

$I_T$  ist maximal für

$$\Delta\varphi = 2\pi m \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta = \Delta S/m = \frac{2d}{m} \sqrt{m^2 - \sin^2 \alpha}$$

Halbwertsbreite  $\epsilon$

Definition

$$\epsilon = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 \quad \text{mit } I_T(\Delta\varphi_{1,2}) = \frac{I_0}{2}$$

Aus der Airy Formel für festes  $F$ :

$$\epsilon = 4 \arcsin \sqrt{\frac{1}{F}} \approx \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

Wird  $R$  groß ( $R > 1$ )  $\Rightarrow \epsilon$  wird klein

$\Rightarrow$  Bei senkrechtem Einfall nur Transmission für  $F_m = 2nd/m$  ober mit kleiner Breite.

$$\left| \frac{\Delta\Delta}{\Delta} \right| = \left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right| = \frac{\epsilon}{2\pi} \cdot \frac{\Delta\nu}{\nu}$$

$$= \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \frac{\delta\nu}{2\pi \nu}$$

$$F^* = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} \quad \Rightarrow$$

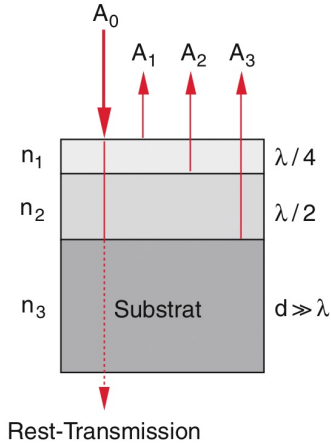
Die Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  der Transmission eines FPI

ist gegeben durch  $\frac{\delta\nu}{F^*}$ .

## Beispiel

$R = 0,98 \Rightarrow F^* \approx 155$ , d. h. für  $R = 0,98$  interferieren etwa 155 Teilwellen miteinander. Bei einer optischen Dicke  $n \cdot d = 3 \text{ cm} \Rightarrow \delta\nu = c/(2nd) = 5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \Delta\nu = \delta\nu/F^* = 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} = 32 \text{ MHz}$  ▶

*Denksatz*



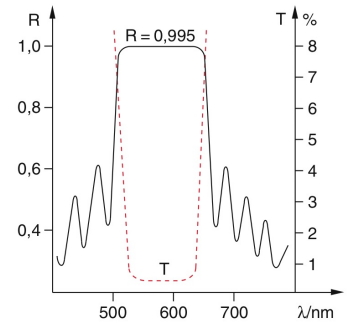
**Abbildung 10.28** Überlagerung der reflektierten Amplituden bei einem dielektrischen Zweischichtenspiegel mit  $n_1 > n_2 > n_3$

*Denksatz*

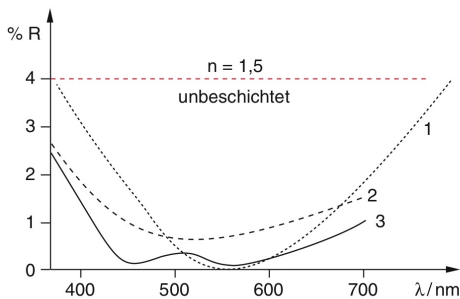
*grünes Licht 500 THz*

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{32 \text{ MHz}}{500 \text{ THz}} = 1,5 \cdot 10^{-7}$$

*Durch Verwendung von dünnen Schichten kann eine hochreflektierende Oberfläche erzeugt werden.*



**Abbildung 10.29** Reflexionsvermögen  $R(\lambda)$  eines dielektrischen Mehrschichtenspiegels



**Abbildung 10.31** Restreflexion bei einer einfachen Antireflexschicht (Kurve 1) im Vergleich mit unbeschichtetem Glas mit  $n_2 = 1,5$ . Die Kurve 2 wird durch einen Zweischichten-Breitband-Antireflexbelag erreicht, Kurve 3 durch einen Dreischichtenbelag

