

Optik – WS 18/19

4. Geometrische Optik

Definition

In der geometrischen Optik werden Beugungsphänomene vernachlässigt. Dies entspricht einer Näherung der Wellenoptik (oder allgemeiner der Maxwell'schen Gleichungen) für Wellenlängen $\lambda \rightarrow 0$.

Folgerungen:

- Für die kleinste betrachtete Größe D muss gelten $D \gg \lambda$. Faustformel: $D > 10 \mu\text{m}$.
- Die Phasenfläche wird begrifflich ersetzt durch die (*geometrische*) *Wellenfront* oder *Wellenfläche*.
- In einem isotropen Medium ist die Energieflussdichte S (und damit die Intensität I) senkrecht zur Wellenfront, also parallel zur Flächennormalen \vec{s} .
- Die Flächennormalen \vec{s} werden *Lichtstrahlen* genannt. Die Gesamtheit der Lichtstrahlen auf einer begrenzten Fläche der Wellenfront ist ein *Lichtbündel*.

Die optische Weglänge

Eine Wellenfront wird beschrieben durch den *optischen Weg* $L(\vec{r})$ mittels $L(\vec{r}) = \text{const.}$. Die grundlegende Gleichung der geometrischen Optik ist dann

$$(\text{grad } L(\vec{r}))^2 = n^2 \quad (\text{Eikonalgleichung})$$

oder mit der Flächennormalen \vec{s} :

$$\text{grad } L(\vec{r}) = n \vec{s}$$

Der *optische Weg* zwischen zwei Orten P_1 und P_2 ist dann

$$\Delta L = \int_{P_1}^{P_2} n \, ds = L(\vec{r}_2) - L(\vec{r}_1)$$

Das Fermat'sche Prinzip

Ein Lichtstrahl läuft von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 stets auf einem Weg, auf dem die Laufzeit minimal ist.

Formulierung
nach Fermat

Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass der optische Weg minimal wird, denn mit den Lichtgeschwindigkeiten c_0 (Vakuum) und $c = c_0/n$ (Medium) gilt

$$\Delta L = \int_{P_1}^{P_2} n \, ds = c_0 \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{c} = c_0 \int_{P_1}^{P_2} dt$$

Hinweis: Das Fermat'sche Prinzip ist eine Formulierung der Eikonalgleichung („charakteristische Funktion“) als Variationsprinzip

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n(s) \, ds = 0$$

Es entspricht dem aus der Mechanik bekannten Hamilton'schen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \, dt = 0 \quad \text{mit Lagrangefunktion } \mathcal{L}.$$

Beispiel

Herleitung des Brechungsgesetzes von Snellius

Laufzeit zwischen P_1 und P_2 :

$$t = \frac{s_i}{c_i} + \frac{s_t}{c_t} = \frac{1}{c_0} \underbrace{(n_i s_i + n_t s_t)}_{\text{Optischer Weg } L}$$

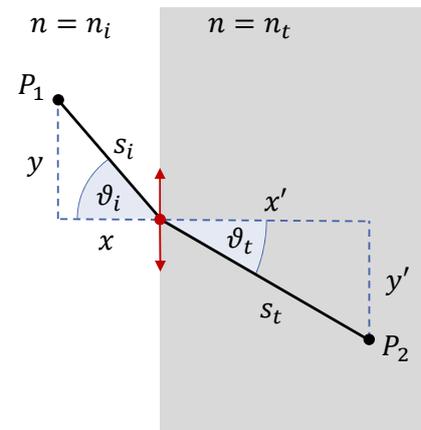
Mit Satz von Pythagoras und $a = y + y'$ folgt

$$L(y) = c_0 t = n_i \sqrt{x^2 + y^2} + n_t \sqrt{x'^2 + (a - y)^2}$$

Bestimme Minimum (setze Ableitung nach y gleich 0):

$$\frac{dL(y)}{dy} = n_i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + n_t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2(a - y)}{\sqrt{x'^2 + (a - y)^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta_i &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \vartheta_t &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow n_i \sin \vartheta_i = n_t \sin \vartheta_t \quad \checkmark$$



Paraxiale Optik

Die paraxiale Optik ist eine Näherung der geometrischen Optik, bei der nur Lichtstrahlen betrachtet werden, die mit der optischen Achse kleine Winkel bilden und kleine Abstände von ihr haben.

Wegen der kleinen Abstände zur optischen Achse können bei der Berechnung der Abbildung quadratische und höhere Terme in den Formeln vernachlässigt werden,

→ lineare Abbildung

Dann wird mit dem Brechungsgesetz

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha' \quad \rightarrow \quad n \alpha \cong n' \alpha'$$

Brechung an sphärischer Oberfläche

Ein zur optischen Achse paralleler Strahl mit Abstand h zur Achse wird an einer Kugeloberfläche gebrochen und schneidet die optische Achse im Punkt F . Es wird der Abstand $f = \overline{OF}$ zur Kugel berechnet.

Brechungsgesetz

$$n \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha'$$

Winkelsumme im Dreieck MFA

$$180^\circ = \alpha + (180^\circ - \alpha') + \beta$$

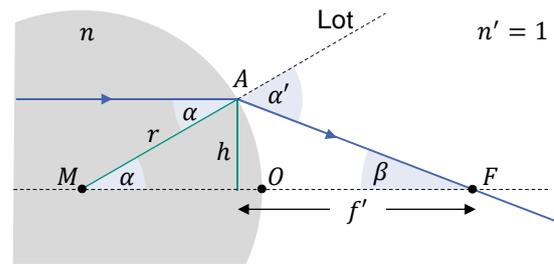
$$\Rightarrow \beta = (n - 1)\alpha$$

Außerdem (paraxiale Näherung)

$$\begin{aligned} h &= r\alpha = f'\beta \\ \Rightarrow f' &= r \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{n-1} \end{aligned}$$

Wie groß ist der Abstand $\Delta = f' - f$?

$$\Delta = \overline{MO} - r \cos \alpha = r(1 - \cos \alpha)$$



In paraxiale Näherung wird

$$\cos \alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2} \rightarrow 1 \Rightarrow \Delta \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f = \frac{r}{n-1} \quad \text{Brennweite}$$

Alle achsenparallelen Strahlen schneiden den gleichen *Brennpunkt F!*

Brennweite dünner Linsen

Die Brennweite einer aus zwei sphärischen Oberflächen zusammengesetzten dünnen Linse ist

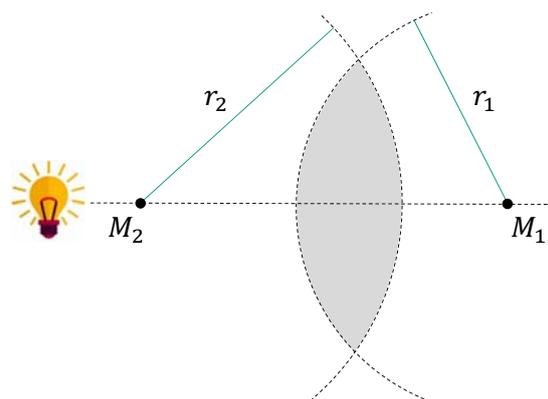
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (\text{Beweis später})$$

Damit wird

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Konvention

Der Krümmungsradius r ist positiv, wenn von der Lichtquelle aus gesehen der Krümmungsmittelpunkt M hinter der Linse liegt und negativ wenn er vor ihr liegt. Die erste Oberfläche, auf die das Licht trifft, hat den Index 1.



