Energiedichte und Energiefluss des elektromagnetischen Feldes

Energiedichte $w = \frac{1}{2}(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H})$ $\frac{J}{m^3}$ in SI

Zeitliche Änderung der Energiedichte

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}(\dot{\vec{D}}\vec{E} + \vec{D}\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{B}}\vec{H} + \vec{B}\dot{\vec{H}})$$

im Vakuum

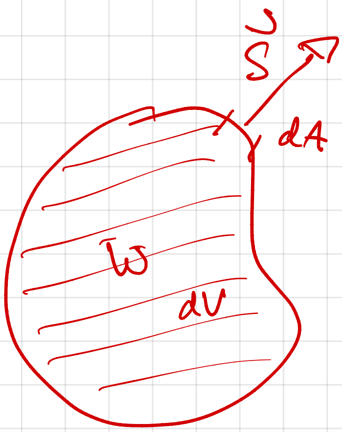
$$= \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} + \mu_0 \vec{H}\dot{\vec{H}}$$

$$= \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = -\vec{a}(\vec{\nabla}\times\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a})$$

$$= -\vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{\nabla}\vec{S}$$

$\vec{S}$ Poynting Vektor




$$-\frac{\partial}{\partial t}W = -\frac{\partial}{\partial t}\int w\, dV$$

$$= \int \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\, dV$$

$$= \oint \vec{S}\, d\vec{A}$$

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E}\times\vec{B}$ $\qquad |\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|$

$|\vec{S}| = c\varepsilon_0 E^2 = c\,w$ $\qquad \vec{S} \parallel \vec{k}$ $\qquad$ (im Vakuum)

$S$ : Energie, die pro Zeit und Fläche entlang $\vec{k}$ transportiert wird.

Linear polarisiertes Licht

$$I = \langle S(t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$ Intensität

$S(t)$ oszillierend

Zirkular polarisiertes Licht

$$I = \langle S(t) \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2$$ $S(t)$ zeitlich sogar konstant

## Lichtgeschwindigkeit und Dispersionsrelation

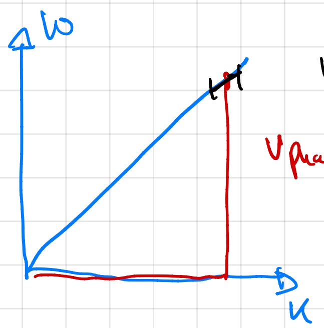
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

Einsetzen in die Wellengleichung $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

$$\Rightarrow \quad -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = c \cdot k}$$ lineare Dispersionsrelation im Vakuum

$$v_{phase} = \frac{\omega}{k} \qquad v_{gruppe} = \frac{d\omega}{\partial k}$$




$$v_{gruppe} = \frac{d\omega}{\partial k} = c$$

$$v_{phase} = \frac{\omega}{k} = c$$

Gleiche Phase

$$\omega t - kr = const$$

## 2. Lichtausbreitung in Medien

Das Medium sei isotrop.

### 2.1 Die Wellengleichung im Medium

Annahme: polarisierbares Medium

Isolator: $\vec{j} = 0$

ungeladen: $\rho = 0$

unmagnetisch: $\mu = 1$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

D: elektrische Verschiebungsdichte

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{P}$: dielektrische Polarisation

Bezug ist korrekt vor Allem für kleinen $\vec{E}$-Felder.

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon(\omega)}$$

Wellengleichung im Medium $\quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$

Anschauliche Betrachtung:

- das $\vec{E}$-Feld der Welle dringt in das Medium ein
- Elektronen (und auch Kerne) werden auf das $\vec{E}$-Feld reagieren
- die geladenen Teilchen werden zu Schwingungen angeregt
- die schwingenden Teilchen strahlen also verzögert elektromagnetische Wellen ab
- es wird eine Phasendifferenz zwischen anregender und erzeugter Schwingung geben

$\Rightarrow$ Die Welle wird mit einer abweichenden (von c) Geschwindigkeit propagieren

