

6. Interferenz und Beugung

6.1 Kohärenz

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Die Wellengleichung ist eine lineare Differentialgleichung

$\Rightarrow$ Erfüllen $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ und $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ die Wellengleichung, so erfüllen auch

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = a \vec{E}_1(\vec{r}, t) + b \vec{E}_2(\vec{r}, t)$$

die Wellengleichung (für beliebige a und b).

Ein Wellenfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ an einem Scherort $\vec{r}$ zu Zeit t kann also aus der Überlagerung mehrerer Teilwellen $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ resultieren.

Superpositionsprinzip

Diese Überlagerung der Teilwellen nennen wir Interferenz

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{A}_m(\vec{r}, t) e^{i\phi_m} \quad \begin{matrix} \phi_m(t) \\ \phi_m(\vec{r}) \end{matrix}$$

Messgröße ist oft die Intensität

$$I(\vec{r}, t) \propto |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2$$

Stationäre Interferenzmuster $I(\vec{r})$ gibt es nur, falls die Teilwellen „kohärent“ sind.

Eine räumliche Begrenzung im Wellenfeld
(z.B. eine Blende) unterbricht ein Teil der
fortpflanzenden Wellen (unvollständiger Einkupplung)
→ Beugungsphänomene

Wir betrachten zwei Teilwellen $\vec{E}_j, \vec{E}_k$

- E_j und E_k heißen zeitlich kohärent, wenn
ihre Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_k$ in einem
Raumpunkt $\vec{r}$ sich während des Beobachtungszeit
 Δt um weniger als 2π ändert.
- Die maximale Zeitspanne Δt , während der zwei
Wellen an Punkt $\vec{r}$ kohärent sind, nennt
man die Kohärenzzeit.

Ursache für Phasendifferenz $\Delta\varphi$?

Fluktuationen der Frequenz ν hier oder
beider Teilwellen (bzw. der Wellenlänge λ)
Fluktuationen der Phase hier oder beider
Teilwellen

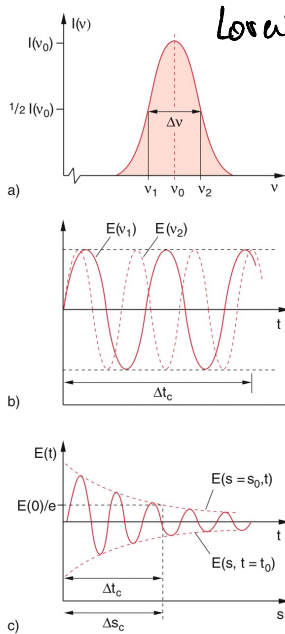
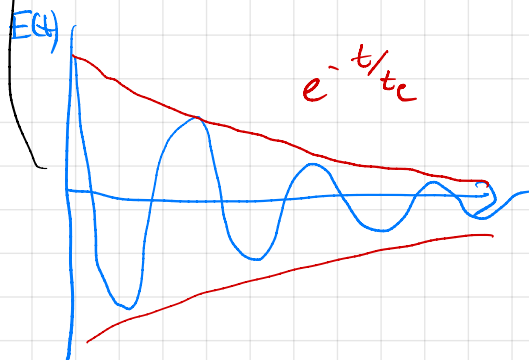


Abbildung 10.1 Zur zeitlichen Kohärenz einer Welle mit der spektralen Frequenzbreite $\Delta\nu$. Die Kohärenzzeit ist $\Delta t_c = 1/\Delta\nu$. a) Spektralverteilung $I(\nu)$; b) zeitliche Überlagerung zweier Teilwellen; c) zeitlicher Verlauf der Gesamtfeldstärke aller Komponenten in (a)

lokale Welle

Angeregte Atome geben Licht in dem angeregten niedrigen Zustand in Form eines exponentiellen Zerfalls. Dies verhält sich wie Leeren harmonischen Oszillators mit Dämpfung.



Deutliches

Es ergibt sich eine "Lebensdauer" in der Frequenz von $\Delta\nu$.

Zwei Teilwellen mit $\omega_0 - \Delta\omega/2$ und $\omega_0 + \Delta\omega/2$

$$\Delta\varphi(t) = \left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) - \left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right] t = \Delta\omega \cdot t$$

Phasendifferenz wächst linear mit der Zeit.

$$\Delta\varphi(\Delta t_c) = 2\pi = \Delta\omega \cdot \Delta t_c$$

Kohärenzzeit $\Delta t_c = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}$

Kohärenzlänge $l_c = c \cdot \Delta t_c$

Kohärenzvolumen Definition analog

Interferenzraum muss innerhalb des Kohärenzvolumens

beobachtet werden.

Gesamtladungslampen

$$\Delta U = 2 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta U} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ s} = 500 \text{ ps}$$

$$l_c = c \cdot \Delta t_c = 0.15 \text{ m}$$

Glühlampe

l_c wenige μm

Lasers

l_c einige km

ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{A} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\Delta U = 0 \Rightarrow l_c = \infty$$

Gesamte Welle ist kohärent

Kugelwelle

$$\vec{E} = \frac{\vec{A}}{|\vec{r}|} e^{i(k|\vec{r}| - \omega t)}$$

Gesamte Welle ist kohärent

$$l_c = \infty$$

Erzeugung kohärenter Lichtwellen für die Beobachtung in Experiment

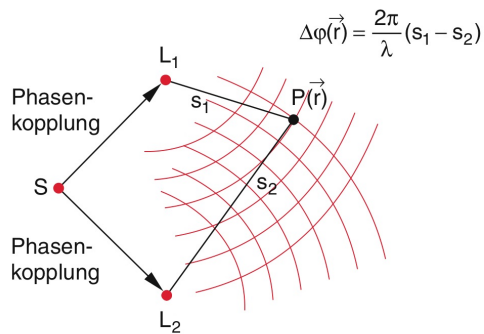


Abbildung 10.3 Phasensatte Kopplung zweier Quellen L_1 und L_2 an einen Sender S zur Erzeugung kohärenter Teilwellen, die sich im Interferenzgebiet mit zeitlich konstanten, aber ortsabhängigen Phasendifferenzen $\Delta\varphi(\vec{r})$ überlagern

Gesetzladyslawen der
 Glühbirne zur
 inkohärenten Emission
 von Licht emittieren
 Händer (mechanische Oszillationen)

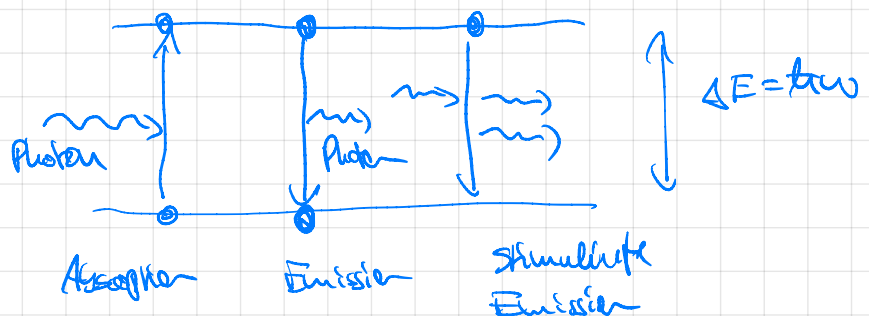
Quantenphysik

Der Laser Light amplification by stimulated emission of radiation

Kurzer Ausflug in die Quantenmechanik

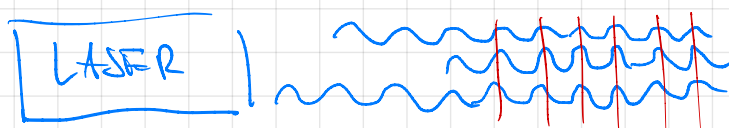
angeregter Zustand

Grundzustand

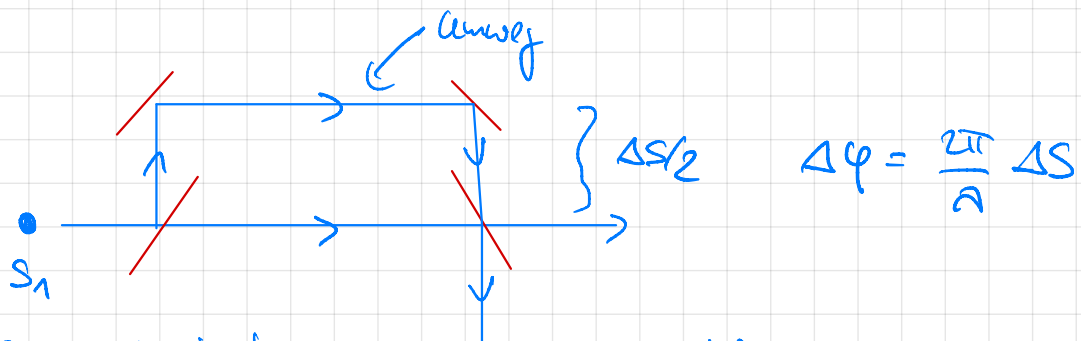


Die stimulierte Emission ist kohärent, d.h. beide Photonen haben die selbe Phase.

Dies ist eine Folge der Quantisierung in Photonen



⇒ extrem kohärent -
 fast unendliche Länge



6.2 Interferenz zweier Strahlen

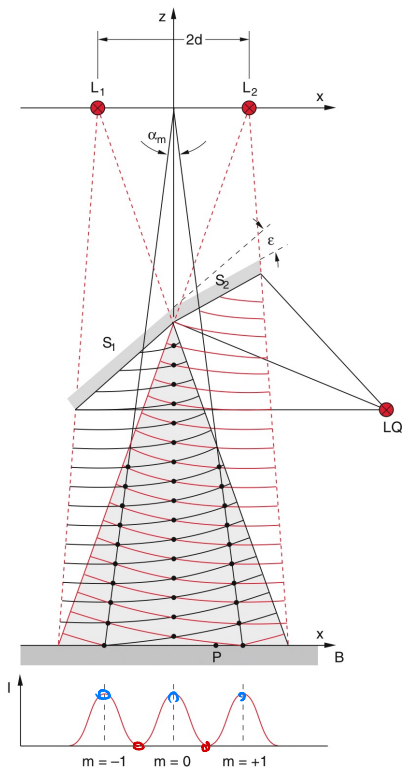


Abbildung 10.5 Fresnel'scher Spiegelversuch

Deutlich

Fresnel'sche Spiegelversuch

beide gekrümmten Spiegel

äquivalent mit zwei Lichtquellen

(virtuell) mit Abstand $2d$,

die das in Wirklichkeit

beide virtuellen Bilder der selben

Lichtquelle LQ sind, d.h.

"synchronisiert" sind.

Weglänge $LQ - S_1 - P$ bzw.