Brechkraft

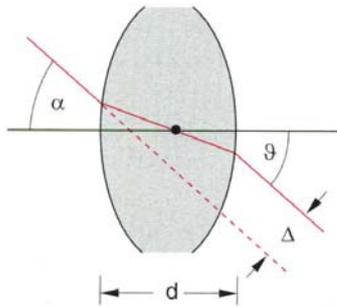
Die Brechkraft ist definiert als

$$D = \frac{1}{f}$$

$$[D] = \text{m}^{-1} = \text{dpt} \quad (\text{Dioptrie})$$

Regeln für dünne konvexe Linsen

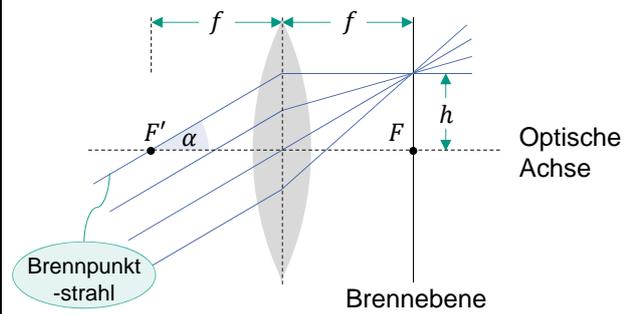
Mittelpunktstrahl



- Der Mittelpunktstrahl wird versetzt, aber nicht abgelenkt.
- Für dünne Linse ist der Strahlversatz vernachlässigbar, $\Delta \approx 0$.

(Demtröder)

Brennebene



Parallele Strahlen werden in der Brennebene fokussiert. In paraxialer Näherung gilt

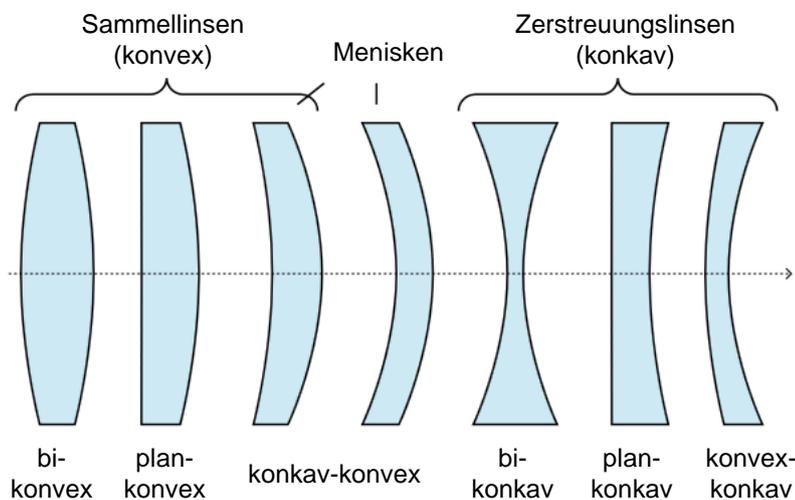
$$h = f \cdot \alpha$$

Brennpunktstrahlen werden zu Strahlen parallel zur optischen Achse (und umgekehrt!).

Formen dünner Linsen

Annahmen

- Linse mit Brechzahl n umgeben von Luft (Brechzahl 1)
- Länge des Lichtwegs in der Linse wird vernachlässigt (Dicke \ll Brennweite)



Matrixoptik

Für die Berechnung der Strahlenverläufe für ein System mehrerer Linsen ist die Matrixoptik ein nützliches Instrument, da mit ihr die lineare Abbildung der paraxialen Optik auf einfache Weise dargestellt werden kann.

Vorgehen

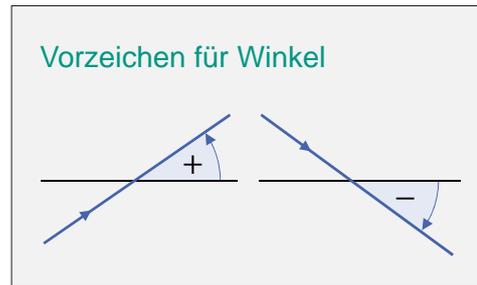
Charakterisiere Strahl an einem Punkt der optischen Achse durch zwei Parameter:

- Abstand zur optischen Achse h
 - Winkel mit optischer Achse φ
- $$\left. \begin{array}{l} \text{Abstand zur optischen Achse } h \\ \text{Winkel mit optischer Achse } \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Vektor } \begin{pmatrix} h \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Der Verlauf von Strahlen wird durch Verknüpfung der Vektoren mittels Matrizen dargestellt, also

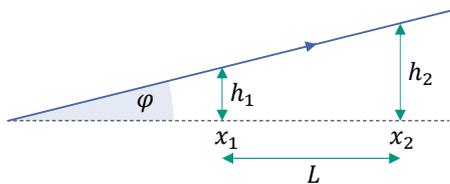
$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

Jedem Element eines optischen Systems wird eine geeignete Matrix zugeordnet.



Elemente der Matrixoptik I

Freie Propagation



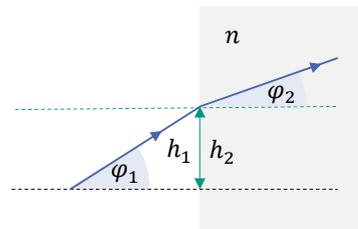
$$h_2 = h_1 + L \varphi_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{M}_{\text{frei}} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Brechung an Luft/Glas-Grenzfläche



$$h_2 = h_1$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n} \varphi_1$$

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{M}_{\text{Brech}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Elemente der Matrixoptik II

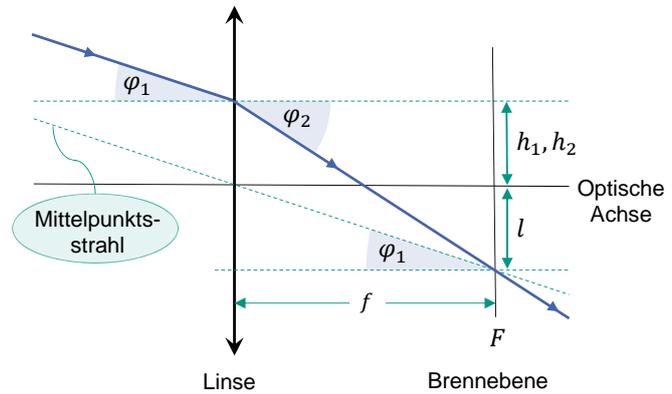
Dünne Linse mit Brennweite f

$$h_2 = h_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{l + h_1}{f} = \varphi_1 - \frac{h_1}{f}$$

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{M}_{\text{konvex}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$



Ebenso für konkave Linsen, aber $f \rightarrow -f$.