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Einsetzen der ebenen Welle ergibt

$$k^2 - \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0$$

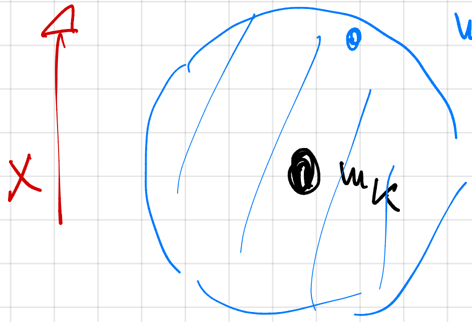
Dispersionsrelation $\quad \omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} k = \frac{c}{n} k = v k$

$n$: Brechungsindex $\quad n = \sqrt{\varepsilon}$

$v$: Lichtgeschwindigkeit im Medium

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) \Rightarrow n = n(\omega), \quad v = v(\omega)$$

## 2.2 Der Lorentz-Oszillator




$\vec{E} \parallel \vec{x}$

$\vec{F}_{el} = -e\vec{E}$

$\vec{F}_{Hooke} = -kx$

lineare Näherung für kleine E-Felder

Es entsteht ein Dipolmoment $p = -ex$

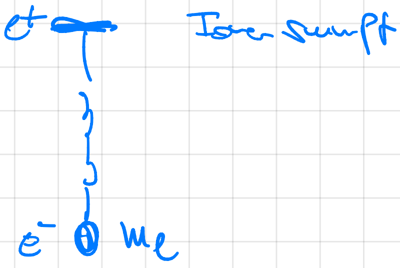
bzw. eine Polarisation $P = -exN$

Bei oszillierendem $\vec{E}$-Feld

→ getriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_K} + \frac{1}{m_e} \qquad m_K \gg m_e$$

$$m_r \approx m_e$$




Ausbreitungsrichtung in z-Richtung

Was passiert bei z=0 ?

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -eE_0\, e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{-e}{m} E_0\, e^{i\omega t}$$

$$\gamma = \frac{b}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = x_0\, e^{i\omega t}$$

$x_0$: Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$x_0 = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

Polarisierbarkeit $\quad \alpha(\omega) = \frac{P}{E}$

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\vec{P} = N\alpha(\omega)\vec{E} = \frac{N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\vec{E}$$

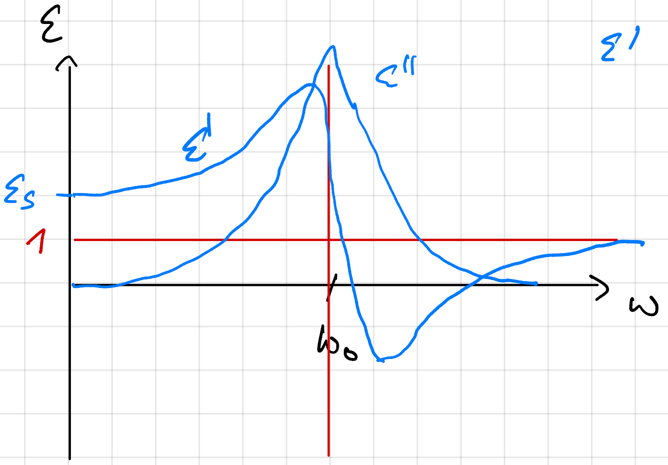
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{N e^2/m\varepsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

Zu bedenken:

- Nachbaratome müssen berücksichtigt werden (Lokalfeldkorrektur)
- verschiedene Resonanzen treten auf
- Resonanzfrequenzen der Rümpfe für ionische Systeme oder Medien mit Partialladungen

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\left( \underbrace{\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}_{\text{reell } \varepsilon'} + \underbrace{\frac{i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}_{\text{imaginär } \varepsilon''} \right)$$