$LQ - S_2 - P$ entsprechen den

Wegen $L_1 P$ bzw. $L_2 P$.

$$\Delta S = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

Punkte mit konstantem ΔS liegen auf Hyperbeln

in der xz -Ebene

$$\Delta S = m \cdot \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\Delta S < l_c)$$

$$I_{\max} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right)^2 \quad E_1 = E_2$$

$$= \frac{1}{2} c \epsilon_0$$

$$m = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$$

4 fach höhere Intensität!

$$I_{\text{neu}} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right)$$

$$= 0$$

$$\text{für } |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$$

In Mittel ist die Intensität auf dem
 Schirm $I_1 + I_2$ da beide Teilwellen,
 variiert als Zahlen 0 und 4 I_1 .
 ($I_1 = I_2$)

$$k = c/\Delta U > \Delta S$$

→ Experiment

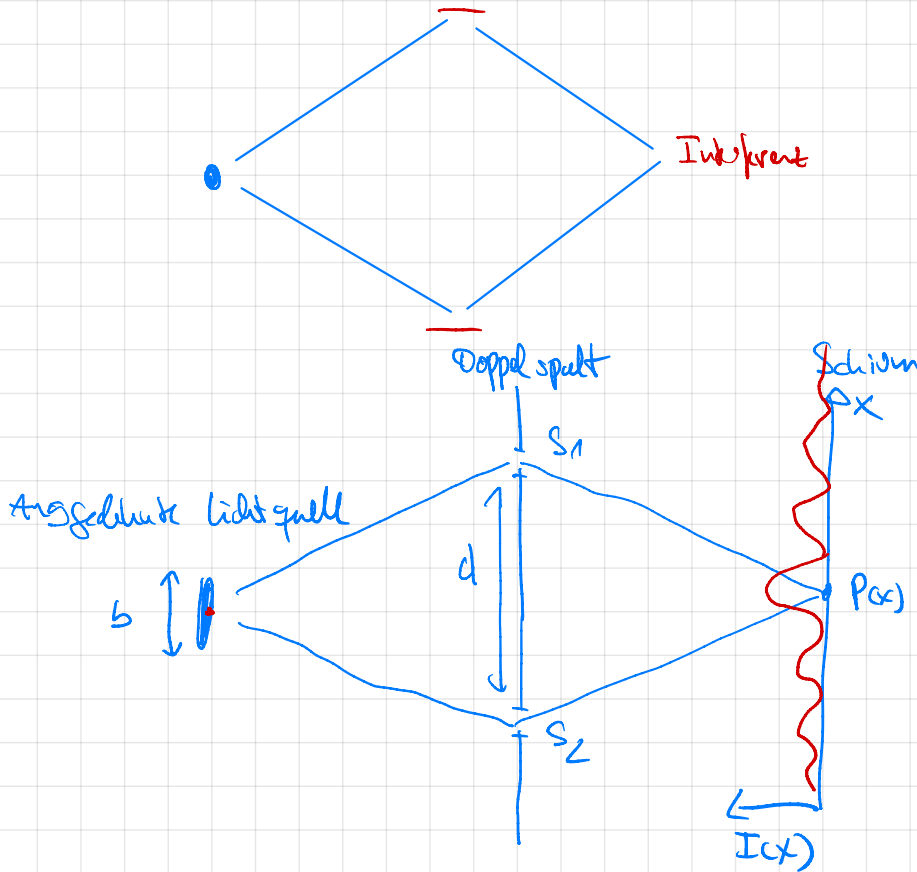
Experiment zuerst von Augustin Jean Fresnel 1821



1788 - 1827

Young'sche Doppelspaltexperiment

1803



Huygensches Prinzip in diese Fall Kugelwellen am Austritt des Spalts vorhersagen.

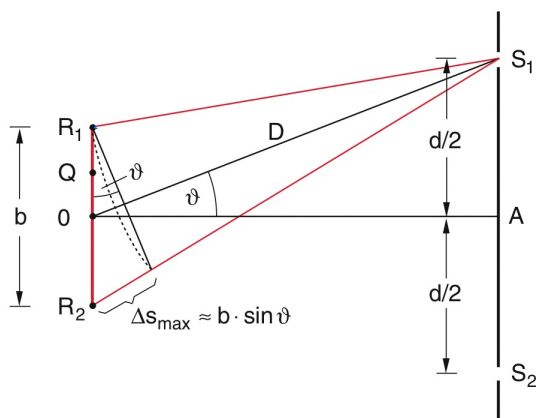


Abbildung 10.7 Zum Einfluss der Quellengröße auf die Kohärenz der Wellen am Ort der Spalte S_1 und S_2

$$\Delta s_{\max} = b \sin \vartheta$$

$$\approx \frac{b \cdot d}{2D} < \frac{\lambda}{2}$$

⇒ Interferenz auf dem Schirm sichtbar

$$\Rightarrow \frac{d}{\lambda} < \frac{D}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{\lambda^2} < \frac{D^2}{b^2} = \frac{1}{\Delta \Omega}$$

Oberbündel

Für eine ausgedehnte Lichtquelle

$$F_c = d^2 \leq \frac{\lambda^2}{\Delta \Omega}$$

Dann sehen wir Interferenz

- Glühbirne $b = 1 \text{ cm}$, $D = 0,5 \text{ m}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$
 $\Rightarrow d \leq 25 \mu\text{m}$

- Licht des Sterns proxima Centauri

$$b \approx 10^{10} \text{ m} \quad D = 4 \cdot b \cdot \lambda f = 4 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

$$\lambda = 500 \text{ nm} \quad \Rightarrow d \leq 2 \text{ m}$$

$\rightarrow$ Stern interferometrie und Diskretisierung.

$\rightarrow$ Experiment

Das Michelson Interferometer

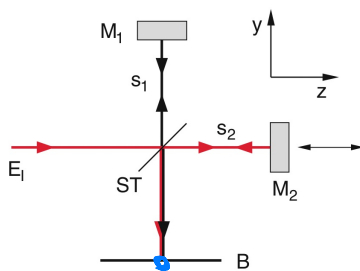


Abbildung 10.10 Schematische Darstellung des Michelson-Interferometers

$$\vec{\pi}_i = \vec{A}_i \cos(\omega t - k z)$$

monochromatisches Licht

$$\text{Erste Teilwelle} \quad |\vec{E}_1| = \sqrt{RT} A_i \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\text{Zweite Teilwelle} \quad |\vec{E}_2| = \sqrt{TR} A_i \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Alles an Sensor B

Resultat

$$\text{Auf der Detektorfläche B: } S = \epsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2$$

$$= \epsilon_0 R T A_i^2 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]^2$$

$$I = \langle S(t) \rangle = 2 R T I_0 (1 + \cos \Delta \varphi) \quad \Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \cos(\omega t) \rangle = 0$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$R = T = 0.5$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} I_e (1 + \cos \Delta \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} I_e \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s \right)$$

$$\Delta s = 0$$

$$\Rightarrow I = I_e$$

Licht geht in volles

Intensität auf den Schirm

$$\Delta s = \frac{\lambda}{2}, \dots$$

$$\Rightarrow I = 0$$

Licht geht in volles

Intensität zurück in die Lichtquelle

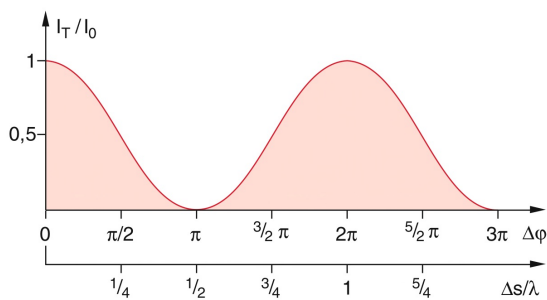


Abbildung 10.11 Transmission des Michelson-Interferometers als Funktion des Wegunterschiedes $\Delta s/\lambda$ in Einheiten der Wellenlänge λ bei monochromatischer einfallender ebener Welle

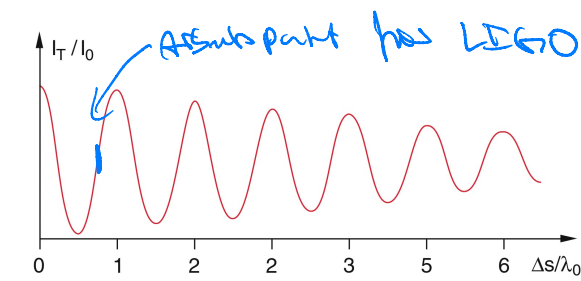
Das ist die extreme

Genauigkeit der Messung

$$\text{von } \lambda \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 10^{-8}$$

Denk dir

Das ganze klappt nur für $\Delta s < l_c$



Denk dir

Gravitationswellen

Hotelpross 2017

Weiss, Barish, Thorne

LIGO Experiment

2x 4km Arme im Vakuum

Licht macht jeweils 280

Weg hin und her

Genauigkeit der Änderung der

Länge $\frac{\Delta L}{L} = 10^{-21}$

das Licht entspricht dies

100kW LASER



WIKI

Auf gesamter Weg

1 fm

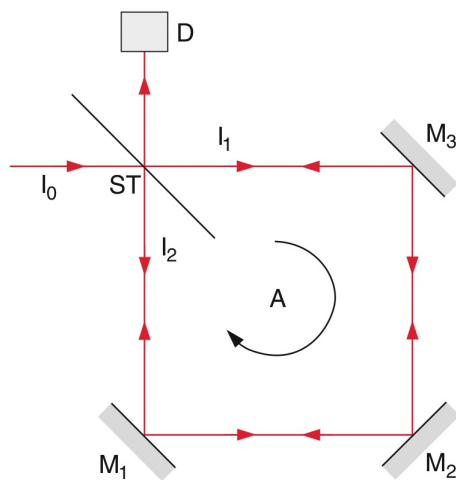


Abbildung 10.18 Sagnac-Interferometer

Deutlicher

Sagnac Interferometer

Weglänge zweier Teilwellen

ist gleich

→ konstruktive Interferenz

im Detektor

Wird das Interferometer

gedreht, so verschiebt sich

die $\Delta S \neq 0 \propto \omega$

Zwei Strahl Interferenz an planparallelen Platte

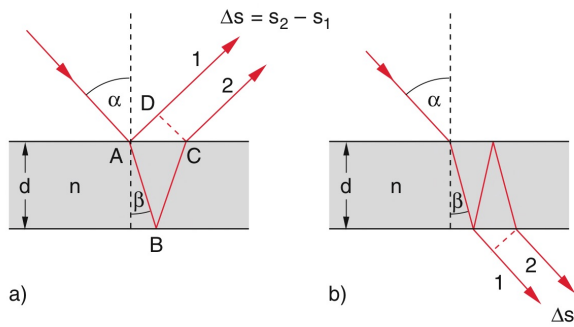


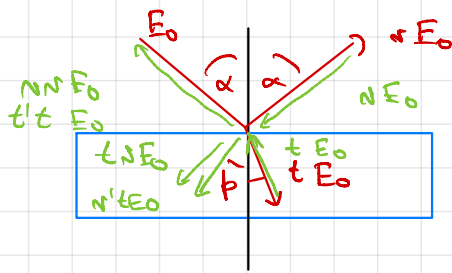
Abbildung 10.8 Zur Berechnung des Gangunterschiedes bei der Interferenz an einer planparallelen durchsichtigen Platte **a** im reflektierten Licht; **b** im transmittierten Licht

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s - \pi \quad \uparrow \text{Reflexion}$$

Farbe dünne Schichte

Ordnung

6.3 Vielstreuung



Wir verwenden n und t

wobei in Kapitel 2 an Grenzflächen

Wir verwenden die Zeitumkehrinvarianz

Auch die Situation des rückwärts laufenden Strahls erfüllen die Maxwell-Gleichungen mit den selben Koeffizienten n und t .