Matrixoptik: Beispiel I

Brennweite zweier dicht aneinander liegender dünner Linsen

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\text{ges}} &= \tilde{M}_{f_2} \cdot \tilde{M}_{f_1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_{\text{ges}}} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_{\text{ges}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (\text{vgl. S. 8})$$

Matrixoptik: Beispiel II

Abbildungen

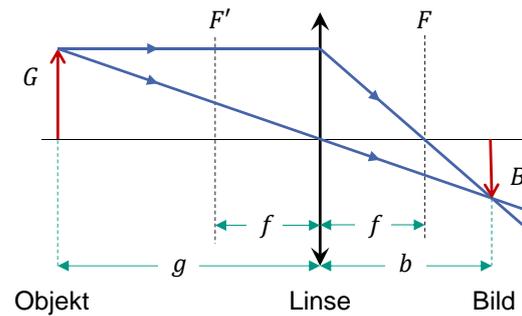
Teilwege

- Objekt-Linse : freie Propagation
- Linse : Lichtbrechung
- Linse-Bild : freie Propagation

also

$$\tilde{M}_{\text{Abb}} \cdot \begin{pmatrix} G \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}G + m_{12}\varphi \\ m_{21}G + m_{22}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \varphi' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\text{Abb}} &= \tilde{M}_{\text{frei}}(b) \cdot \tilde{M}_{\text{linse}}(f) \cdot \tilde{M}_{\text{frei}}(g) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & g \\ -\frac{1}{f} & -\frac{g}{f} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{f} & g - \frac{gb}{f} + b \\ -\frac{1}{f} & -\frac{g}{f} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



In der Bildebene kreuzen sich alle Strahlen, d.h. die Höhe wird $h = B$ unabhängig von φ . Folglich wird

$$m_{12} = 0 = g - \frac{gb}{f} + b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{Abbildungsgleichung dünner Linsen}$$

Weiter gilt dann

$$B = m_{11}G = \left(1 - \frac{b}{f}\right) G \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{G} = -\left(\frac{b}{f} - 1\right) \quad \text{Vergrößerung in der Bildebene}$$

1. Beispiel: Vergrößerung 1 : 1

$$\rightarrow b = 2f \rightarrow g = 2f$$

2. Beispiel: Objekt ist sehr weit entfernt, $g \rightarrow \infty$

$$\rightarrow b = f \rightarrow B = 0$$

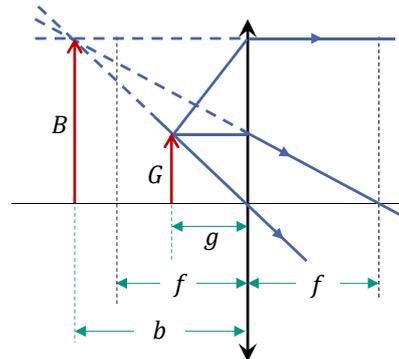
Was passiert, wenn $g < f$?

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{gf}{f-g} < 0$$

$$\frac{B}{G} = -\left(\frac{b}{f} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{G} = \frac{f}{f-g} > 1$$

Das Bild

- ... ist bezüglich der Linse auf der gleichen Seite wie das Objekt und ist vergrößert → *Lupe*.
- ... kann nicht von einem Schirm aufgefangen werden → *virtuelles Bild*.

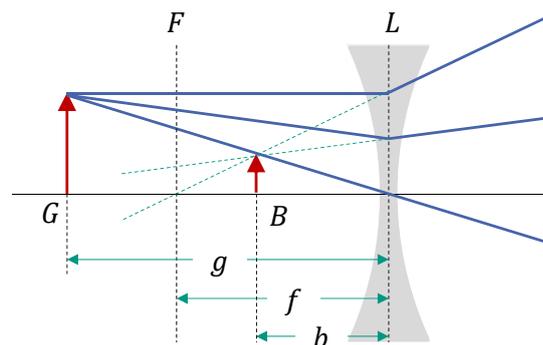


Bildkonstruktion für konkave Linsen

Zerstreuungslinsen haben negative Brennweiten. Die Brennebene liegt daher auf der Seite des einfallenden Strahls. Eine einzelne Linse erzeugt ein *virtuelles Bild* des Objekts.

Die Konstruktion verläuft vollkommen analog zu konvexen Linsen.

Gegenstandsweite g und Bildweite b sind auch negativ und es gilt im Falle dünner Linsen dieselbe Abbildungsgleichung wie bei konvexen Linsen.



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Linsensysteme

Die Abbildung zweier dünner Linsen mit Abstand d und Brennweiten f_1 und f_2 kann durch eine einzige „Linse“ H (Hauptebene) dargestellt werden. Wie groß ist die Äquivalentbrennweite f von H ?

Ergebnis (z.B. mittels Matrixoptik)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

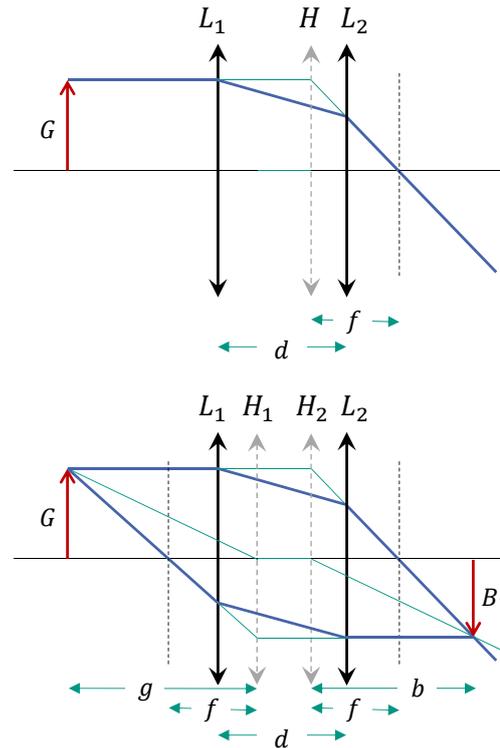
Die Brennweite kann durch Variation des Abstands d variiert werden.

Bildkonstruktion

Zur allgemeinen Konstruktion werden zwei Hauptebenen benötigt. Zwischen den Hauptebenen wird der Strahl parallel geführt.

Mit neuen Definitionen für b und g gilt dann wieder (vgl. Abb.)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

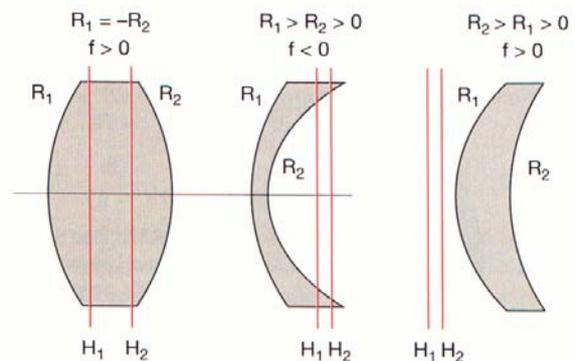
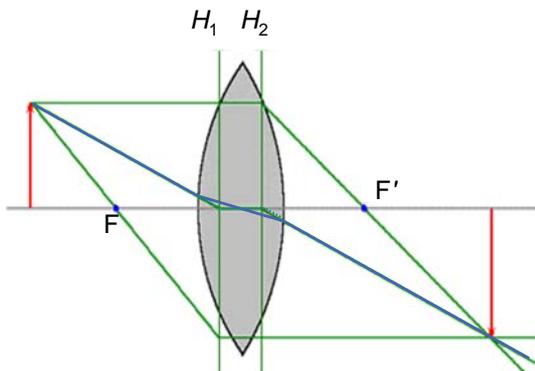


Dicke Linsen

Bei dicken Linsen ist der Strahlengang durch die Linse nicht vernachlässigbar.

Hauptebenen

Die Brechung an zwei Grenzflächen wird ersetzt durch die Brechung an zwei Hauptebenen H_1 und H_2 , dazwischen verläuft der Strahlengang parallel zur optischen Achse.