*Denksatz*

*Antireflexschichten*

*z.B. in Brillen etc.*

*Denksatz*

*Weitere Anwendungen: schmalbandige Farbpilze*

## 6.4 Mathematischer Einschnitt : Die Fouriertransformation

$f(t)$  sei eine Funktion der Zeit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{ist die}$$

Fouriertransformierte von  $f(t)$

Beispiel

$$f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \cdot e^{i\omega t} dt$$

Für die Fouriertransformation muss man den "Begriff" der Funktion erweitern zu sogenannten Distributionen.

$$e^{-i\omega t}$$

$$e^{-i\omega t} e^{-\frac{1}{2}\eta t^2}$$

$$\text{Für } \eta \gg 0$$

wird beide Funktionen identisch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{1}{4}\frac{b^2}{a}+c}$$

$$f(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

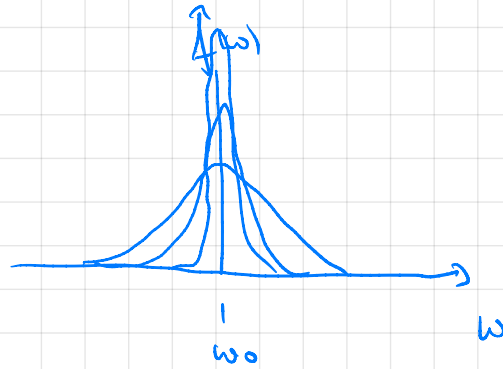
$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{\eta \gg 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{-\frac{1}{4}\frac{1}{\eta}(\omega-\omega_0)^2}$$

$\tilde{f}(\omega)$  ist proportional zu einer  $\delta$ -Distribution.

Wovon werden das wir doch eine  $\delta$ -Funktion.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4\pi}(\omega-\omega_0)^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{4\pi}}} \cdot 1 = \sqrt{2\pi} = \text{const.}$$



$$f(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0)$$

Für unser Cosinus-Funktion  $f(t) = \cos(\omega_0 t)$



Inverse Fouriersformeln

$$\tilde{f}(\omega) \rightarrow f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt' \right) e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} dt' d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega(t-t')} d\omega dt' \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') 2\pi \delta(t-t') dt' \\
&= \frac{2\pi}{2\pi} f(t) = f(t) \quad \text{g.e.l.}
\end{aligned}$$

Faltungssatz:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t') h(t') dt' \quad \text{Faltung}$$

$$f(t) = (g \otimes h)(t)$$

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{g}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega)$$

## 6.5 Beugung

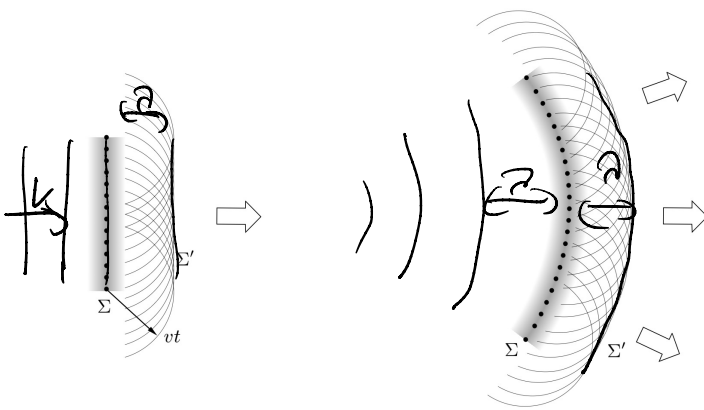
Das Huygenahs Prinzip

Wenn wir die Ausbreitung dieser Wellen untersuchen, müssen wir noch berücksichtigen, dass jedes Teilchen der Materie, in der sich die Welle fortpflanzt, seine Bewegung nicht nur dem nächsten Nachbarn in Ausbreitungsrichtung des Strahls mitteilt, sondern auch allen anderen Nachbarn, die es berührt und die seiner Bewegung Widerstand leisten. So entsteht um jedes Teilchen eine Welle, deren Mittelpunkt das betreffende Teilchen ist. (Christiaan Huygens, 1690, *Traité de la Lumière* [Abhandlung über das Licht])