Die beiden Situationen sind nicht unterschieden bezüglich des Lichtflusses des Strahls.

$$\Rightarrow t(\alpha) r(\alpha) E_0 + n'(\beta) t(\alpha) E_0 = 0$$

$$E_0 = n(\alpha) r(\alpha) E_0 + t'(\beta) t(\alpha) E_0$$

mit Reflexions- und Transmissionskoeffizienten des E-Vektors für den Eintritt / Reflexion in / an dem optisch dichteren Medium

n', t' analog für den Austritt / Reflexion an optisch dünneren Medien

$$t(\alpha) t'(\beta) = 1 - r^2(\alpha)$$

$$r'(\beta) = -r(\alpha)$$

Stokes-Relationen

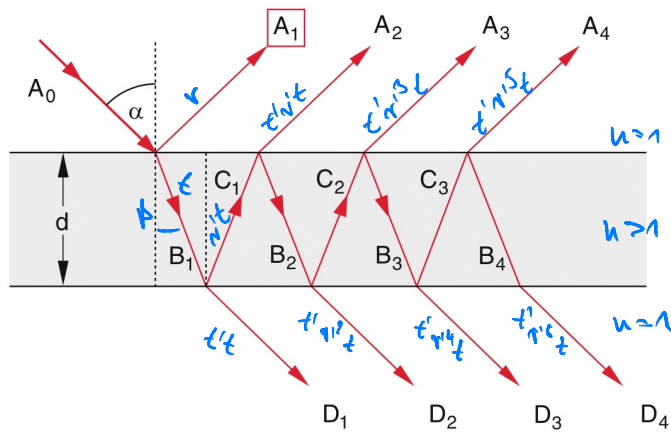


Abbildung 10.20 Vielstrahlinterferenz an zwei planparallelen Grenzflächen mit dem Reflexionsvermögen R und dem Abstand d

Gesamt

Für die Amplitude der reflektierten Welle

$$E_r = E_{r1} + E_{r2} + E_{r3} + \dots$$

$$= r E_0 + t' r' t E_0 e^{i\Delta\varphi} + t' r' t^3 E_0 e^{2i\Delta\varphi} + \dots$$

$$= r E_0 + t' r' t E_0 e^{i\Delta\varphi} + t' r' t^3 E_0 e^{2i\Delta\varphi} + \dots$$

$$= E_0 \left(r + r' t' t e^{i\Delta\varphi} \left[1 + r'^2 e^{i\Delta\varphi} + (r'^2 e^{i\Delta\varphi})^2 + \dots \right] \right)$$

geometrische Reihe $|r'^2 e^{i\Delta\varphi}| < 1$

$$= E_0 \left(r + r' t' t e^{i\Delta\varphi} \frac{1}{1 - r'^2 e^{i\Delta\varphi}} \right)$$

Stokes $t t' = 1 - r^2$, $r' = -r$

$$= E_0 \left(r + \frac{(-r)(1 - r^2) e^{i\Delta\varphi}}{1 - r^2 e^{i\Delta\varphi}} \right)$$

$$= E_0 \frac{r(1 - e^{i\Delta\varphi})}{1 - r^2 e^{i\Delta\varphi}}$$

Intensität

$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_s E_s^* = I_0 R$$

$$\frac{2 - 2\cos\Delta\varphi}{1 + R^2 - 2R\cos\Delta\varphi}$$

$$R = r^2$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$$

$$I_R = I_0$$

$$\frac{4R \sin^2(\Delta\varphi/2)}{(1-R^2) + 4R \sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

Analog für

$$I_T = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R^2) + 4R \sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

$$I_R + I_T = I_0$$

Finesse
koeffizient

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

$$I_R = I_0 \frac{F \sin^2(\Delta\varphi/2)}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

Airy
Formeln

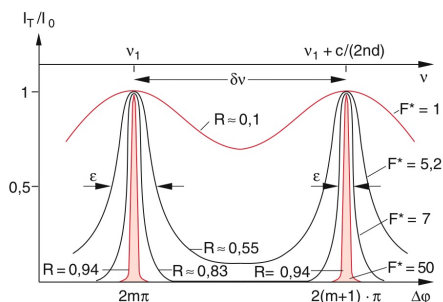
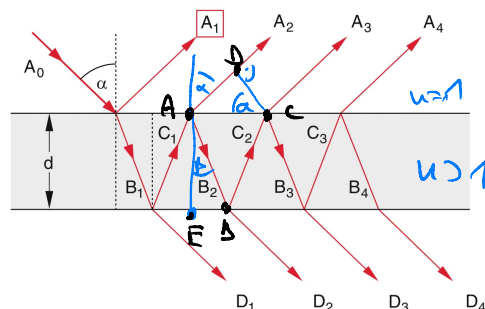


Abbildung 10.22 Transmission $T = I_T/I_0$ einer planparallelen Platte bei senkrechtem Lichteinfall als Funktion der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ für verschiedene Werte des Reflexionsvermögens R . Zur Definition der Finesse F^* siehe (10.30)



Denkmal

optische Wegdifferenz $\Delta S = n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD}$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = d / \cos \beta$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \sin \alpha$$

$$\overline{AC} \quad 2\overline{EB} = 2d \tan \beta$$

$$\Delta S = \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

$$\Delta S = \frac{2nd}{\cos \beta} - \frac{2nd \sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2nd \cos \beta$$

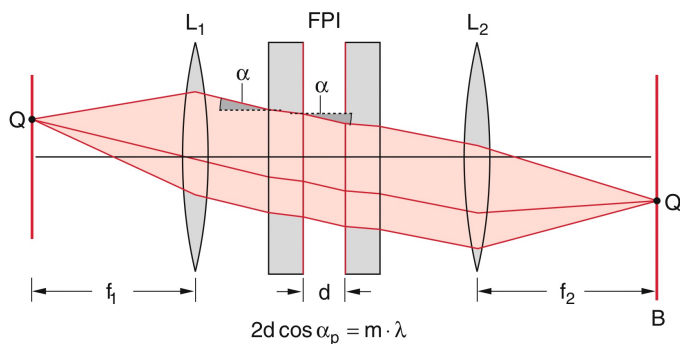
$$= 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S$$

Experiment 1 : Vielstahlinterferenz an Gittern
in Reflexion $F \approx 2-3$

Experiment 2 : Vielstahlinterferenz in sog.
Fabry Perot Interferenzen in
Transmission mit hoher Finesse

und Streuung



Ordnung

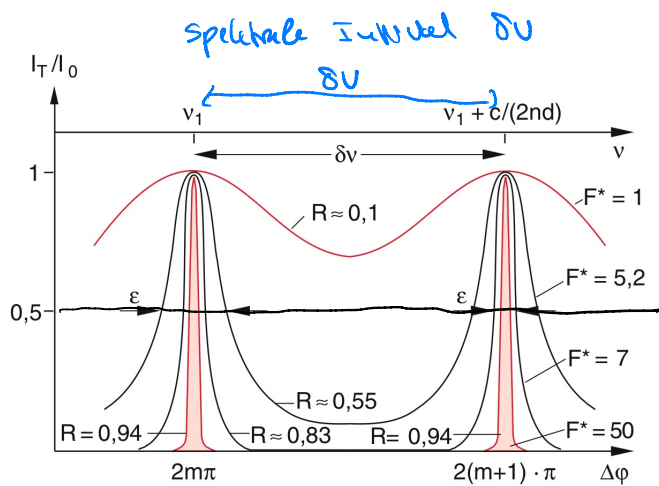
Natrium doppelte

Doppelte

$$588,99 \text{ nm}$$

$$589,59 \text{ nm}$$

$$\Delta \lambda = 0,6 \text{ nm}$$



I_T ist maximal für

$$\Delta\varphi = 2\pi m \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta = \Delta S/m = \frac{2d}{m} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha}$$

volle Halbwertsbreite Σ

Definition

$$\Sigma = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 \quad \text{mit } I_T(\Delta\varphi_{1,2}) = \frac{I_0}{2}$$

Aus der Airy Formel für genügend großes F :

$$\Sigma = 4 \arcsin \sqrt{1/F} \approx \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

Wird R groß ($R > 1$) $\Rightarrow \Sigma$ wird klein

$\Rightarrow$ Bei senkrechtem Einfall nur Transmission für $\Delta m = 2nd/m$ oberer mit kleiner Breite.

$$\left| \frac{\Delta\Delta}{\Delta} \right| = \left| \frac{\Delta v}{v} \right| = \frac{\Sigma}{2\pi} \cdot \frac{\Delta v}{v}$$

$$= \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \frac{\delta v}{2\pi} \frac{\delta v}{v}$$

$$F^* = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} \quad \Rightarrow$$

Die Halbwertsbreite Δv der Transmission eines FPI

ist gegeben durch $\frac{\delta v}{F^*}$.

Beispiel

$R = 0,98 \Rightarrow F^* \approx 155$, d. h. für $R = 0,98$ interferieren etwa 155 Teilwellen miteinander. Bei einer optischen Dicke $n \cdot d = 3 \text{ cm} \Rightarrow \delta\nu = c/(2nd) = 5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \Delta\nu = \delta\nu/F^* = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} = 32 \text{ MHz}$ ▶

Denkmal

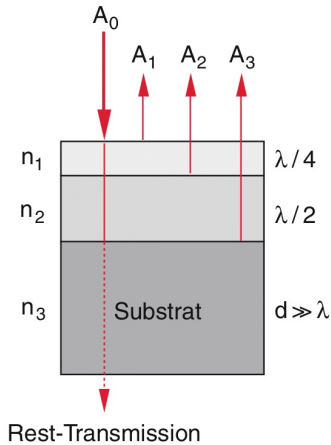


Abbildung 10.28 Überlagerung der reflektierten Amplituden bei einem dielektrischen Zweischichtenspiegel mit $n_1 > n_2 > n_3$

Denkmal

Grün Licht 500 THz

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{32 \text{ MHz}}{500 \text{ THz}} = 1,5 \cdot 10^{-7}$$

Durch Verwendung von dünnen Schichten kann eine hochreflektierende Oberfläche erzeugt werden.

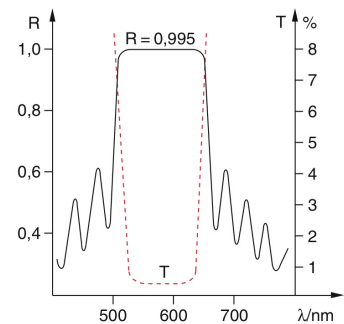


Abbildung 10.29 Reflexionsvermögen $R(\lambda)$ eines dielektrischen Mehrschichtenspiegels

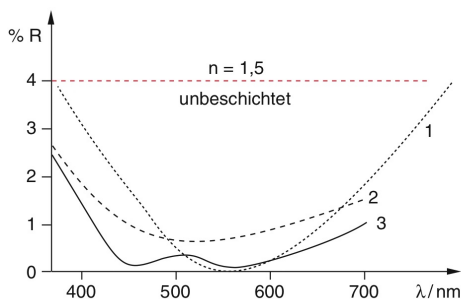


Abbildung 10.31 Restreflexion bei einer einfachen Antireflexschicht (Kurve 1) im Vergleich mit unbeschichtetem Glas mit $n_2 = 1,5$. Die Kurve 2 wird durch einen Zweischichten-Breitband-Antireflexbelag erreicht, Kurve 3 durch einen Dreischichtenbelag

Denkmal

Denkmal

Antireflexschichten

z.B. in Brillen etc.

Weitere Anwendungen: schmalbandige Filter

6.4 Mathematischer Einschnitt : Die Fouriertransformation

$f(t)$ sei eine Funktion der Zeit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{ist die}$$

Fouriertransformierte von $f(t)$

Vorfaktor wird oft auf 1 gesetzt

Beispiel

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \cdot e^{i\omega t} dt$$

Für die Fouriertransformation müssen wir den "Begriff" der Funktion erweitern in sogenannte Distributionen.

$$e^{-i\omega_0 t}$$

$$e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{\gamma}{2} t^2}$$

$$\text{Für } \gamma \geq 0$$

Wachsende Funktionen identisch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a}+c}$$

$$f(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

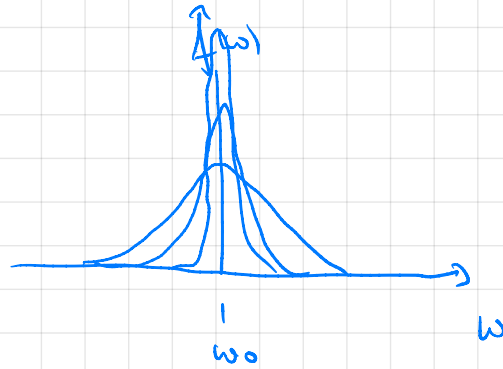
$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{\gamma \geq 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-\frac{1}{4}\frac{1}{\gamma}(\omega-\omega_0)^2}$$

$\tilde{f}(\omega)$ ist proportional zu einer δ -Distribution.