Abberationen

➤ Chromatische Abberation

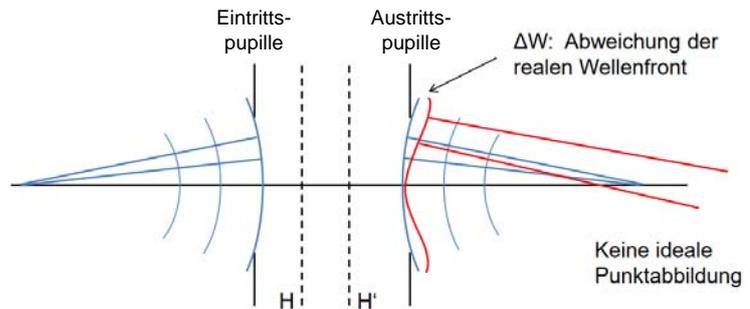
➤ Primäre (monochromatische) Abberationen

Paraxiale Näherung: $\sin \varphi \approx \varphi$

Exakte Taylorreihe: $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$

Abberationen
dritter Ordnung
(Seideltheorie)

- Sphärische Abberation
- Astigmatismus
- Koma
- Bildfeldwölbung
- Verzeichnung

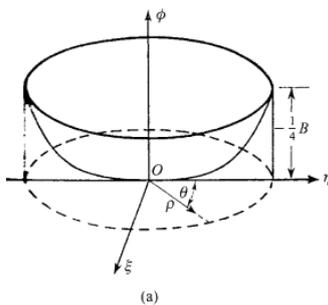


Ein- und Austrittspupille sind Bilder der strahlbegrenzenden Aperturblende.

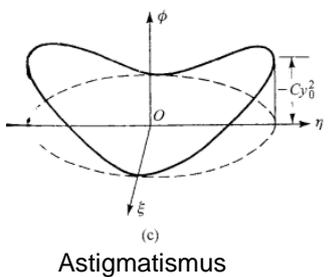
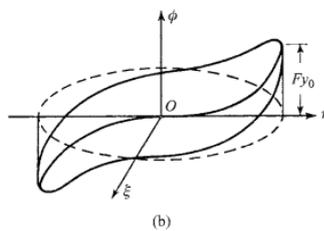
Kusserow, Grundlagen der technischen Optik, WS15/16

Abberationen der Wellenfront

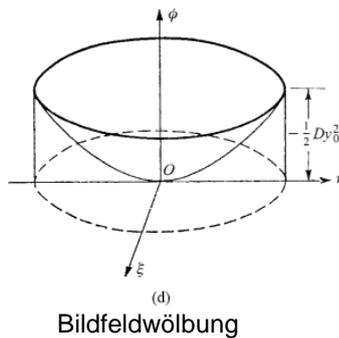
Sphärische Abberation



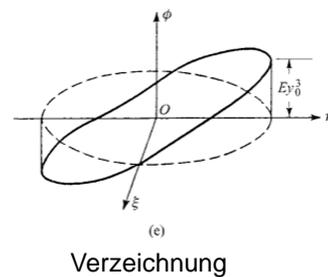
Koma



Astigmatismus



Bildfeldwölbung



Verzeichnung

Chromatische Aberration

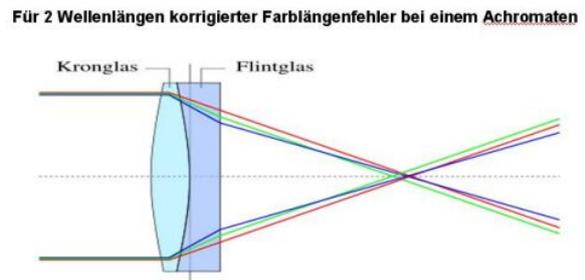
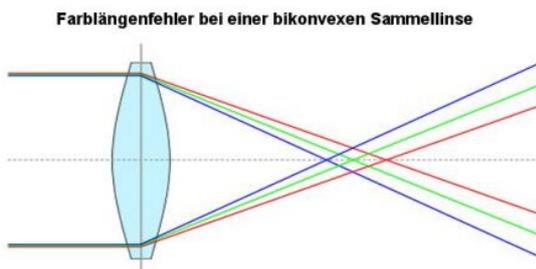
- ... resultiert aus Wellenlängenabhängigkeit der Dispersion $n(\lambda)$.
- Auch für paraxiale Optik von Bedeutung.

Abhilfe

- Kombiniere Sammellinse (n_1) mit Zerstreuungslinse ($n_2 > n_1$) → *Achromat*.
- Bestimme dazu *Abbe-Zahl* der Gläser mittels Messung bei drei Spektrallinien. grün: 546 nm; blau: 480 nm; rot: 644 nm.
- Wende zur Auswahl der Gläser für den Achromaten die *Achromasiebedingung* an.

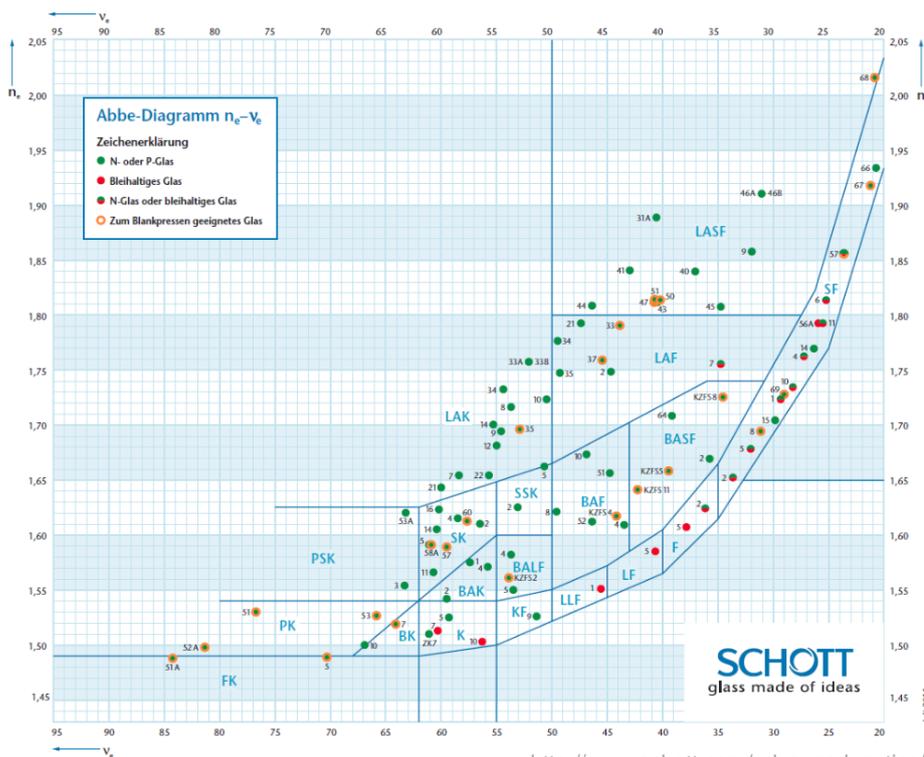
Abbe-Zahl
$$\nu = \frac{n_g - 1}{n_b - n_r}$$

Achromasiebedingung
$$\frac{1}{f_1 \nu_1} + \frac{1}{f_2 \nu_2} = 0$$



23 18.12.2018

Abbe-Zahl optischer Gläser



http://www.schott.com/advanced_optics/

24 18.12.2018

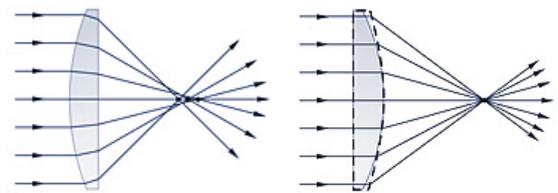
Sphärische Aberration

Öffnungsfehler

Bei monochromatischem Licht werden achsferne Strahlen stärker gebrochen als achснаhe Strahlen.