$\varepsilon_s$: statische Dielektrizitätskonstante

$\omega \gg \omega_0$

$\varepsilon \to 1$

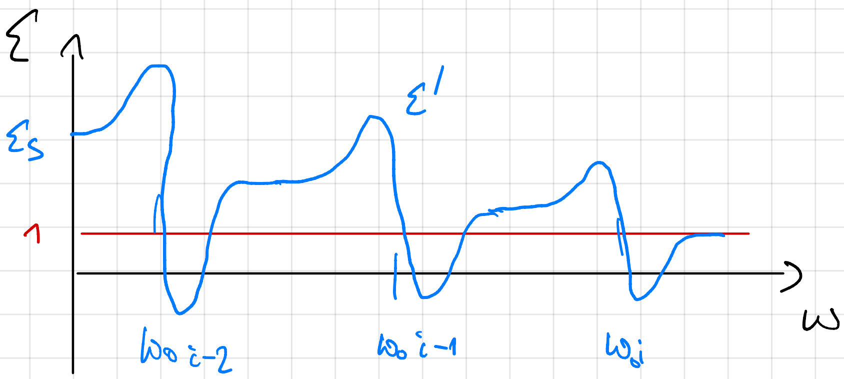
Realteil : Dispersion

Imaginärteil : Absorption

Im allgemeinen gibt es mehrere Resonanzen

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2}{m\varepsilon_0} \sum_i \frac{N_i f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + i\gamma_i\omega}$$

f: Oszillatorstärke



## 2.3 Absorption und Dispersion

Ebene Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

Einsetzen liefert: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{n}^2(\omega)$

$\tilde{n}$ : komplexer Brechungsindex

$\Rightarrow \quad k = k_0 \tilde{n}(\omega) = \frac{\omega}{c}(n - i\kappa)$

$k_0$ : Wellenzahl im Vakuum

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\tilde{n}(\omega) \vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)}$$
$$= \vec{E}_0 \, \underbrace{e^{i(n(\omega) \vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)}} \; \underbrace{e^{-\kappa(\omega) \vec{k}_0 \vec{r}}}_{\text{exp. Abfall}}$$

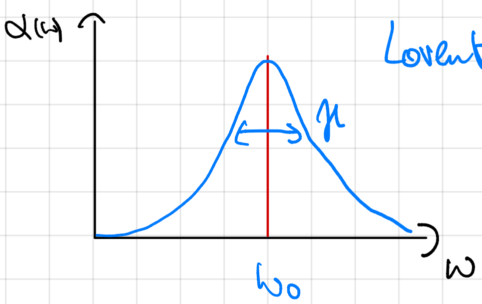
$$\boxed{v_{phase} = \frac{\omega}{k_0} \frac{1}{n(\omega)} = \frac{c}{n(\omega)}}$$

Ist $n(\omega) > 1$ ist die Phasengeschwindigkeit der Welle reduziert um $\frac{1}{n(\omega)}$.

$I \propto |\vec{E}|^2$ $\qquad \boxed{I = I_0 \, e^{-\alpha z}}$ Lambert-Beersche Absorptionsgesetz

$\alpha$: Absorptionskoeffizienten

$$\alpha = 2 k_0 \kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa$$



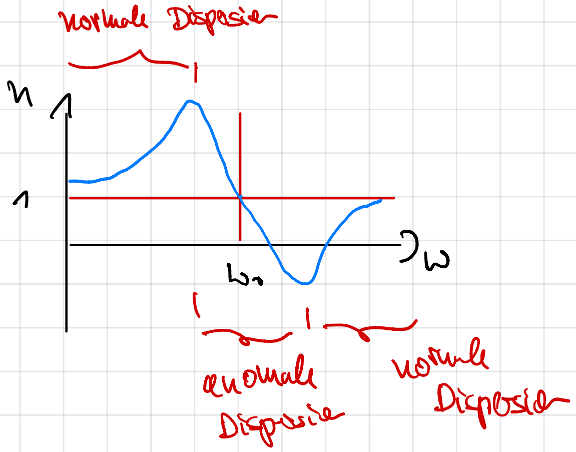

Lorentz Kurve

$\omega \to 0 \quad \alpha(\omega) \to 0$

$\omega \to \infty \quad \alpha(\omega) \to 0$

$\varepsilon''(\omega) = 2n\kappa \quad \alpha(\omega) = 2k_0\kappa$

$\varepsilon'(\omega) = (n^2 - \kappa^2)$ $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$




$\omega \to 0$ $n > 1$

normale Dispersion: n wächst monoton mit ω

anomale Dispersion: n nimmt monoton mit ω ab

Folge: oberhalb von $\omega_0$ wird $n < 1$, d.h. die Phasengeschwindigkeit im Medium ist größer als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.