Wie nennt man das für eine δ -Funktion.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4\pi} (\omega - \omega_0)^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{4\pi}}} \cdot 1 = \sqrt{2\pi} = \text{const.}$$



$$f(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0)$$

Für unser Cosinus - Funktion $f(t) = \cos(\omega_0 t)$



Inverse Fourier Transformation

$$\tilde{f}(\omega) \rightarrow f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Falls verfügbar: Ein
Fouriertransformationspaar
konstruieren, Skizze
wie $\frac{1}{2\pi}$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt' \right) e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} dt' d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega(t'-t)} d\omega dt' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') 2\pi \delta(t-t') dt' \\
&= \frac{2\pi}{2\pi} f(t) = f(t) \quad \text{g.e.l.}
\end{aligned}$$

Faltungssatz:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t') h(t') dt' \quad \text{Faltung}$$

$$f(t) = (g \otimes h)(t)$$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{g}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega)$$

6.5 Beugung

Das Huygen'sche Prinzip

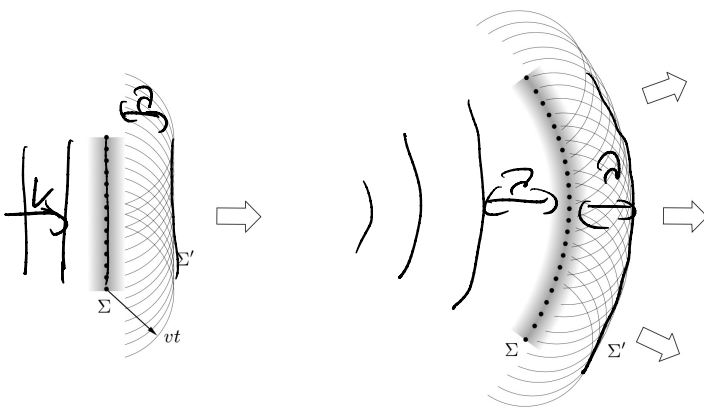
Faktor fällt weg, falls
Vorzeichen in Fourier-
transformation zu
1 gewählt.

Wenn wir die Ausbreitung dieser Wellen untersuchen, müssen wir noch berücksichtigen, dass jedes Teilchen der Materie, in der sich die Welle fortpflanzt, seine Bewegung nicht nur dem nächsten Nachbarn in Ausbreitungsrichtung des Strahls mitteilt, sondern auch allen anderen Nachbarn, die es berührt und die seiner Bewegung Widerstand leisten. So entsteht um jedes Teilchen eine Welle, deren Mittelpunkt das betreffende Teilchen ist. (Christiaan Huygens, 1690, *Traité de la Lumière* [Abhandlung über das Licht])

Hedst



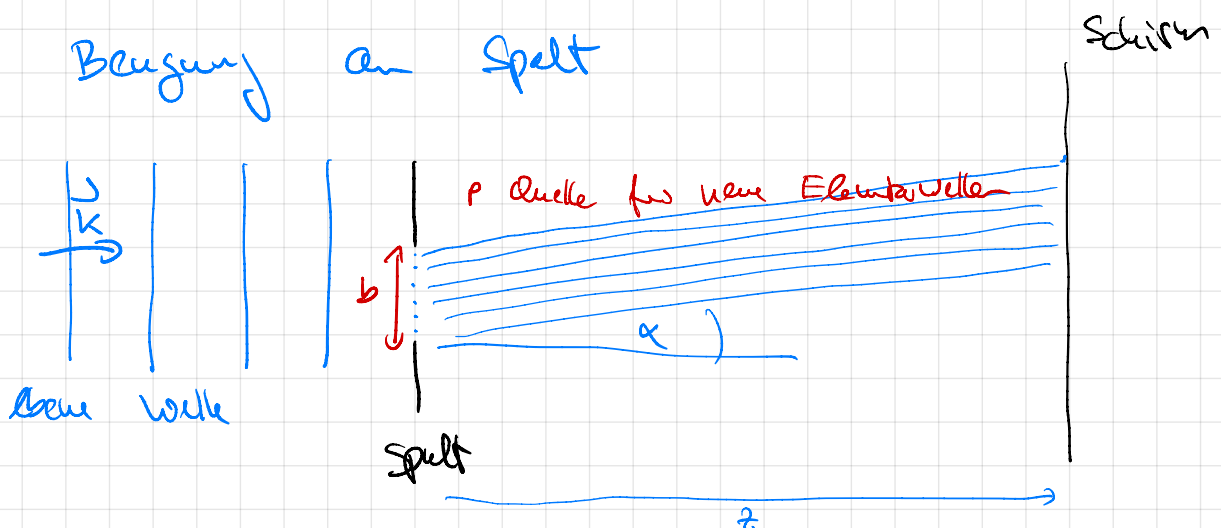
Christiaan Huygens
1629-1695



Hedst

Ein jeder Punkt einer Wellenfront ($\varphi = \text{const}$)
ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kugelwelle)
die sich alle überlagern und zur Konstruktion
der nächsten Wellenfront bilden.

Beugung am Spalt

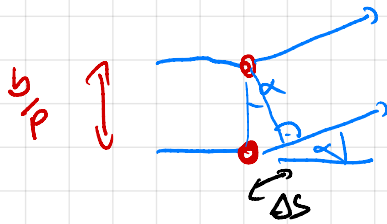


Lichtquelle und Schirm haben großen Abstand von Spalt.

⇒ plane Wellen treffen auf den Spalt
Am Schirm erleben die Wellen (fast) Gen.

Wir betrachten die Beugung in Fernfeld als Funktion von α .

Fraunhoferbeugung

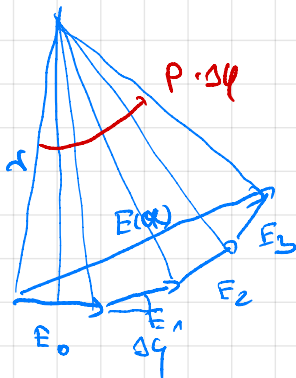


$$\Delta S = \frac{b}{p} \sin \alpha$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{p} \sin \alpha$$

Phasendifferenz benachbarter Elementarwellen

$$E(\alpha) = E e^{i\omega t} (e^0 + e^{i\Delta\varphi} + e^{2i\Delta\varphi} + e^{3i\Delta\varphi} + \dots + e^{i(p-1)\Delta\varphi})$$



$$E(\alpha) = 2 N \sin \left(\frac{p \cdot \Delta\varphi}{2} \right)$$

$$= 2 \frac{E_0}{\Delta\varphi} \sin \left(\frac{p \cdot \Delta\varphi}{2} \right)$$

$$\Delta\varphi \approx \frac{E_0}{r}$$

$$E(\alpha) = E_0 \frac{\sin \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha}$$

$$p E_0 = E_0$$

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

$$(\sin x)^2$$

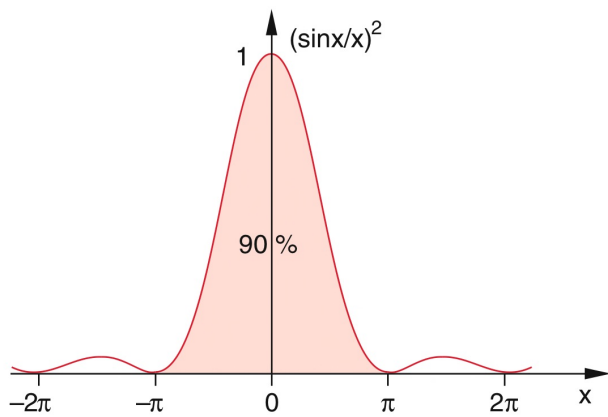


Abbildung 10.36 Die Funktion $(\sin x/x)^2$

$$x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

Resultat

Die maximale Intensität geht gegen Null
wenn $x \rightarrow 0$ bzw. $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

$$\pi = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{b}$$

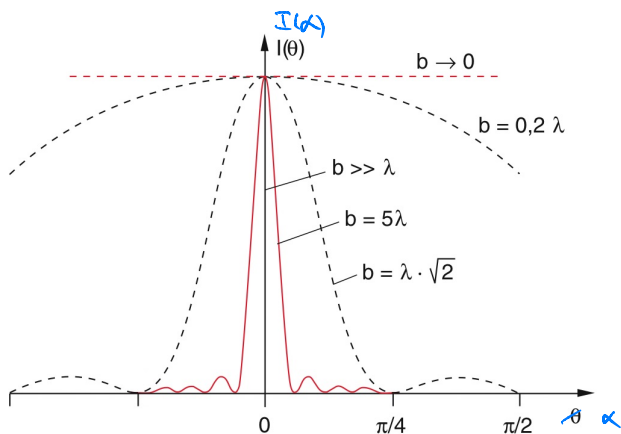
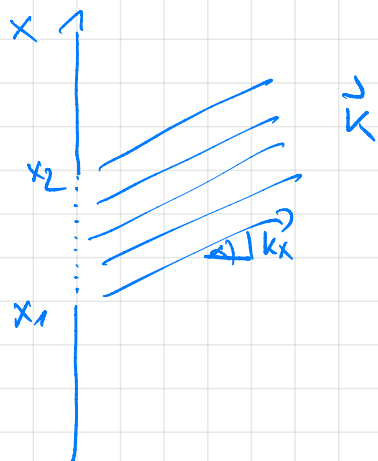


Abbildung 10.39 Intensitätsverteilung $I(\theta)$ bei der Beugung am Spalt für verschiedene Werte des Verhältnisses b/λ von Spaltbreite b zu Wellenlänge λ

Resultat

Für breite Spalte im Vergleich zur Wellenlänge geht
die Beugung asymptotisch in die geometrische Optik
über.



Im ersten Abstand verhalten sich die Kugelwellen wie ebenen Wellen

$$E \propto \int_{x_1}^{x_2} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dx$$

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ 1 & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dx \right|^2$$

Zur Licht Intensität

$$\frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{ik_x x} dx \right|^2$$

Fourier-Transformierte von T
 $\hat{T}(k_x)$

Die Intensität verhält sich wie das Betragsquadrat der Fouriertransformierten der Transmissionsfunktion.

$$k_x = |k| \sin \alpha$$

Fraunhoferbeugung

Lichtquelle und Schirm sind ∞ -weit entfernt
von Spalt. $\rightarrow$ ebene Wellen

Einfaacher Spalt mit Breite b

$$I(\alpha) = I_0 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

zur Erinnerung

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$E_x, E_y, E_z \in \mathbb{R}$$

$$\vec{E} = e^{i(kx - \omega t)} \vec{E}_0$$

$$S = (\operatorname{Re} \vec{E})^2$$

$$I = \langle S \rangle$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \sin(kx - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{1}{2} E_0^2$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$I = \frac{1}{2} |\vec{E}_0|^2$$

$$= \frac{1}{4} |\vec{E}(t)|^2$$

$\uparrow$
komplex

Die gemessene Schwingungszahl, d.h. Intensität nimmt
auf I_0 , d.h. die vereinfachte Schwingungszahl.