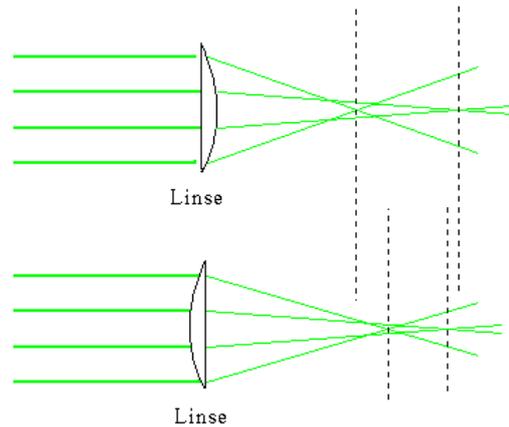
Abhilfe

- Unterdrückung achsfernener Strahlen durch Blende
- Linsenform – z.B. plankonvexe Linsen für einfallendes Parallelbündel
- sphärisch korrigierte Linsensysteme
- asphärische Linsen



sphärisch

asphärisch korrigiert



Linse

Linse

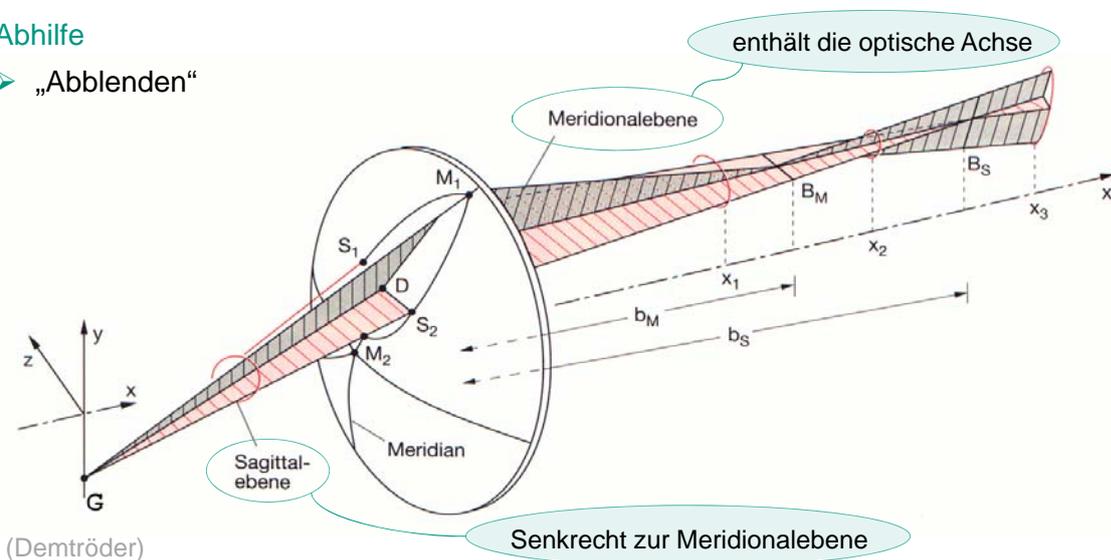
Astigmatismus (Punktlosigkeit)

Astigmatismus schiefer Bündel (Randfehler)

- Tritt auf bei Objekten abseits der Symmetrieachse.
- Abbildung eines Punktes auf zwei zueinander senkrecht verlaufende Striche an verschiedenen Positionen, dazwischen „Unschärfekreis“.

Abhilfe

- „Abblenden“



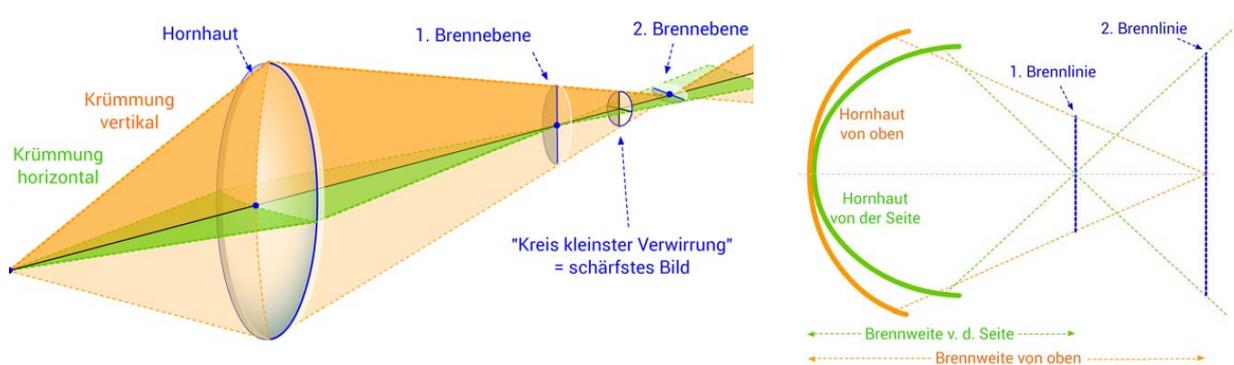
(Demtröder)

Axialer Astigmatismus

... aufgrund fehlender Rotationssymmetrie bzgl. optischer Achse, z.B. unterschiedliche Krümmungsradien orthogonaler Meridionalebenen (regulärer Astigmatismus).

Abhilfe

- zusätzliche zylindrische Krümmung (z.B. Zylinderlinse)



onlinesehtests.de

27 18.12.2018

Koma

- Vergrößerung ist abhängig von Öffnungswinkel der Strahlen.
- Entsteht wenn Objekt abseits der optischen Achse liegt.

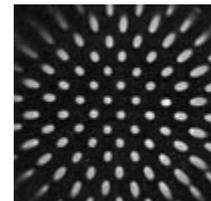
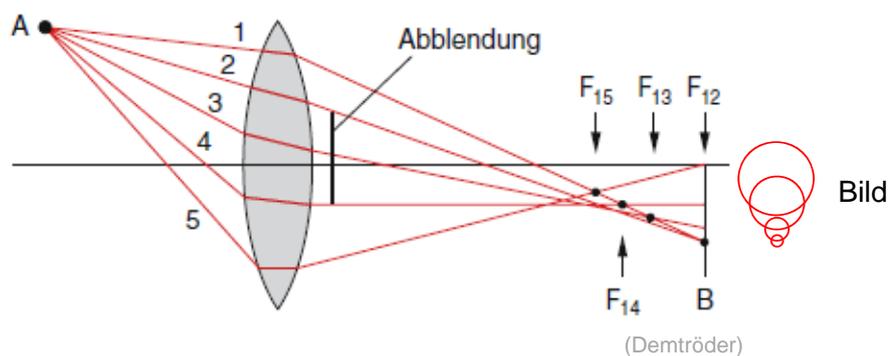


Bild eines Lochblechs mit Koma

Abhilfe

- Abblenden (abhängig von der Lage der Blende)
- Linsensysteme, die kompensiert sind für sphärische Aberration → *Aplanate*



28 18.12.2018

Abbesche Sinusbedingung

Notwendige Bedingung zur scharfen Abbildung kleiner achsnaher *Bereiche* mit Strahlen großer Öffnungswinkel → *aplanatische Abbildung*.

- Bei gleichzeitiger Korrektur der sphärischen Abberation entsteht kein Koma.

Erläuterung anhand Spezialfall

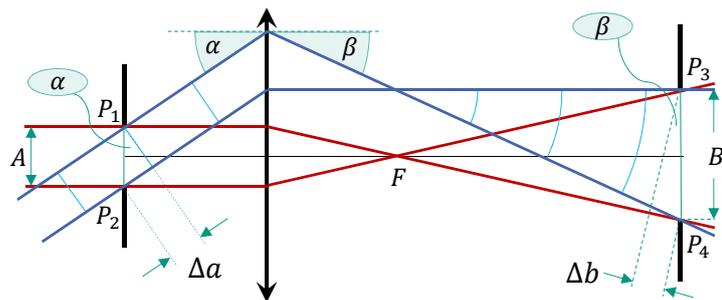
Bei idealer Punktabbildung haben alle Strahlen den gleichen optischen Weg (Abstände der Wellenfronten, vgl. S. 2-3)!