Christiaan Huygens  
1629-1695

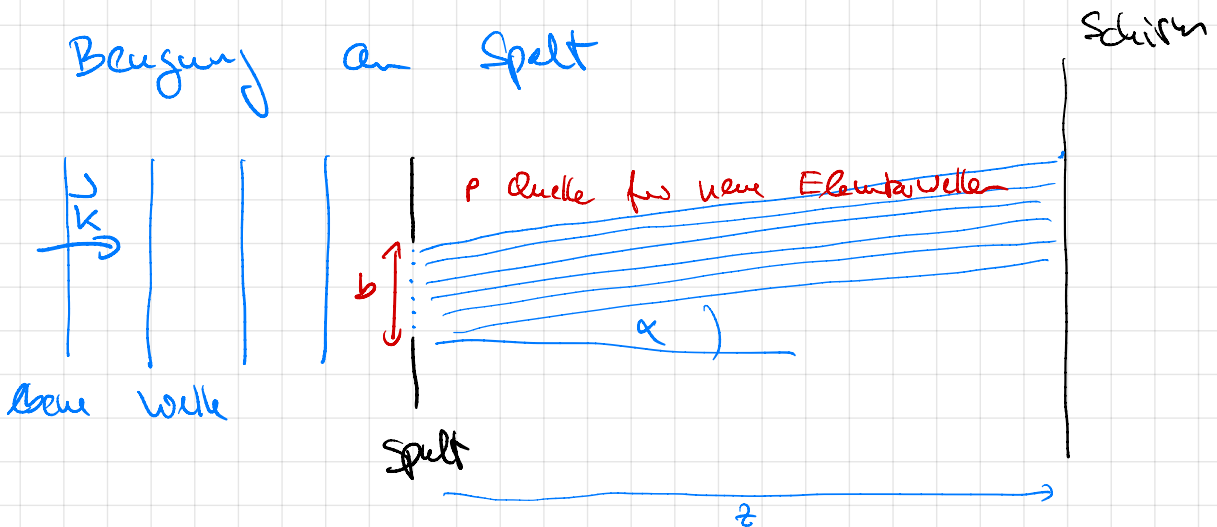
Hedst



Hedst

Ein jeder Punkt einer Wellenfront ( $\varphi = \text{const}$ )  
ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kugelwelle)  
die sich alle überlagert und aus Ko-Strahlung  
den Prozess der nächsten Wellenfront bilden.

Beugung am Spalt



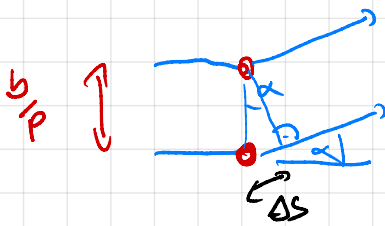
Lichtquelle und Schirm werden gegen Abstand von Spalt.

⇒ Ebene Wellen treffen auf den Spalt

An Schirm erreichen die Wellen (fast) senk.

Wir betrachten die Beugung im Fernfeld als Funktion von  $\alpha$ .

### Fraunhoferbeugung

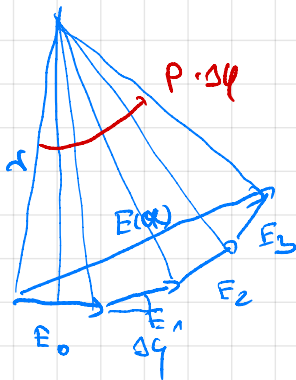


$$\Delta S = \frac{b}{p} \sin \alpha$$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{p} \sin \alpha$$