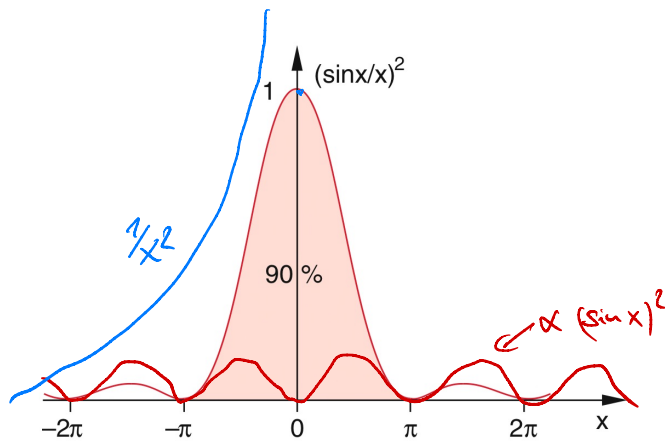


Abbildung 10.36 Die Funktion $(\sin x / x)^2$

$x=0$: gegeben

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \rightarrow 1$$

Minima der Intensität

bei $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \dots$

Positionen der Maxima sind nicht analytisch bestimmbar, liegen aber ungefähr bei $x \approx \pm \frac{3}{2}\pi, \pm \frac{5}{2}\pi \dots$

Erstes Minimum bei $x = \pi = \frac{\pi b}{a} \sin \alpha$

$$\Rightarrow a = b \sin \alpha$$

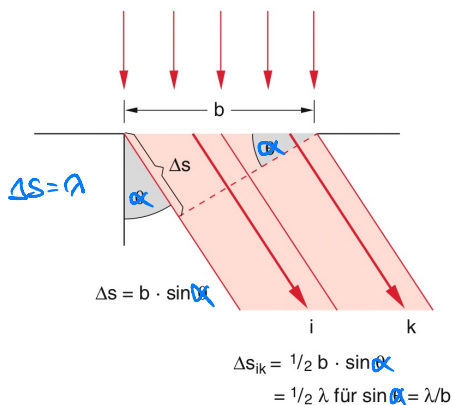
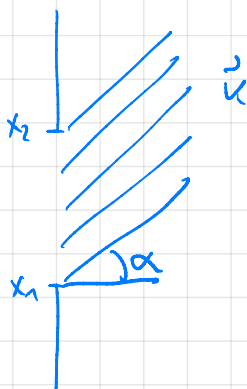


Abbildung 10.40 Zur anschaulichen Darstellung der Intensitätsminima für $\sin \theta = \lambda / b$

Destruktive Interferenz zwischen allen Paaren von Strahlen mit $\frac{1}{2}$ Unterschied in ihrer Position
 $\rightarrow$ totale Auslöschung.

Beitrag des



$$E \propto \int_{x_1}^{x_2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} dx$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{I}{I_0} = |\hat{T}(k)|^2$$

$$k_x = |k| \sin \alpha$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt$$

$$= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-a}^{t=a} = \frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}]$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega a) = 2a \operatorname{sinc}(\omega a)$$

$$\frac{I}{I_0} = b^2 |\hat{T}(|k| \sin \alpha)|^2$$

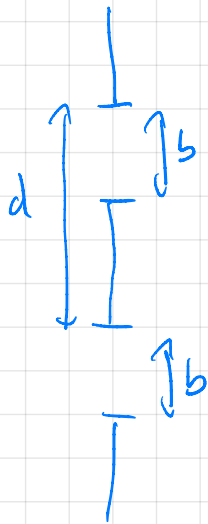
$$= b^2 \operatorname{sinc}^2(|k| \sin \alpha \frac{b}{2}) = b^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{b}{2} |k| \sin \alpha\right)}{\frac{b}{2} |k| \sin \alpha} \right)^2$$

$$= b^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{b\pi}{\lambda} \sin \alpha} \right)^2 = b^2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad x = \frac{b\pi}{\lambda} \sin \alpha$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow \frac{I}{I_0}(|k| \sin \alpha) = b^2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

Doppelspalt



$$T = \begin{array}{c} b \\ \text{---} \\ b \end{array} \otimes \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \uparrow \end{array}$$

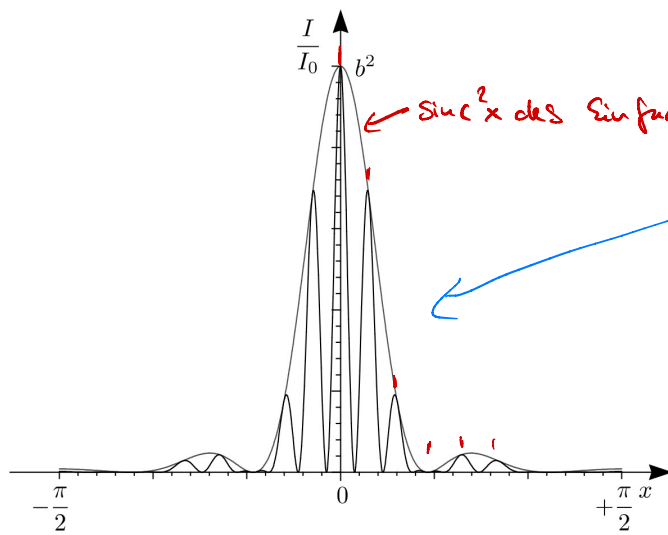
$$\tilde{T} = \begin{array}{c} \sim \\ \text{---} \\ \sim \end{array} \cdot \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \uparrow \end{array}$$

$$\cos \omega_0 t = c \left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right)$$

$$\begin{array}{c} \sim \\ \text{---} \\ \sim \end{array} \xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \uparrow \end{array}$$

$\omega_0 \quad \omega_0$

$$|\tilde{T}|^2 = \text{sinc}^2 \left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \alpha \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{d\pi}{\lambda} \sin \alpha \right)$$



$$d = 3b$$

$$\text{sinc}^2 x \cdot \cos^2 3x$$

wegen

Für N Spalte

$$\frac{I(x)}{I_0} = \underbrace{\text{sinc}^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)}_{\text{Einzelspalt}} \cdot \underbrace{\text{sinc}^2 \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \alpha}_{\text{Sinc-Funktion in d}}$$

Faktorisiert

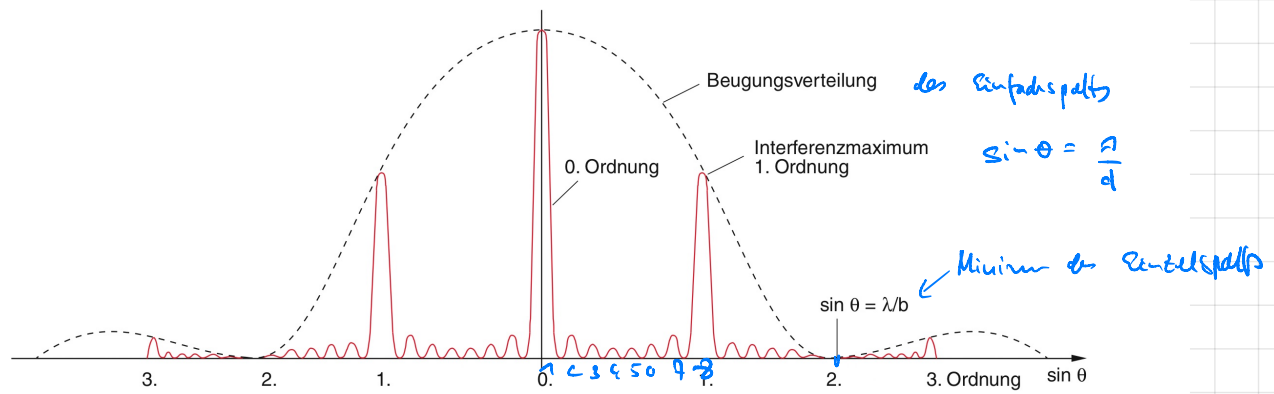


Abbildung 10.44 Intensitätsverteilung $I(\theta)$ bei einem Beugungsgitter mit acht Spalten, bei dem $d/b = 2$ ist. In die zweite Interferenzordnung gelangt wegen des Beugungsminimums kein Licht

Deutlich

8-fach Spalt

$N \rightarrow \infty \Rightarrow$ scharfe Maxima bei $\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$

$$T_{\text{Gitter}} = \sum_n \delta(x - nd) \quad \text{Gitter}$$

$$\hat{T} = \hat{T}_{\text{Einzelspalt}} \cdot \hat{T}_{\text{Gitter}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n \delta(x - nd) e^{ikx} dx \propto \sum_n \delta(k - nk_0)$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{d}$$

Gitter



$$\sin \alpha \cdot d = n \cdot \lambda$$

$\Rightarrow$ konstruktive Interferenz der Wellen
des einzelnen Spalts

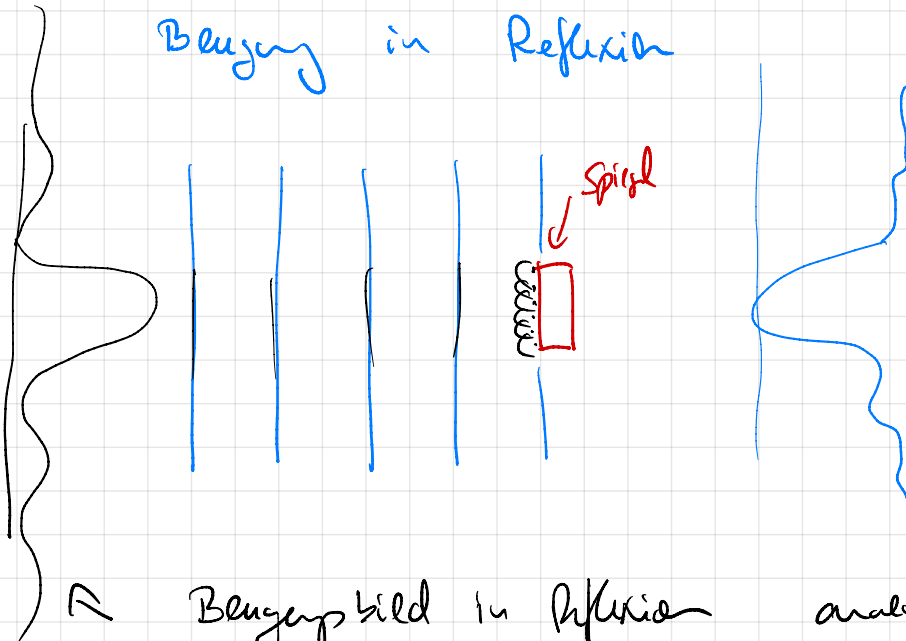
$$\sin \alpha = \frac{n \cdot \lambda}{d}$$

Punktmuster

Mit kleiner d kann wir recht genau λ bestimmen.

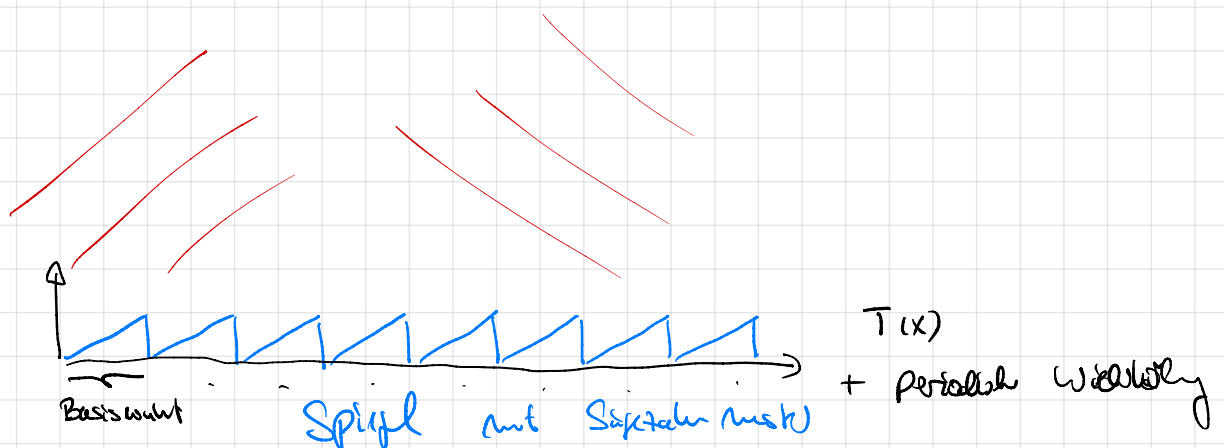
⇒ Spektrometer zur Bestimmung der Wellenlänge.