Daher $\overline{P_1P_4} = \overline{P_2P_3} \Rightarrow \overline{P_1P_4} = \overline{P_2P_3} \Rightarrow \Delta a = \Delta b$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta a}{A} &= \sin \alpha \\ \frac{\Delta b}{B} &= \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{|B|}{|A|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Sinusbedingung

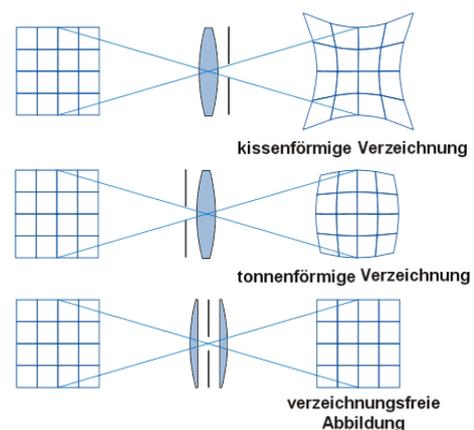
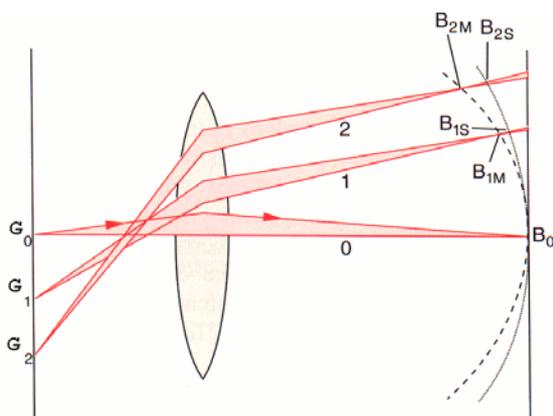


Bildfeldwölbung und Verzeichnung

- Bildfeldwölbung: Bild der Objektebene ist eine gewölbte Fläche.
- Verzeichnung: eine vom Abstand zur optischen Achse abhängige Vergrößerung aufgrund der Position der Aperturblende.

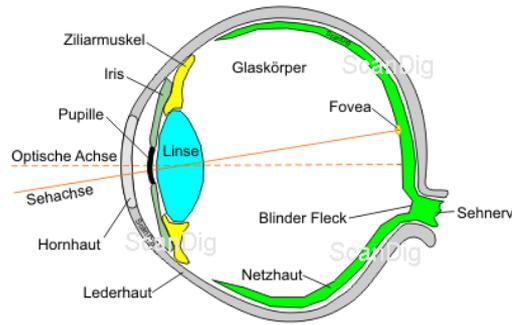
Abhilfe

- Bildfeldwölbung: Abblenden
- Verzeichnung: Positioniere Aperturblende in die für das Linsensystem beste Ebene; Telezentrische Abbildung.



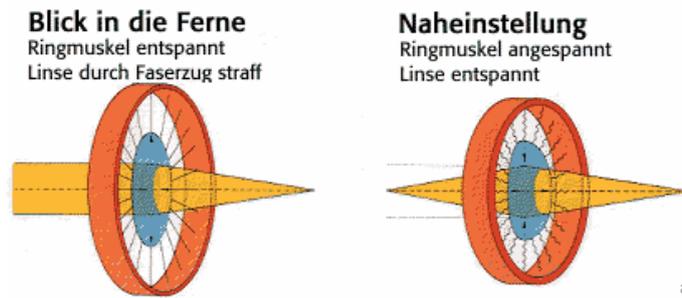
Optische Instrumente

Das Auge



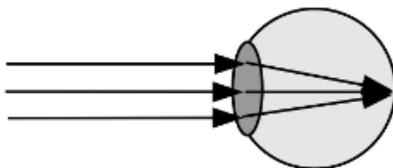
www.filmscanner.info

Akkommodation

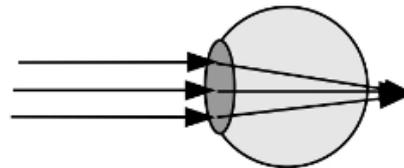


augenoptik-schneider.de

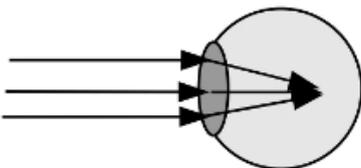
Augenfehler



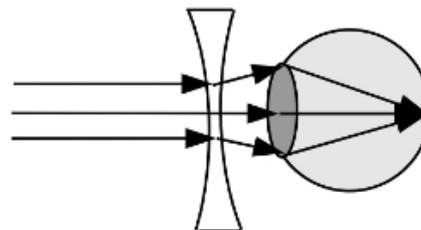
normalesichtiges Auge – der Brennpunkt liegt auf der Netzhaut



weitsichtiges Auge – der Brennpunkt liegt hinter der Netzhaut



kurzsichtiges Auge – der Brennpunkt liegt vor der Netzhaut



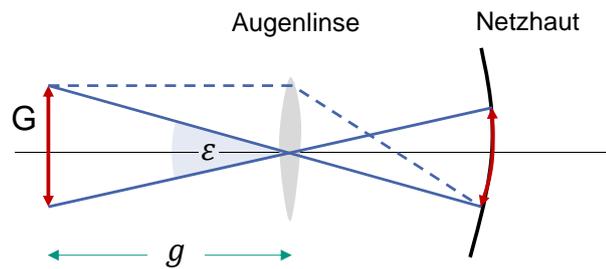
kurzsichtiges Auge mit Brille – der Brennpunkt liegt auf der Netzhaut

Sehwinkel ε des Auges

... ist der Winkel zwischen den Randstrahlen.

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{G}{2g}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \approx \frac{G}{g}$$



Die minimale Gegenstandsweite $g \geq s_0$, um ein scharfes Bild zu bekommen, ist altersabhängig (Kind 10 cm; älterer Mensch 200 cm).

Der Standard-Nahpunkt s_0 für eine deutliche Sehweite wurde festgelegt zu

$$s_0 = 25 \text{ cm}$$

Vergrößerung optischer Instrumente

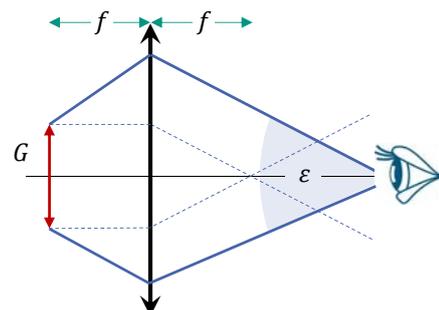
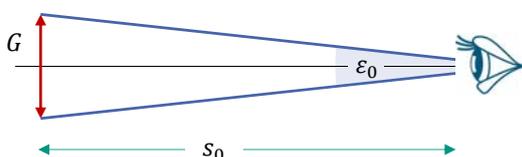
Winkelvergrößerung

$$V = \frac{\text{Sehwinkel } \varepsilon \text{ mit Instrument}}{\text{Sehwinkel } \varepsilon_0 \text{ ohne Instrument}}$$

Normalvergrößerung Lupe

Vergleiche Gegenstand in der Brennebene einer Lupe mit einem Gegenstand bei der Bezugssehweite ($s_0 = 25 \text{ cm}$) ohne Lupe. Das Bild ist im Unendlichen (entspanntes Auge).

$$V_L = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{G/f}{G/s_0} \Rightarrow V_L = \frac{s_0}{f}$$



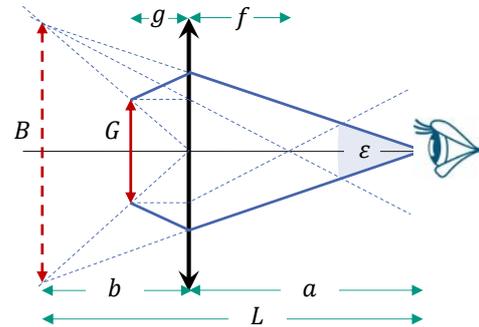
Lupe

- Sammellinse mit kurzer Brennweite f .
- Die Vergrößerung hängt von den Abständen Gegenstand-Lupe und Lupe-Auge ab.

$$V_L = \frac{B/L}{G/s_0} = -\frac{b s_0}{g L}$$

Mit $L = a - b$ und dem Abbildungsgesetz folgt

$$V_L = \frac{s_0}{f} \cdot \frac{f}{g + a \left(1 - \frac{g}{f}\right)}$$



Für $g = f$ wird $V_L = s_0/f$ (Normalvergrößerung).