Phasendifferenz benachbarter Elementarwellen

$$E(\alpha) = E_0 e^{i\omega t} (e^0 + e^{i\Delta\varphi} + e^{2i\Delta\varphi} + e^{3i\Delta\varphi} + \dots + e^{i(p-1)\Delta\varphi})$$



$$E(\alpha) = 2 N \sin \left( \frac{p \cdot \Delta\varphi}{2} \right)$$

$$= 2 \frac{E_0}{\Delta\varphi} \sin \left( \frac{p \cdot \Delta\varphi}{2} \right)$$

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b}{p} \sin \alpha$$

$$E(\alpha) = E_0 \frac{\sin \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha}$$

$$PE = E_0$$

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

$$(\sin x)^2$$

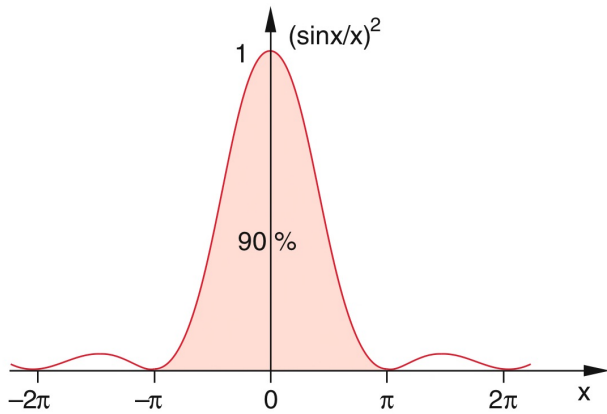


Abbildung 10.36 Die Funktion  $(\sin x/x)^2$

$$x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

Merkmale

Die maximale Intensität geht gerade durch  
Minima von 0 bei  $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

$$\pi = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{b}$$

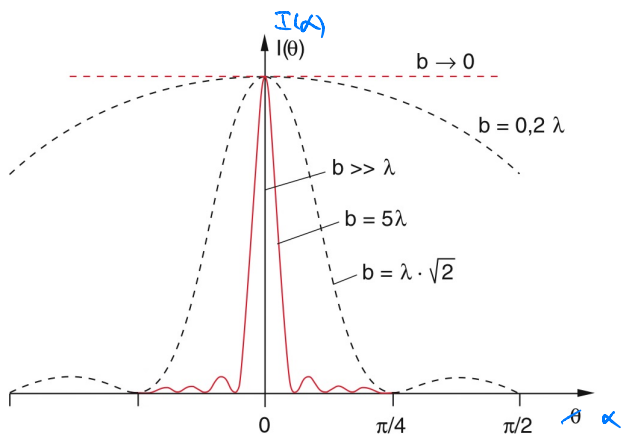
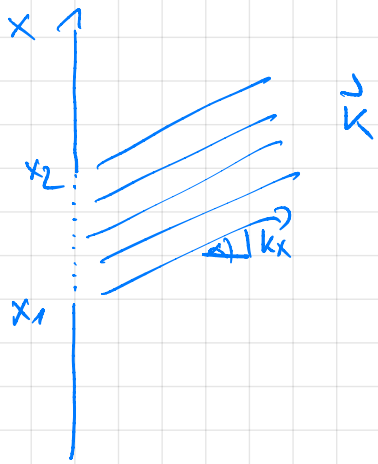


Abbildung 10.39 Intensitätsverteilung  $I(\theta)$  bei der Beugung am Spalt für verschiedene Werte des Verhältnisses  $b/\lambda$  von Spaltbreite  $b$  zu Wellenlänge  $\lambda$

Merkmale des

Für breite Spalte im Vergleich zur Wellenlänge geht die Beugung asymptotisch in die geometrische Optik über.





Im profen Abstand verhalten sich die Kugelwellen wie ebene Wellen

$$E(x) = \int_{x_1}^{x_2} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dx$$

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ 1 & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$|H|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} dx \right|^2$$

Zeitlich gemittelt

$$|H|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{ik_x x} dx \right|^2$$

Fourier-Transformierte von  $T$   
 $\tilde{T}(k_x)$

Die Intensität verhält sich wie das Betragsquadrat der Fourier-Transformierten der Transmissionsfunktion.

$$k_x = |k| \sin \alpha$$