Beugung in Reflexion



↖ Beugungsbild in Reflexion analog zur Transmission.

Beugungsgitter in Reflexion

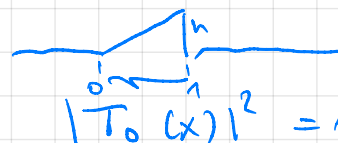


$$T(x) = T_0(x) \otimes G(x)$$

$G(x)$ ist eine

Reihe von δ -Funktionen

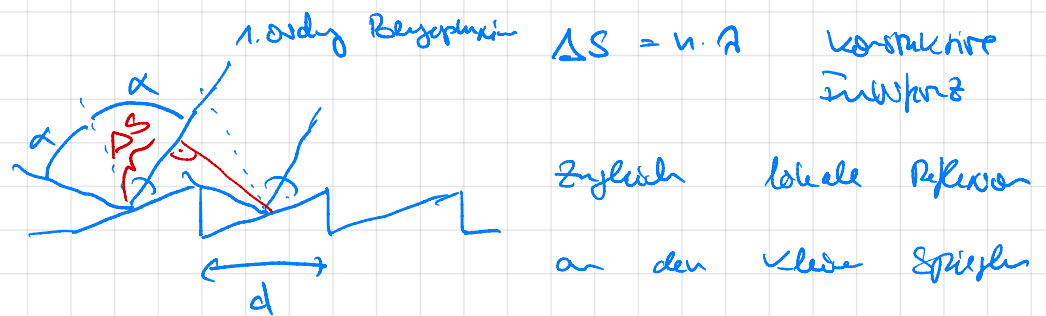
$$\rightarrow \tilde{T}(|k| \sin \alpha) = \tilde{T}_0(|k| \sin \alpha) - \underbrace{\tilde{G}(|k| \sin \alpha)}_{\text{analog zum Filter}}$$



$$|T_0(x)|^2 = 1, \text{ voll ständige Reflexion}$$

$$T_0(x) = \begin{cases} e^{ix \cdot h/2} & x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Optimale Bedingung für den Betrieb des
„geplanten“ Gitters



$$n=1$$

1. ordg Beugsmax mit frontaler Reflexion überbestimmt.

Kurze Beweise:

$$\frac{I}{I_0} = |\tilde{T}(|k| \sin \alpha)|^2$$

hat allgemeine Gültigkeit.

Inklusion: T kann beliebig zwischen -1 und 1 liegen und komplex sein

$$|T(x)|^2 \leq 1$$

Wann immer gilt die Fourier auch für zweidimensionale Funktionen.

$$T(x, y)$$

$$\tilde{T}(k_x, k_y) = \int T(x, y) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Spezialfall : Lochblende

trifft auch auf bei Abbildungen mit Linsen

$$T(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

lange Rechnung

$$\frac{I(\alpha)}{I_0} = \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad x = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \alpha$$

D: Durchmesser

J_1 : Besselfunktion 1. Ordng

1. Nullstelle $\sin \alpha_1 = 1.22 \lambda / D$

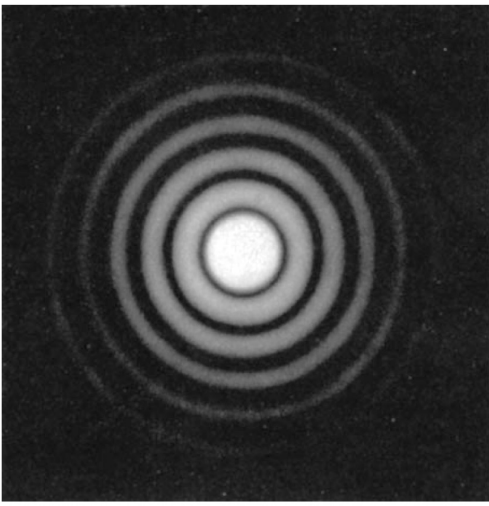


Abbildung 10.41 Ringförmige Beugungsstruktur hinter einer Kreisblende, die mit parallelem Licht beleuchtet wird. Aus M. Cagnet, M. Francon, J. C. Thieerr: *Atlas optischer Erscheinungen* (Springer, Berlin, Göttingen 1962)

Deutscher

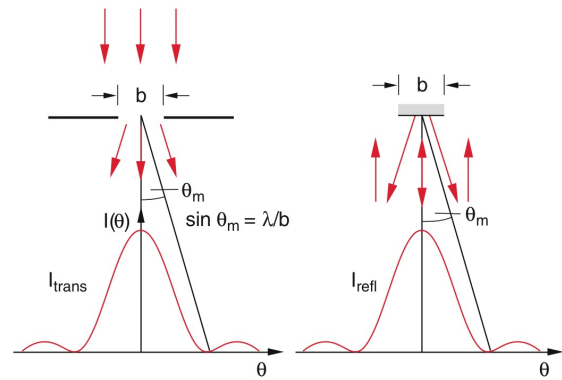


Abbildung 10.42 Äquivalenz der Beugung des durch eine Blende transmittierten Lichtes und des an einem Spiegel gleicher Breite b reflektierten Lichtes

Deutscher

$$T(x) \xrightarrow{F} \hat{T}(k_x)$$

$$k_x = |k| \sin \alpha$$

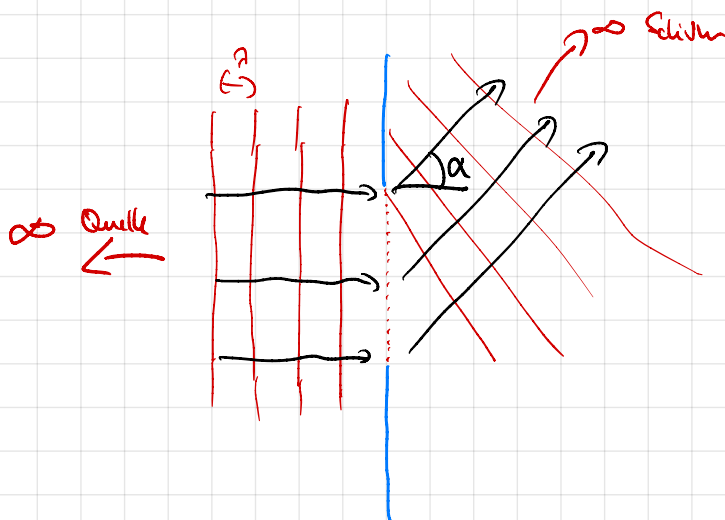
$$= \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\frac{I}{I_0} = |\hat{T}(k_x)|^2$$

$$T(x) = f(x) \otimes g(x)$$

$$|\hat{T}(k_x)|^2 = |\hat{f}(k_x)|^2 \cdot |\hat{g}(k_x)|^2$$

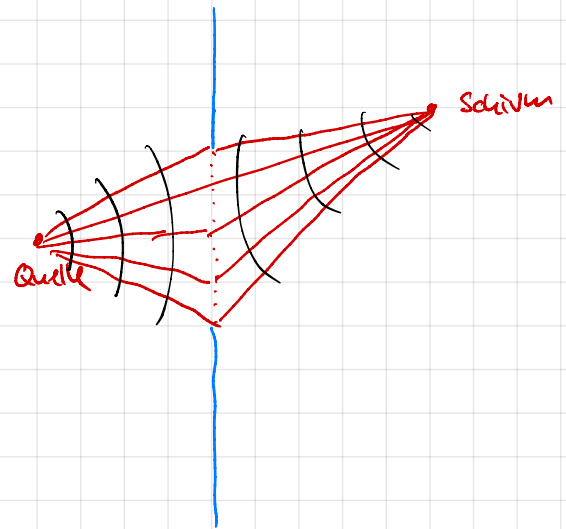
Fraunhofer beugung



Ebene Wellen

→ feste Winkel

Fresnelbeugung



Kugelwellen

→ variable Winkel

Wegunterschied ΔS für
die Strahlen

Gedankenexperiment

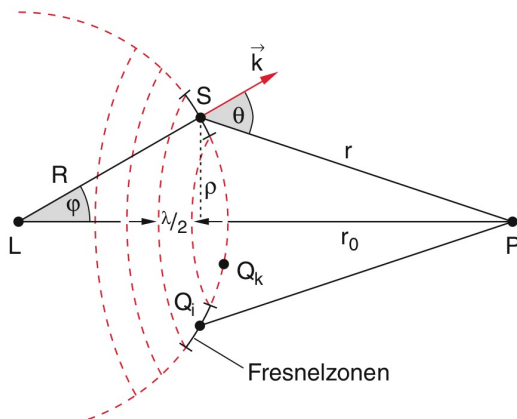


Abbildung 10.48 Zur Konstruktion der Fresnelzonen. Die Figur ist rotationssymmetrisch um die Gerade $\overline{LP}$

Denkbild

vor einer Kugel mit Radius R in L und

ebene Wellen, die auf der Kugelfläche abgestrahlt werden.

(Fresnel)

Qualitative Beschreibung

der Wellen als

Kugelwellen

Zu einer betrachten wir

die direkte Ausbreitung

von $L \rightarrow P$,

zu anderen die

Ausbreitung ausgehend

Der Abstand von P zu der Kugeloberfläche in L ist nicht konstant, d.h. die Phasen der Elementwellen, die sich in P vereinigen variieren.

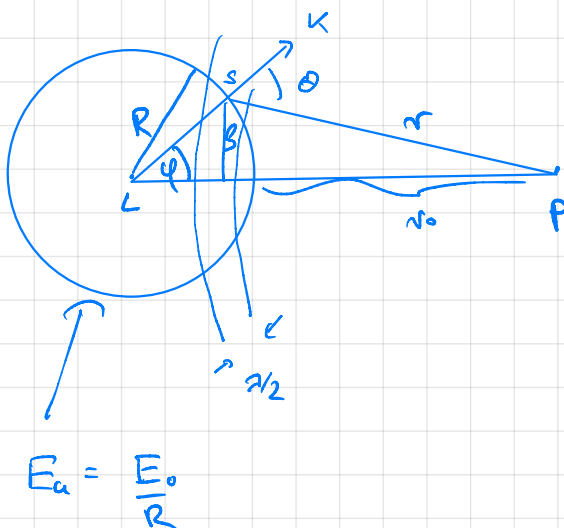
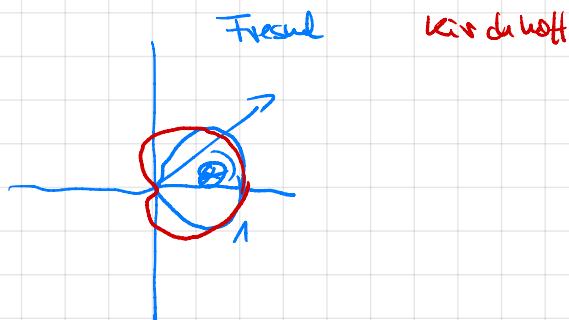
Wen unterhalb der Kugeloberfläche in Fresnelzone, die jeweils in eine Phasenintervall $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, ... liegen.

$$E(R) = \frac{E_0}{R} e^{i(\omega t - kR)} \quad \text{ausbreitend Kugelwelle} \\ \text{kur } L$$

Huygenssches Prinzip: jeder Punkt der Kugelwelle ist Ausgangspunkt einer neuen Kugelwelle

Fresnel : $E \sim \cos \Theta \quad \Theta < 90^\circ$, sonst 0

Kirchhoff : $E \sim (1 + \cos \Theta)/2$



Beitrag der unteren Fresnelzone

mit Fläche dS zur Feldstärke im Punkt P

$$dE_m = K_m E_a \frac{e^{-i(k(R+r) - \omega t)}}{r} dS$$

$$K = K(\Theta) \quad K_m \approx \text{const für}$$

untere Zone

ΔLSP Kosinussatz: $r^2 = R^2 + (R+r_0)^2 - 2R(R+r_0) \cos \varphi$

Differential: $2r dr = 2R(R+r_0) \sin \varphi d\varphi$

Fläche der unteren Zone: $dS_m = 2\pi R d\varphi$
 $= 2\pi (R \sin \varphi) R d\varphi = \frac{2\pi R}{R+r_0} r dr$

Integration: $E_m = K_m E_a \frac{2\pi R}{R+r_0} \int_{m-1}^{m} e^{i(k(R+r)-\omega t)} dr$
 $= - \left[\frac{2K_m E_a R}{i(R+r_0)} e^{-i(k(R+r)-\omega t)} \right]_{m-1}^{m}$

mit $N_m = N_0 + m \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$E_m = (-1)^{m+1} \frac{2K_m E_a R}{i(R+r_0)} e^{-i(k(R+r_0)-\omega t)}$

$E(P) = \sum_{m=1}^N E_m = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \dots - |E_N|$

Wenn wir annehmen, dass $K(\theta)$ nur langsam variiert.