Beispiel: $f = 10 \text{ cm} \Rightarrow V = 2.5$

Das Netzhautbild ist also 2.5 mal größer als das Bild des Objekts ohne Lupe. Die Vergrößerung wird kleiner für $g < f$. Dann ist das Bild zudem im Endlichen und das Auge nicht entspannt.

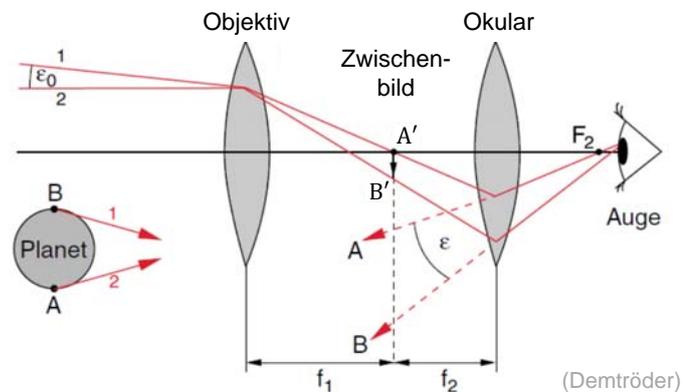
Das Keplersche Fernrohr

- Zwei Sammellinsen mit gemeinsamer Brennebene; das Objektiv hat eine große Brennweite f_1 im Vergleich zur Brennweite f_2 des Okulars.
- Es entsteht für $g \rightarrow \infty$ ein reelles Zwischenbild in der Brennebene; das Auge sieht ein invertiertes Bild im Unendlichen.

Vergrößerung

$$\varepsilon_0 = \frac{A'B'}{f_1} \quad \varepsilon = \frac{A'B'}{f_2}$$

$$\Rightarrow V_F = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{f_1}{f_2}$$



Auflösungsvermögen eines Teleskops

Bei Beobachtung eines weit entfernten Sterns entspricht dieser einer punktförmigen Lichtquelle. Das Teleskop hat eine kreisförmige Eintrittsöffnung mit Durchmesser D , die als Lochblende wirkt und Beugung hervorruft. Das Bild des Sterns ist ein Beugungsscheibchen (Intensitätsprofil ist „Airy-Funktion“).

Für den Beugungswinkel des 1. Minimums gilt

$$\sin \alpha_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Der kleinstmögliche Abstand im Bild zweier gerade noch als getrennt wahrnehmbarer Punktlichtquellen ist daher (Rayleigh-Kriterium)

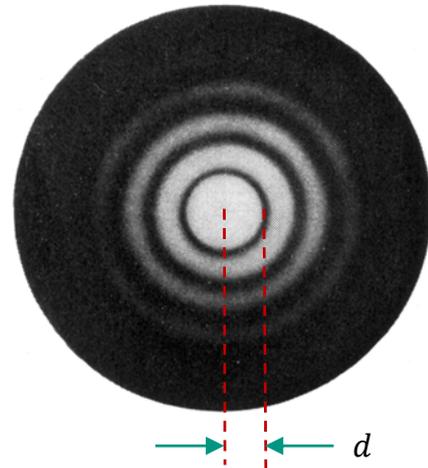
$$d = f \alpha_{\min} \cong 1.22 \frac{f \lambda}{D}$$

Beispiel: Hubble-Teleskop

$D = 2.4 \text{ m} \Rightarrow \alpha_{\min} = 2.54 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$ (bei $\lambda = 500 \text{ nm}$)

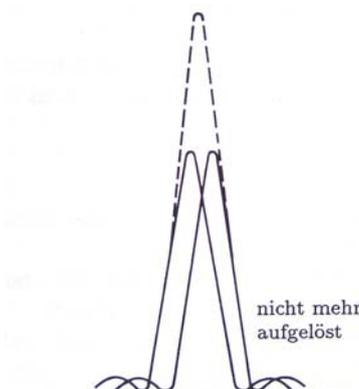
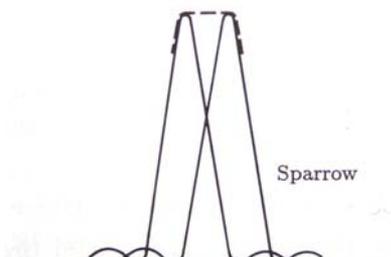
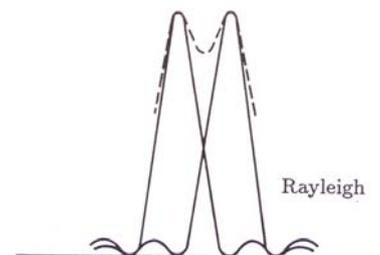
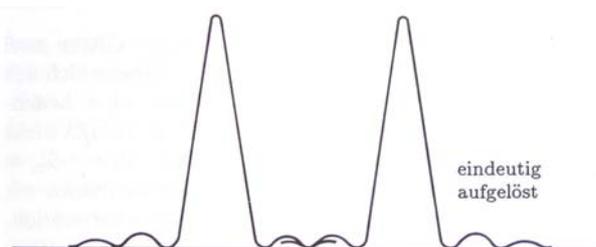
Das entspricht 96 m bei Beobachtung des Mondes.

Beugungsmuster einer Lochblende



Born & Wolf, Principles of Optics

Auflösungskriterium nach Rayleigh



Mikroskop

Ein kurzbrennweitiges Objektiv erzeugt ein reelles Zwischenbild in der Brennebene des Okulars.

