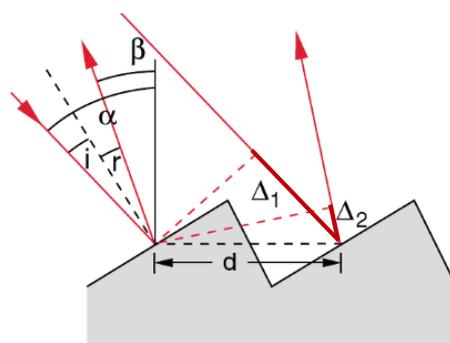
## Winkeldispersion

Konstruktive Interferenz, wenn mit  $m = 0,1,2, \dots$

$$\Delta s = \Delta_1 + \Delta_2 = d \cdot (\sin \alpha + \sin \beta) = m \lambda$$

Winkeldispersion durch Differentiation:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos \beta}$$



(Demtröder)

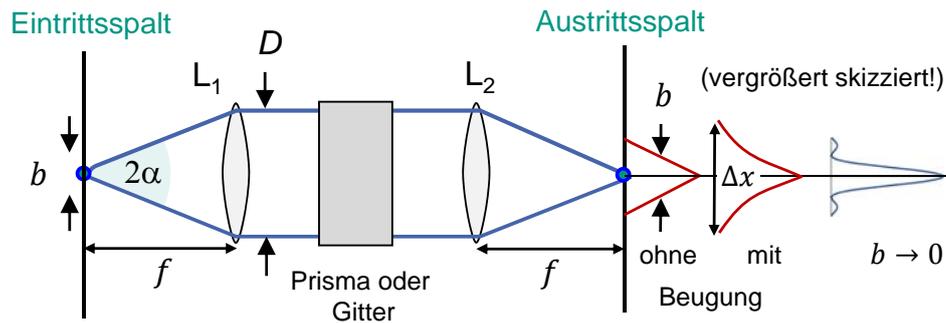
# Spektrales Auflösungsvermögen

Das spektrale Auflösungsvermögen ist definiert als  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ , wobei  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$  die minimale Differenz zweier Wellenlängen ist, für die getrennte Bilder des Eingangsspaltes in der Beobachtungsebene entstehen.

Es können zwei scharfe Linien im Spektrum gerade noch aufgelöst werden, wenn gilt

$$\Delta s_{\min} = \frac{\Delta x}{2} = \frac{b}{2} + f \frac{\lambda}{D}$$

Minimum Einzelspalt  $\alpha = \lambda/D$



04.12.2018

Bei minimaler Spaltbreite, ohne wesentlich Intensität zu verlieren, sind beide Beiträge etwa gleich groß, also

$$\Delta s_{\min} = 2f \frac{\lambda}{D}$$

Erinnerung:  $\Delta s = f \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta\lambda$

Damit ergibt sich:

$$2f \frac{\lambda}{D} = f \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{D}{2} \frac{d\theta}{d\lambda}$$

**Beachte:** Für  $\delta$ -förmigen Spalt (Lichtverlust!) entfällt der Faktor 1/2:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq D \frac{d\theta}{d\lambda}$$

04.12.2018

## Vergleich

### Prisma

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{d\lambda} &= \frac{B}{D} \frac{dn}{d\lambda} \\ \frac{\lambda}{\Delta\lambda} &\leq D \frac{d\theta}{d\lambda} \end{aligned} \right\} \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq B \frac{dn}{d\lambda}$$

Typische Zahlenwerte:

$$B = 10 \text{ cm}; \quad dn/d\lambda = 1100/\text{cm} \text{ (Suprasil)}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq 11000$$

### Gitter

Breite der Austrittspupille  $D$  ist mit Anzahl  $N$  der beleuchteten Furchen

$$\left. \begin{aligned} D &= N d \cos \beta \\ \frac{d\beta}{d\lambda} &= \frac{m}{d \cdot \cos \beta} \\ \frac{\lambda}{\Delta\lambda} &= \frac{D}{2} \frac{d\beta}{d\lambda} \end{aligned} \right\} \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq m \cdot N$$

Typische Zahlenwerte:

$$L = 10 \text{ cm}; \quad N = 1200/\text{mm} \cdot L; \quad m = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq 240000$$