$|E_m| \approx \frac{1}{2} (|E_{m-1}| + |E_{m+1}|)$

$E(P) = \frac{1}{2} |E_1| + \left(\frac{1}{2} |E_1| + |E_2| + \frac{1}{2} |E_3| \right) + \left(\frac{1}{2} |E_3| - |E_4| + \frac{1}{2} |E_5| \right) + \dots$
 $+ \frac{1}{2} |E_N|$

$\Rightarrow E(P) \approx \frac{1}{2} (|E_1| + |E_N|)$

$E_n \rightarrow 0$ Weyl Winkel abhängig mit der Abstrahlung

$$E(P) \approx \frac{1}{2} E_1 = \frac{2k_1 E_0 R}{i(R+r_0)} e^{-i(k(R+r_0) - \omega t)}$$

$$E(P) = \frac{E_0}{R+r_0} e^{-i(k(R+r_0) - \omega t)}$$

Vergleich der
direkten Kugelwelle

$$\Rightarrow k_1 = \frac{i}{R}, \quad k_m = \frac{i}{R} \cos \theta$$

S_m Radius einer Fresnelzone, hängt ab von N_0 und λ

$$S_m = \sqrt{R^2 - r_0^2} = \sqrt{(N_0 + \ln \frac{R}{\lambda})^2 - \lambda^2} \approx \sqrt{N_0 \cdot \ln \cdot \lambda} \quad N_0 \gg 2$$

Zahlenbeispiel $N_0 = 10 \text{ cm}$ $\lambda = 500 \text{ nm}$ $S_1 = 0.72 \text{ mm}$

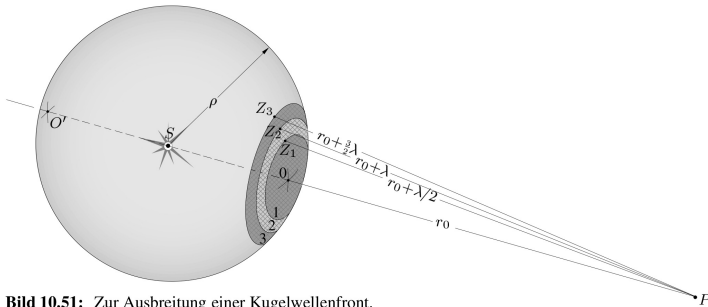
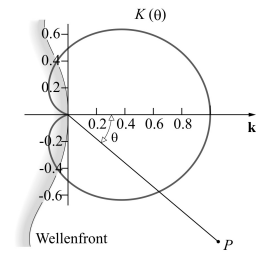


Bild 10.51: Zur Ausbreitung einer Kugelwellenfront.



Hilf

Hilf

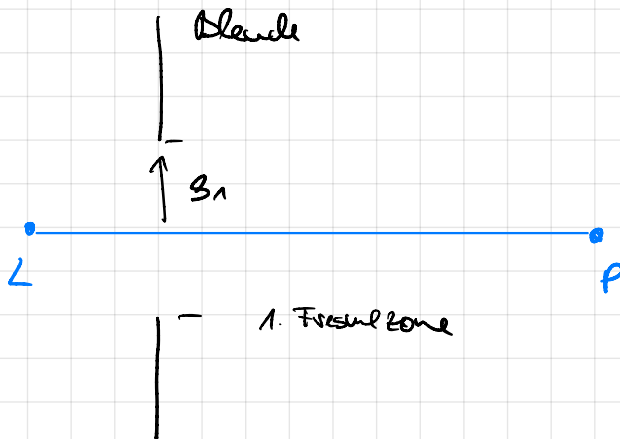
$$E(P) = \sum_n E_n$$

$$E_n \approx (-1)^{n+1} \frac{2 \pi K_n E_0 R}{i(R+r_0)} e^{-i(k(R+r_0) - \omega t)}$$

$$K_n = \frac{i}{2} \cos \theta_n$$

$$\Rightarrow E_n = (-1)^{n+1} \frac{2 (\cos \theta_n) E_0}{R+r_0} e^{-i(k(R+r_0) - \omega t)}$$

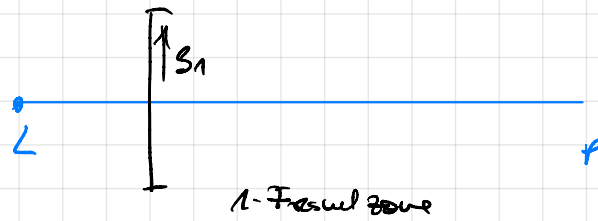
$$S_n = \sqrt{n \cdot n_0 \cdot A}$$



$$E(P) = E_1 = 2 E_0 \frac{1}{R+r_0} e^{-i(k(R+r_0) - \omega t)}$$

Das E-Feld am Punkt P ist doppelt so groß
mit Blende als ohne!
 $\Rightarrow$ Intensität 4-fach!

⇒ Das Licht wird fokussiert?



$$E = \sum_{m=2} E_m = E_0$$

Es tritt praktisch keine Abschwächung des Lichts auf.

Die geometrische Optik versagt in beiden Fällen komplett.

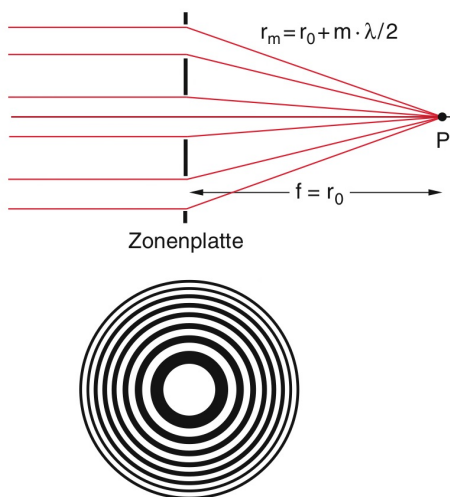


Abbildung 10.52 Fresnel'sche Zonenplatte

Bauen eine Linse durch abwechselnd transparente und intransparente Fresnelzone

$$f = \frac{s_m^2}{m \cdot \lambda} = \frac{s_1^2}{\lambda}$$

Brennwerte

→ starke chromatische Aberration!

Denkfeld

Kann verwendet werden, wenn man kein fokussierendes, d.h. transparentes Medium mit $n > 1$ hat.

⇒ Linsen im Röntgenbereich

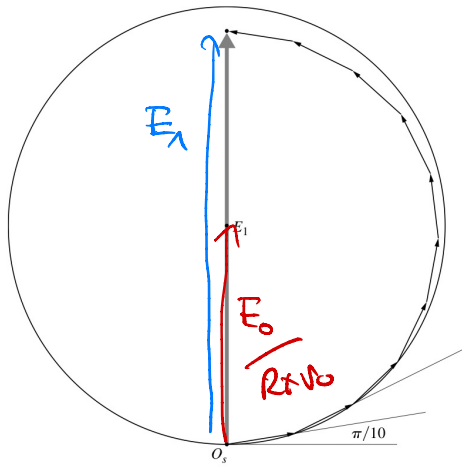


Bild 10.53: Addition der Phasenvektoren (Zeiger).

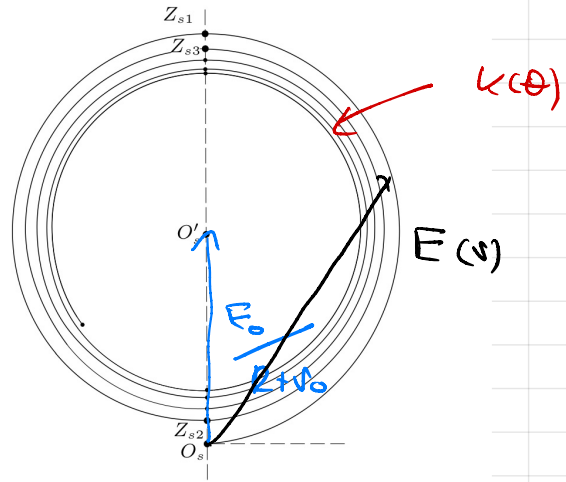
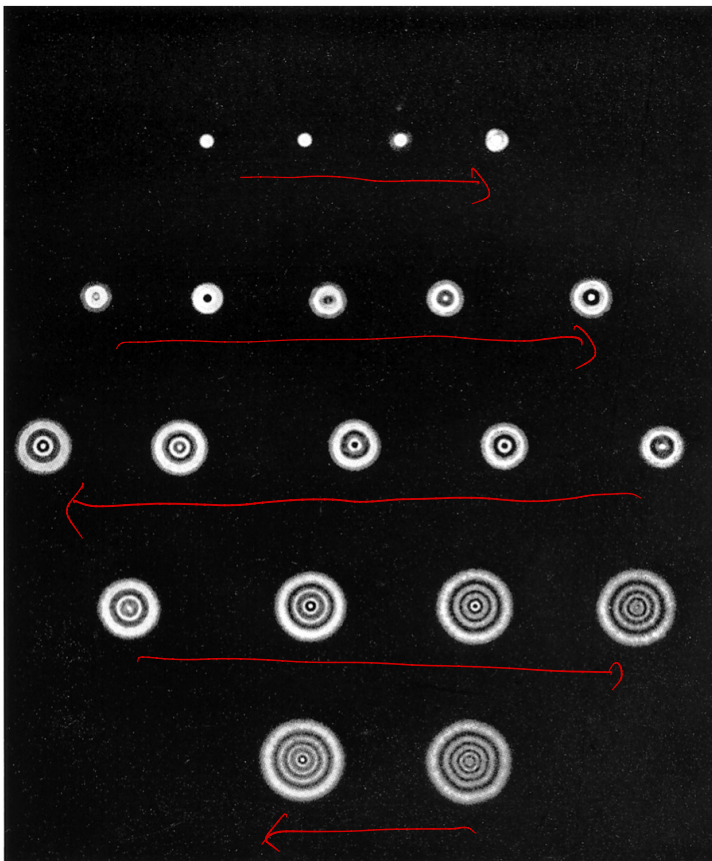
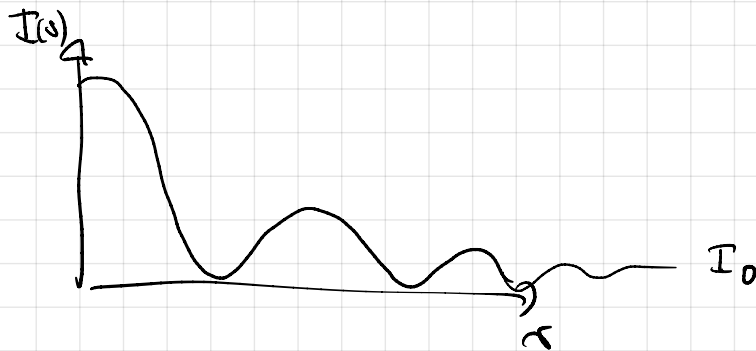


Bild 10.54: Überlagerte Punktabbildungen.