Vergrößerung

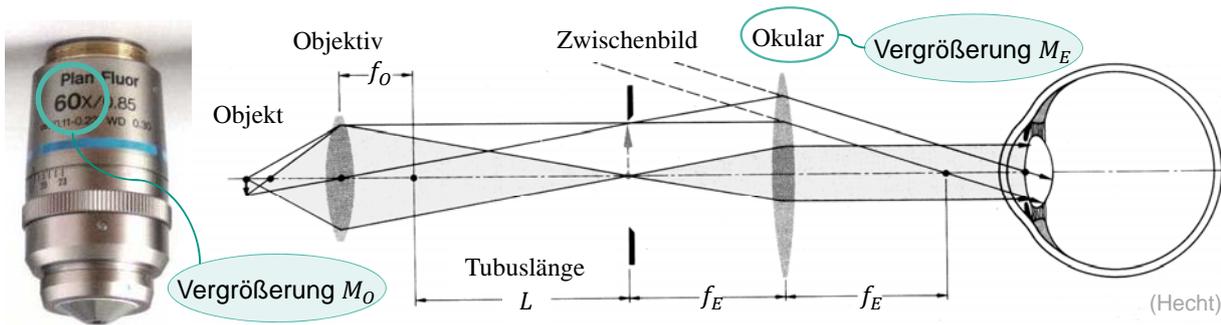
$$V_M = M_O \cdot M_E$$

$$M_O = -\frac{b}{g} = -\frac{b-f_O}{f_O} = -\frac{L}{f_O}$$

$$M_E = \frac{s_0}{f_E} \quad (\text{Lupe})$$

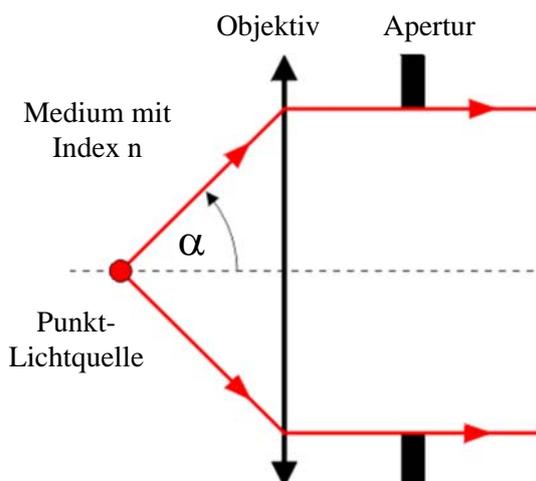
\Rightarrow

$$V_M = -\frac{L}{f_O} \frac{s_0}{f_E}$$



39 18.12.2018

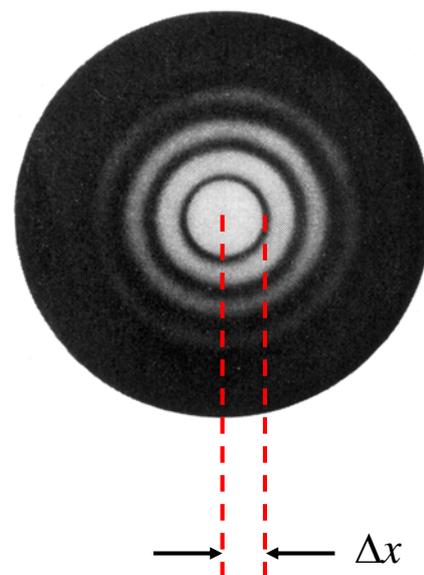
Auflösungsvermögen eines Mikroskops



$$\Delta x = 0.61 \frac{\lambda}{NA} ; \quad NA = n \sin \alpha$$

(objektseitig)

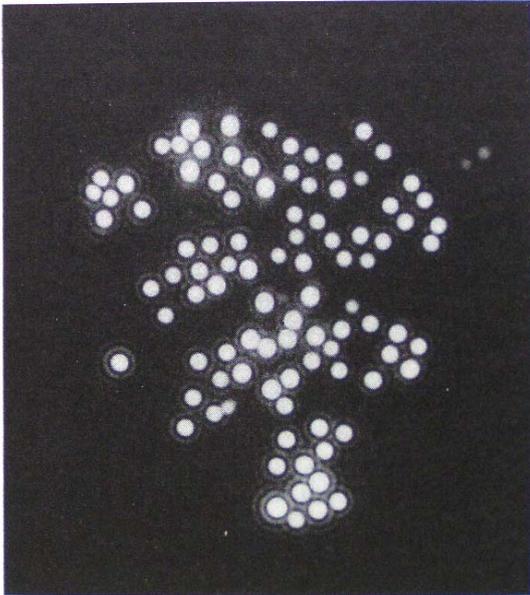
Airy-Beugungsringe



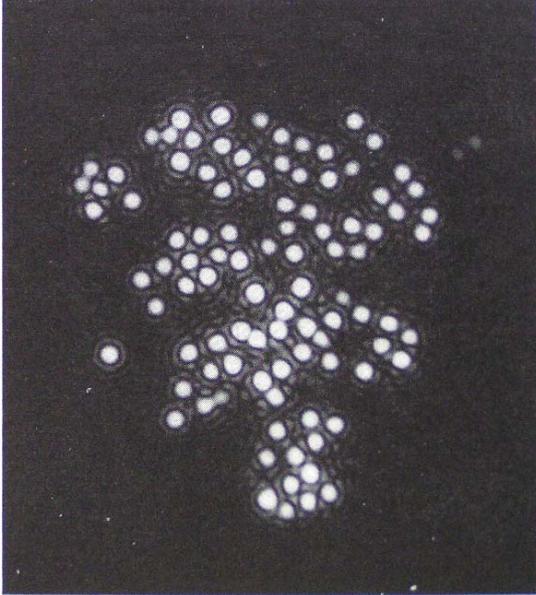
Born & Wolf, Principles of Optics

Beleuchtungsbedingungen

Inkohärente Beleuchtung

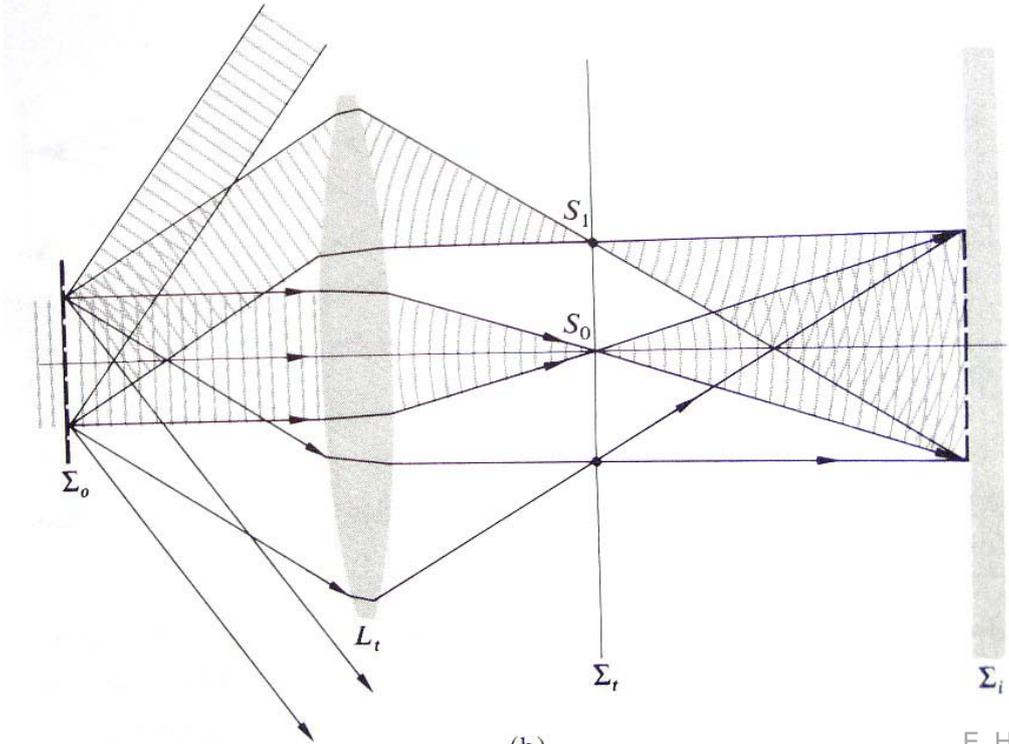


Kohärente Beleuchtung



E. Hecht, Optik

Bildentstehung nach Abbe



(b)

E. Hecht, Optik

Beugungmaxima an Gitter (Spaltabstand d)

1. Maximum (senkrechter Lichteinfall):

$$\lambda = d \sin \varphi \Rightarrow d = \frac{\lambda}{\sin \varphi}$$

Anregung der Spalte mit Phasendifferenz π (schräger Lichteinfall) ergibt Maxima für Haupt- und 1. Nebenmaximum von:

$$\frac{\lambda}{2} = d \sin \varphi \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \sin \varphi}$$



Modernes Mikroskop