Hedist

$E(r)$ r : variables Loch



Hedist

Verteilung der Intensität
als Funktion des
Lochradius r

Das Beugungsintegral

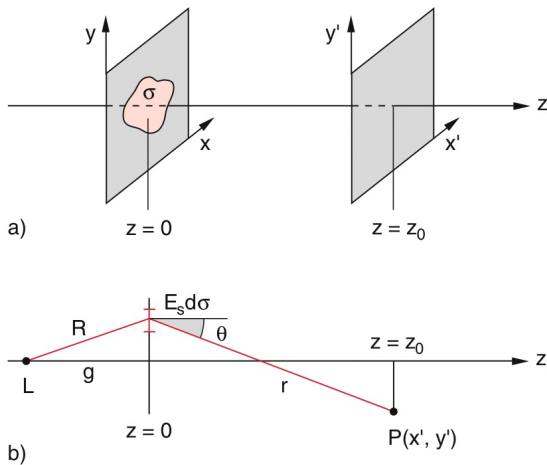


Abbildung 10.53 Zur Herleitung des Fresnel-Kirchhoff'schen Beugungsintegrals

Platz

$$E_0(x, y) = \frac{A}{\sqrt{g^2 + x^2 + y^2}}$$

$$e^{-i(\omega t - kR)}$$

$$R^2 = g^2 + x^2 + y^2$$

$$dE_p = C \cdot \frac{E_0 \cdot d\sigma}{r} e^{-ikr}$$

$$C = \frac{i}{2} \cdot \begin{cases} \cos \theta & \text{Fresnel} \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) & \end{cases}$$

$$r = \sqrt{z_0^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}$$

→ numerische Integration liefert

$$E_p = \int C \cdot E_0 \frac{e^{-ikr}}{r} dx dy$$

Fresnel-Kirchhoff
Beugung

$$E_p(x', y')$$

Taylor

$$r \approx z_0 \left(1 + \frac{(x-x')^2}{2z_0^2} + \frac{(y-y')^2}{2z_0^2} + \dots \right)$$

Bei Näherung bis quadratische Terme

$$E_s = E_0(x, y) e^{i\varphi(x, y)}$$

so das E -Feld bei $z=0$
an der Maske (Schirm).

Von hier aus entwickeln
wir die neuen Elementarwellen

Quelle z.B. Punktstrahlung

mit Abstand g von

Maske / Schirm.

$$\cos \theta \approx \frac{z_0}{r_0} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{i}{2}$$

$$\Rightarrow E(x', y', z_0) = i \frac{e^{-ikz_0}}{2z_0} \iint E_S(x, y) e^{\frac{-ik}{2z_0} ((x-x')^2 + (y-y')^2)} dx dy$$

Beugungsintegral in Fresnell als Näherung

Für den Fall, dass $z_0 \gg \frac{1}{\lambda} (x^2 + y^2)$

$$\approx z_0 \left(1 - \frac{xx'}{2z_0^2} - \frac{yy'}{2z_0^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow E(x', y', z_0) = A(x', y', z_0) \int E_S(x, y) \cdot e^{\frac{ik}{2z_0} (x'x + y'y)} dx dy$$

$$\text{mit } A(x', y', z_0) = \frac{ie^{ikz_0}}{2z_0} \cdot e^{-i\pi/2 (x'^2 + y'^2)}$$

Fraunhofer Beugung

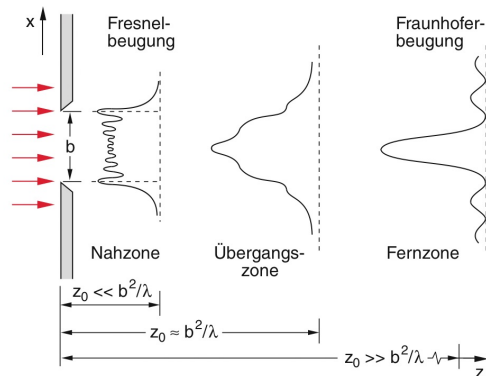
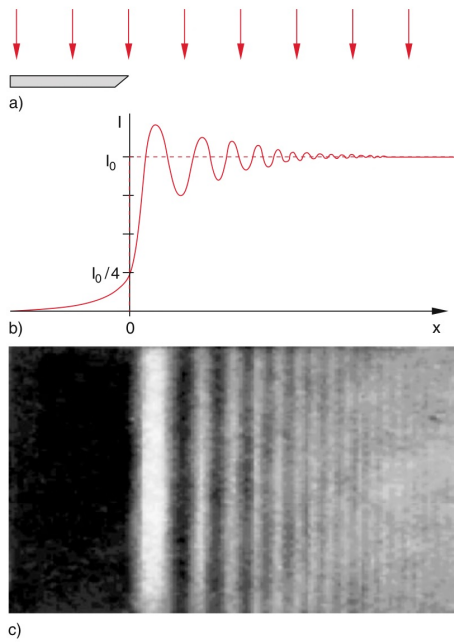


Abbildung 10.54 Fresnel- und Fraunhoferbeugung an einem Spalt. Gezeigt sind von links nach rechts die Intensitätsverteilungen in der Nahzone, in einer mittleren Entfernung und in sehr großer Entfernung, wo man die bekannte Fraunhoferbeugung erhält

Demtröder

Experiment: Beugung an einer Kante



Denkmal

Allgemeine Eigenschaften der Beugung

Die Beugungsfeldstärke lässt sich immer als Integral schreiben, d.h. Beugung ist eine lineare Abbildung.

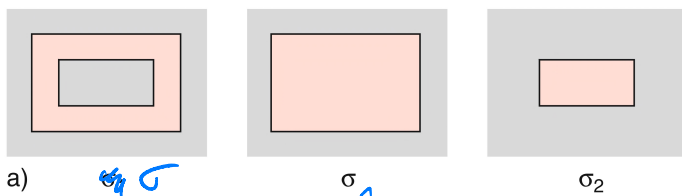
⇒ Babuettan Theorem

$$E_p(r) = E_p(r_1) + E_p(r_2)$$

$$r = r_1 + r_2$$

$$E_p(r) = \sum_{i=1}^N E_p(r_i)$$

$$r = \sum r_i$$



$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

Denkmal

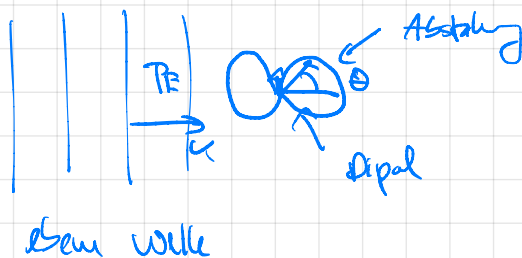
Dies illustriert die Beding von selbst rotet Kopieren
 Maske und ihres Kaugungsbilder.

$$f = g + u \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g) + \mathcal{F}(u)$$

$$f = g \otimes u \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g) \cdot \mathcal{F}(u)$$

$\rightarrow$ Experiment Fraunhofer Beugung eines
 komplexen Objekts.

6.7 Streuung



Dipol wird von Schwingen angeregt und strahlt
 dann gemäß der Dipolantenne gleich ab.

$$\overline{P_s} = \frac{2 \times 10^3 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \cos^2 \Theta$$

Beispiel: Streuung an Gasmolekülen

Position der Moleküle räumlich
 und variabel.

$\Rightarrow$ inkohärente Streuung, d.h. keine feste
 Phasenbeziehung zwischen den einzelnen

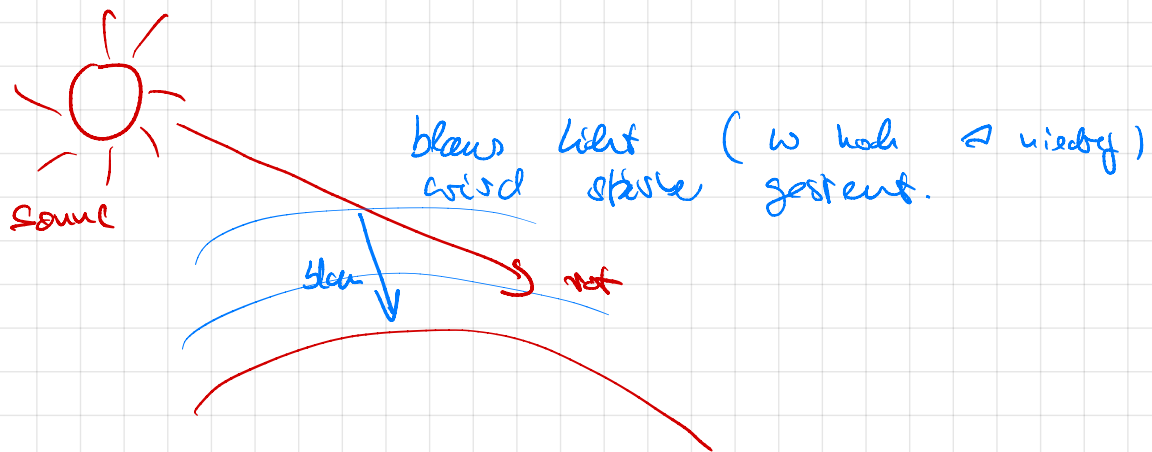
Oszillator.

Dieser Scanner misst die Intensität der einzelnen Streuer.

Rayleigh Streuung

$$I_s = \frac{e^4}{64\pi \epsilon_0^2 c^4 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^4 \gamma^2}$$

Anfänglich die Resonanz ω_0 wo es stark wird eine charakteristische Streuung, die mit ω^4 d.h. mit $\frac{1}{\lambda^4}$ fällt.



⇒ Der Himmel erscheint blau durch das Streulicht an den Gas molekülen.
Die untergehende Sonne wirkt rot aufgrund der herausgestreuten blauen Anteile.

→ Experiment

Für kohärente Streuung muss evtl Interferenz-
effekte berücksichtigen.

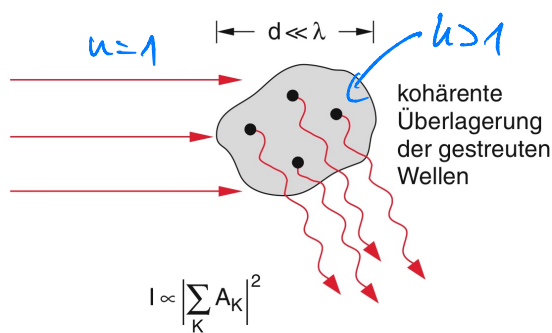
Mie-Streuung: Streuung an festen Teilchen

Feste Phase beziehung $\rightarrow$ Felder addieren

Streuintensität folgt mit d^6 , d : Durchmesser

$$d \ll \lambda$$

$\rightarrow$ Experiment



Hier müssen die einzelnen
Wellen wegen der festen
Phasenbeziehung kohärent
überlagert werden.

Abbildung 10.65 Streuung von Licht an Mikropartikeln mit Durchmesser $d \ll \lambda$ (Mie-Streuung)

Beim $d \ll \lambda$

$\rightarrow$ Vorwärtsschichtung der Wellen
Interferenz $\rightarrow$ starke Streuung

$\rightarrow$ Rückwärtsschichtung der Wellen
Interferenz $\rightarrow$ schwache Streuung